

## Спектр дипольно-обменных спиновых волн в анизотропном ферромагнитном волноводе прямоугольного сечения

© Н.Ю. Григорьева, Д.А. Попов, Б.А. Калиникос

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: natalygr69@gmail.com

(Поступила в Редакцию 12 марта 2014 г.)

Построена теория, строго описывающая спектр дипольно-обменных спиновых волн в произвольно намагниченном анизотропном ферритовом волноводе прямоугольного сечения. Теория учитывает пространственную неоднородность внутреннего магнитного поля в поперечном сечении волновода. Проведен анализ влияния параметров ферритового волновода на распределение внутреннего магнитного поля по сечению волновода. Исследованы дисперсионные характеристики двух характерных типов волноводов. Приведены спектры дипольно-обменных спиновых волн, рассчитанные при поперечном намагничивании волноводов, а также построены распределения динамической намагниченности по сечению волновода для нескольких типов объемных и локализованных мод.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-02-00496 и грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ РФ (НШ-4109.2014.2).

### 1. Введение

Интерес к исследованию узких ферритовых волноводов связан, с одной стороны, с созданием наноструктур для магнитных систем хранения информации, отдельным элементом которых является волновод спиновых волн [1–5], а с другой стороны, с перспективами применения ферритовых волноводов переменного сечения для создания линейных и нелинейных устройств обработки СВЧ сигналов [6–8]. В то же время развитие Мандельштам-Бриллюэновской спектроскопии, в частности *micro-BLS*, сделало возможным визуализировать процессы распространения спиновых волн в магнитных наноструктурах и выявило новые эффекты, связанные с пространственным ограничением таких волноведущих структур. Среди физических эффектов, исследуемых в ограниченных спин-волновых структурах, можно отметить возбуждение и распространение локализованных мод, интерференцию объемных мод, параметрическое возбуждение спиновых волн в ограниченном волноводе и др. [9–13].

Обзор литературы показывает, что имеющиеся на настоящий момент аналитические теории не могут в полной мере описать спектр спиновых волн в пространственно ограниченных волноведущих структурах прямоугольного сечения с соотношением сторон, близким к единице [14–17]. Сложность заключается в необходимости одновременного учета обменного и дипольно-дипольного взаимодействия, а также анизотропии формы образца. Например, некоторые авторы [14–17] используют при построении теории так называемое „приближение тонкой пленки“, в рамках которого невозможно получение спектра локализованных состояний, а в большинстве остальных работ используется численное решение исходных уравнений [15,18].

Попытки аналитического описания статических и динамических процессов в ферритовых волноводах неэллипсоидальной формы начались с пионерских работ Джозефа и Шлёмана [19]. Авторы впервые указали на необходимость учета пространственной неоднородности внутреннего магнитного поля при описании статических и динамических процессов в прямоугольных ферритовых образцах. В настоящее время основной вклад в теоретическое описание динамики спиновых волн в прямоугольных ферритовых волноводах вносят работы, выполненные под руководством Славина [16,17] и Кравчука [18]. В работах первой группы используется феноменологический подход к описанию спектра спиновых волн, основанный на введении эффективных магнитных и геометрических параметров описываемой структуры. Вторая группа исследователей использует для получения спектра спиновых волн численные методы. В последнем случае полученные результаты сложно интерпретировать с физической точки зрения, так как появляются побочные решения, физическая сущность которых не совсем ясна.

Целью данной работы является построение строгой теории, описывающей распространение дипольно-обменных спиновых волн в произвольно намагниченном ферритовом волноводе прямоугольного сечения при учете объемной и поверхностной анизотропии волновода. Основным преимуществом представленной теории является то, что и объемные, и локализованные состояния могут быть получены в аналитическом виде как линейные суперпозиции спин-волновых мод, вклад каждой из которых определяется формой неоднородности внутреннего магнитного поля в поперечном сечении образца.

### 2. Основные соотношения

Рассмотрим регулярный ферритовый волновод прямоугольного сечения толщиной  $L$  и шириной  $w$  (рис. 1).

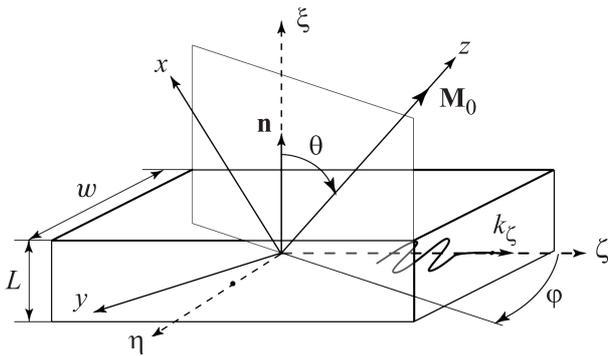


Рис. 1. Геометрия задачи.

Будем считать, что волновод неограничен в направлении оси  $\xi$  и намагничен до насыщения внешним постоянным магнитным полем  $\mathbf{H}_0$  произвольного, но заданного направления. Для удобства анализа введем две координатные системы: систему координат  $\xi\eta\zeta$ , связанную с геометрическими осями волновода так, что ось  $\xi$  направлена вдоль оси волновода и совпадает с направлением распространения спиновой волны, и систему координат  $xuz$ , ось  $z$  которой совпадает с равновесным направлением намагниченности  $\mathbf{M}_0$ . Начало обеих систем координат помещено в центр волновода. Взаимная ориентация систем координат задается углами  $\varphi$  и  $\theta$  и определяется ортогональными преобразованиями поворота, приведенными в работе [2]. Ферритовый волновод будем считать анизотропным, имеющим произвольный тип анизотропии, описываемой тензором эффективных размагничивающих факторов  $\hat{\mathbf{N}}^A$ . Ориентация осей анизотропии в пространстве относительно системы координат образца задается углами  $\varphi^A$  и  $\theta^A$  и определяется преобразованиями поворота на соответствующие углы. Подчеркнем, что в случае анизотропного волновода направление равновесной намагниченности  $\mathbf{M}_0$  не совпадает с направлением внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  и должно быть найдено из решения соответствующей статической задачи.

Спектр нормальных волн в рассматриваемой волноводной структуре будем описывать в рамках феноменологического подхода путем совместного интегрирования уравнения движения намагниченности Ландау–Лифшица (без учета диссипации энергии) и системы уравнений Максвелла, взятой в магнитоэлектростатическом приближении с учетом соответствующих электродинамических и обменных граничных условий.

В гауссовой системе единиц уравнение движения намагниченности Ландау–Лифшица без учета диссипации записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)], \quad (1)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  — полное магнитное поле, включающее в себя постоянное внутреннее магнитное поле  $\mathbf{H}^{\text{int}}(\mathbf{r})$ , поле неоднородного об-

менного взаимодействия  $\mathbf{h}^{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ , переменное дипольное поле  $\mathbf{h}^d(\mathbf{r}, t)$  и поле магнитной кристаллографической анизотропии  $\mathbf{h}^A(\mathbf{r}, t)$ . Постоянное внутреннее магнитное поле  $\mathbf{H}^{\text{int}}(\mathbf{r})$  определяется векторной суммой внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , постоянного поля магнитной кристаллографической анизотропии  $\mathbf{H}^A$  и статического дипольного поля  $\mathbf{H}^d(\mathbf{r})$  или, иными словами, поля анизотропии формы образца. Решение уравнения движения намагниченности (1) ищется в виде бегущих монохроматических неоднородных плоских волн вида  $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}(\xi, \eta) \exp(i\omega t - ik_\xi \xi)$ .

В рамках метода тензорных функций Грина [20] векторные фурье-амплитуды динамического дипольного поля  $\mathbf{h}^d(\xi, \eta; k_\xi)$  и компоненты статического поля анизотропии формы  $\mathbf{H}^d(\xi, \eta)$  описываются одной и той же тензорной функцией Грина, найденной из соответствующей системы уравнений Максвелла

$$\mathbf{h}^d(\xi, \eta; k_\xi) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-w/2}^{w/2} \hat{\mathbf{G}}(\xi, \xi'; \eta, \eta'; k_\xi) \mathbf{m}(\xi', \eta'; k_\xi) d\xi' d\eta', \quad (2a)$$

$$\mathbf{H}^d(\xi, \eta) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-w/2}^{w/2} \hat{\mathbf{G}}(\xi, \xi'; \eta, \eta'; k_\xi = 0) \mathbf{M}_0(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \quad (2b)$$

где для общности рассмотрения учтено, что в ограниченных структурах компоненты  $\mathbf{M}_0$  могут иметь координатную зависимость. Следует отметить, что взятие интеграла в (2b) при  $\mathbf{M}_0(\xi', \eta') \equiv \mathbf{M}_0$  приводит к известным выражениям для компонент тензора размагничивающих факторов формы, полученным в работе [19] другим способом. Соответствующие тензорные функции Грина  $\hat{\mathbf{G}}(\xi, \xi'; \eta, \eta'; k_\xi)$  приведены в работе [21]. Отметим, что в отличие от тензорной функции Грина ферромагнитной пленки, неограниченной в ее плоскости, используемый здесь тензор  $\hat{\mathbf{G}}(\xi, \xi'; \eta, \eta'; k_\xi)$  имеет все девять компонент, а также содержит зависимость от поперечной координаты  $\eta$ .

После подстановки соответствующих выражений для слагаемых полного магнитного поля и проведения обычной процедуры линеаризации получим следующую систему интегродифференциальных уравнений для векторной Фурье-амплитуды переменной намагниченности  $\mathbf{m}(\xi, \eta; k_\xi)$ :

$$\hat{\mathbf{F}}\mathbf{m}(\xi, \eta; k_\xi) + \hat{\mathbf{T}}\mathbf{m}(\xi, \eta; k_\xi) + \hat{\mathbf{N}}^A \mathbf{m}(\xi, \eta; k_\xi) = \mathbf{h}^d(\xi, \eta; k_\xi). \quad (3)$$

Отметим, что данное уравнение записано в системе координат  $xuz$ . Здесь  $\hat{\mathbf{F}}$  — линейный дифференциальный матричный оператор

$$\hat{\mathbf{F}} = -\alpha (\nabla_\xi^2 + \nabla_\eta^2 - k_\xi^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Оператор  $\hat{\mathbf{T}}$  включает частотно-зависимую часть

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\gamma 4\pi M_{0z}} \times \left\{ (H_{0z} + H_z^A + H_z^d(\xi, \eta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (5)$$

а  $\hat{\mathbf{N}}^A$  представляет собой тензор размагничивающих факторов рассматриваемого типа магнитной кристаллографической анизотропии, записанный в равновесной системе координат  $xuz$ .  $H_z^d(\xi, \eta)$  и  $H_{0z}$  суть  $z$ -проекции поля анизотропии формы и внешнего магнитного поля.

Далее для простоты будем рассматривать однородно намагниченный волновод ( $\mathbf{M}_0(\xi', \eta') \equiv \mathbf{M}_0$ ). В этом случае выражение для  $H_z^d(\xi, \eta)$  в равновесной системе координат записывается следующим образом:

$$H_z^d(\xi, \eta) = -4\pi M_{0z} \left[ N_{\xi\xi}^d(\xi, \eta) \cos(\theta)^2 - N_{\eta\eta}(\xi, \eta) \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 - N_{\xi\eta}(\xi, \eta) \sin(2\theta) \sin(\varphi) \right], \quad (6)$$

где  $N_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$  — компоненты тензора размагничивающих факторов формы, полученные путем интегрирования соответствующих компонент функции Грина формулы (2b).

В рамках теории спин-волновых мод интегродифференциальное уравнение (3) может быть сведено к бесконечной системе алгебраических уравнений путем разложения искомого решения в ряд по спин-волновым модам  $\mathbf{S}_{nq}^p(\xi, \eta)$

$$\mathbf{m}(\xi, \eta; k_\xi) = 4\pi M_{0z} \sum_n \sum_q \sum_p m_{nq}^p(k_\xi) \mathbf{S}_{nq}^p(\xi, \eta), \quad (7)$$

где векторные функции имеют вид

$$\mathbf{S}_{nq}^x(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \Phi_{nq}^x(\xi, \eta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{nq}^y(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{nq}^y(\xi, \eta) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Вид спин-волновых функций зависит от выбора обменных граничных условий на соответствующих гранях волновода. В линейном случае функции  $\Phi_{nq}(\xi, \eta)$  факторизуются  $\Phi_{nq}(\xi, \eta) = \Phi_n(\xi)\Phi_q(\eta)$  и при однородном симметричном закреплении поверхностных спинов описываются одинаковыми выражениями  $\Phi_{nq}^x(\xi, \eta) = \Phi_{nq}^y(\xi, \eta)$ . Явный вид выражений для  $\Phi_n(\xi)$  и  $\Phi_q(\eta)$  для общего случая обменных граничных условий приведен в работе [21].

Подставляя решение (7) в уравнение (3) и используя условие ортонормированности выбранного базиса, приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\mathbf{D}_{nm,qq} \mathbf{m}_{nq} + \sum_{n' \neq n, q' \neq q} \mathbf{R}_{nn',qq'} \mathbf{m}_{n'q'} = 0, \quad (9)$$

Линейные матричные операторы в (9) имеют вид

$$\mathbf{D}_{m,qq} = \begin{pmatrix} F_{nq} + H_{mn,qq} - \Gamma_{mn,qq}^{xx} + N_{xx}^A & -\Gamma_{nn,qq}^{xy} + N_{xy}^A - \frac{i\omega}{\gamma 4\pi M_{0z}} \\ -\Gamma_{mn,qq}^{yx} + N_{yx}^A + \frac{i\omega}{\gamma 4\pi M_{0z}} & F_{nq} + H_{mn,qq} - \Gamma_{mn,qq}^{yy} + N_{yy}^A \end{pmatrix}, \quad (10a)$$

$$\mathbf{R}_{nn',qq'} = \begin{pmatrix} H_{nn',qq'} - \Gamma_{nn',qq'}^{xx} & -\Gamma_{nn',qq'}^{xy} \\ -\Gamma_{nn',qq'}^{yx} & H_{nn',qq'} - \Gamma_{nn',qq'}^{yy} \end{pmatrix}. \quad (10b)$$

Причем матричные элементы в (10a) и (10b) находятся по формулам

$$F_{nq} = \alpha(k_n^2 + \kappa_q^2 + \kappa_z^2), \quad (11)$$

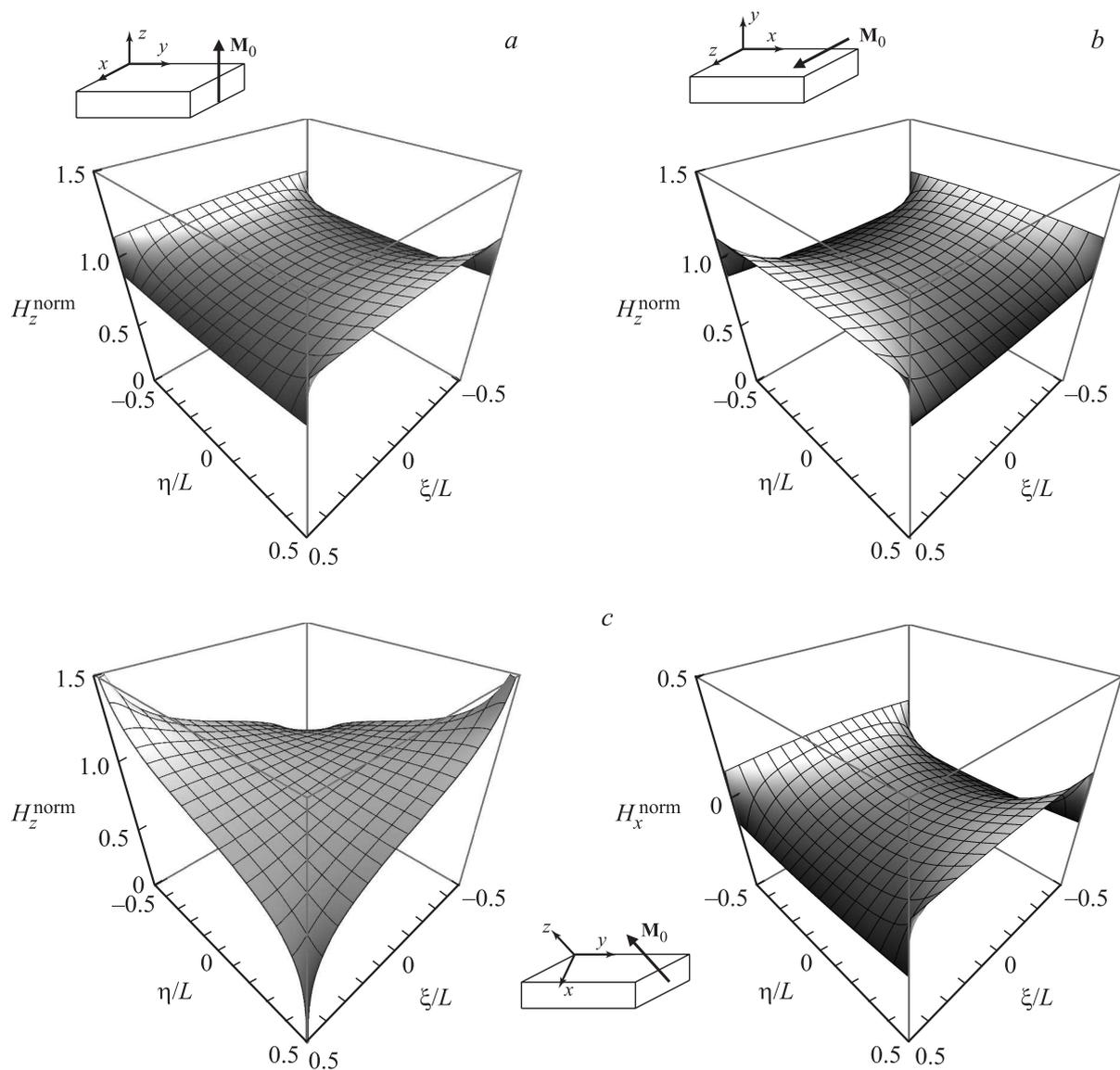
$$H_{nn',qq'} = \frac{H_{0z}}{4\pi M_{0z}} \delta_{nn'} \delta_{qq'} - N_{zz}^A + \frac{1}{wL} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \Phi_{nq}(\xi, \eta) H_z^d(\xi, \eta) \Phi_{n'q'}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (12)$$

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\alpha\beta}(k_\xi) = \frac{1}{wL} \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \Phi_{nq}(\xi, \eta) G_{nn',qq'}^{\alpha\beta}(\xi, \xi'; \eta, \eta'; k_\xi) \times \Phi_{n'q'}(\xi', \eta') d\eta d\xi d\eta' d\xi'. \quad (13)$$

Здесь индексы  $\alpha, \beta$  пробегает значения  $x, y, z$ . Выражения для матричных элементов  $\Gamma_{nn',qq'}^{\alpha\beta}$  и  $H_{nn',qq'}$ , полученные для случая произвольно закрепленных поверхностных спинов, приведены в Приложении.

Бесконечная система алгебраических уравнений (9) точно описывает линейный процесс распространения спиновых волн в анизотропном прямоугольном ферритовом волноводе. Спектр собственных состояний находится путем решения задачи на собственные значения полученной системы. Соответствующие собственные вектора, получаемые в результате решения, суть амплитуды спин-волновых мод, с помощью которых можно рассчитать пространственное распределение динамической намагниченности по сечению волновода.

Отметим, что построенная теория описывает процесс распространения спиновых волн в прямоугольном ферритовом волноводе с любым типом магнитной кристаллографической анизотропии. Однако на практике пока нашли применение только слабо анизотропные и изотропные ферритовые волноводы, сформированные из пленок железо-иттриевого граната (ЖИГ) и пермаллоя. Поэтому дальнейшие расчеты в рамках построенной теории будут производиться для структур из этих двух материалов.



**Рис. 2.** Распределение нормированного внутреннего поля по сечению волновода при различных направлениях намагничивания. *a)*  $\theta = 0$ ,  $\varphi = 0$ . *b)*  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi/2$ . *c)*  $\theta = \pi/4$ ,  $\varphi = \pi/2$ . Остальные параметры:  $w/L = 1$ ,  $H_0/4\pi M_0 = 1.5$ . В случае произвольного направления намагничивания (*c*) для наглядности представлены обе компоненты нормированного внутреннего поля.

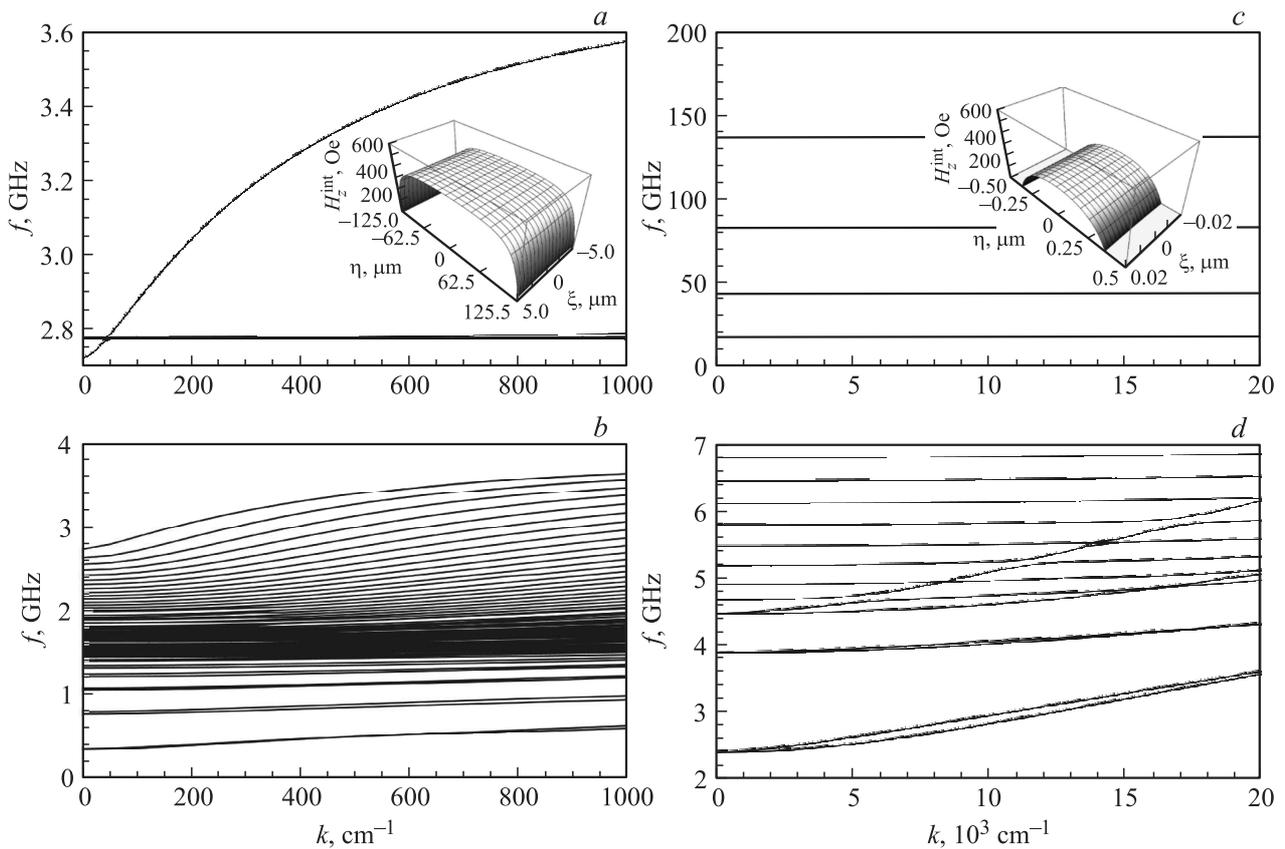
### 3. Статическая задача. Неоднородное внутреннее магнитное поле

Основной особенностью ферромагнитных структур конечных размеров является наличие внутри образца размагничивающего поля — поля „анизотропии формы“. Вследствие этого при помещении образца неэллипсоидальной формы в однородное магнитное поле его внутреннее магнитное поле оказывается сильно неоднородным. Именно эта пространственная неоднородность внутреннего статического магнитного поля и приводит к ряду интересных эффектов, экспериментально наблюдаемых в ферритовых волноводах прямоугольного сечения [8,10,12,13].

Анализ формулы (6) показывает, что при  $M_0(\mathbf{r}) = \text{const}$  распределение по сечению волновода

$z$ -компоненты нормированного внутреннего поля  $H_z^{\text{norm}}(\xi, \eta) = (H_0 + H_z^d(\xi, \eta))/4\pi M_0$  не зависит ни от материала волновода, ни от его абсолютных размеров. Иными словами, степень неоднородности внутреннего поля в волноводах на основе ЖИГ и пермаллоя при одинаковых соотношениях  $w/L$  и  $H_0/4\pi M_0$ , и при одном направлении намагничивания, будет одинакова.

Взятие интеграла в (2b) при  $\mathbf{M}_0(\xi', \eta') \equiv \mathbf{M}_0$  приводит к известным распределениям компонент размагничивающего поля по сечению волновода, которые можно легко построить по соответствующим формулам для компонент тензора размагничивающих факторов, полученным в работе [19]. Анализ этих распределений показывает, что в достаточно широких волноводах с отношением сторон больше 100 неоднородность внутреннего поля локализована вблизи стенок волновода, а в его цент-



**Рис. 3.** Спектр спиновых волн касательно намагниченного волновода при  $L/w = 25$ ,  $H_0 = 500$  Ое. *a, b*) ЖИГ-волновод с размерами  $L = 10 \mu\text{m}$ ,  $w = 250 \mu\text{m}$ . *c, d*) Пермаллоевый волновод с размерами  $L = 40 \text{ nm}$ ,  $w = 1 \mu\text{m}$ . *a, c*) Спектр толщинных мод при  $n = 1, 2, 3, \dots, q = 1$ . *b, d*) Спектр шириных мод при  $n = 0, q = 1, 2, 3, \dots$ . На вставках представлены распределения внутреннего поля по сечению волновода.

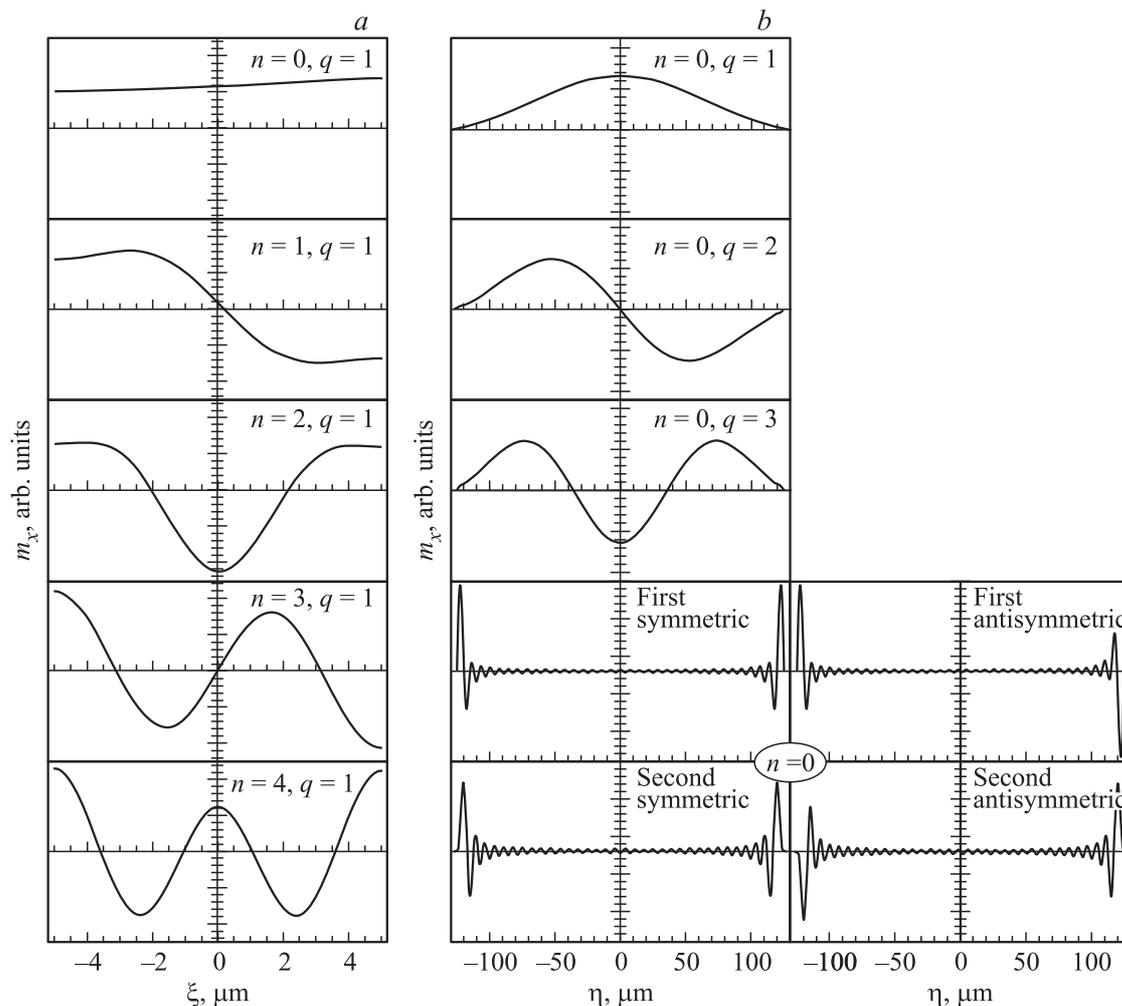
ральной области она практически однородна. По мере устремления отношения сторон к бесконечности поле в центре волновода будет стремиться к полю в пленке, намагниченной аналогичным образом, а неоднородность на краях будет локализована в пренебрежимо малом объеме относительно объема всего образца. Этот факт и позволяет применять приближение „эффективного поля“ и „эффективной ширины волновода“, часто используемое экспериментаторами при описании спектра спиновых волн в ферритовых волноводах [12,13]. Однако для более узких волнопроводов данное приближение неприменимо. Подчеркнем, что в случае узких волнопроводов внутреннее поле искажено по всему объему волновода и введение эффективных параметров не представляется возможным. На рис. 2, *a, b* представлены распределения  $z$ -компоненты нормированного внутреннего поля для двух направлений подмагничивания для волновода с квадратным сечением ( $w/L = 1$ ).

Следует отметить, что в рамках метода тензорных функций Грина легко можно получить распределения размагничивающего поля при произвольных направлениях намагничивания образца, например, при  $\theta = \pi/4$ ,  $\varphi = \pi/2$  (рис. 2, *c*), что в рамках других аналитических методов сделать весьма затруднительно. Кроме того, в

отличие от формул, приведенных в работе [19], выражение (2b) позволяет рассчитывать размагничивающее поле в случае неоднородной намагниченности образца. Последний момент является важным, поскольку в образцах неэллипсоидальной формы распределение равномерной намагниченности по сечению волновода обычно не является однородным.

#### 4. Динамическая задача. Спектр спиновых волн прямоугольного ферритового волновода

Условие равенства нулю определителя матрицы коэффициентов алгебраической системы уравнений (9) дает спектр собственных спиновых волн прямоугольного ферритового волновода, который является многомодовым. Следует отметить, что основное отличие дисперсионных характеристик волноводных мод от спектра волн в ферромагнитной пленке обусловлено конечными размерами волновода в поперечном к направлению распространения волн сечении. Конечность этих размеров приводит, с одной стороны, к сильной неоднородности внутреннего статического магнитного поля, а с другой



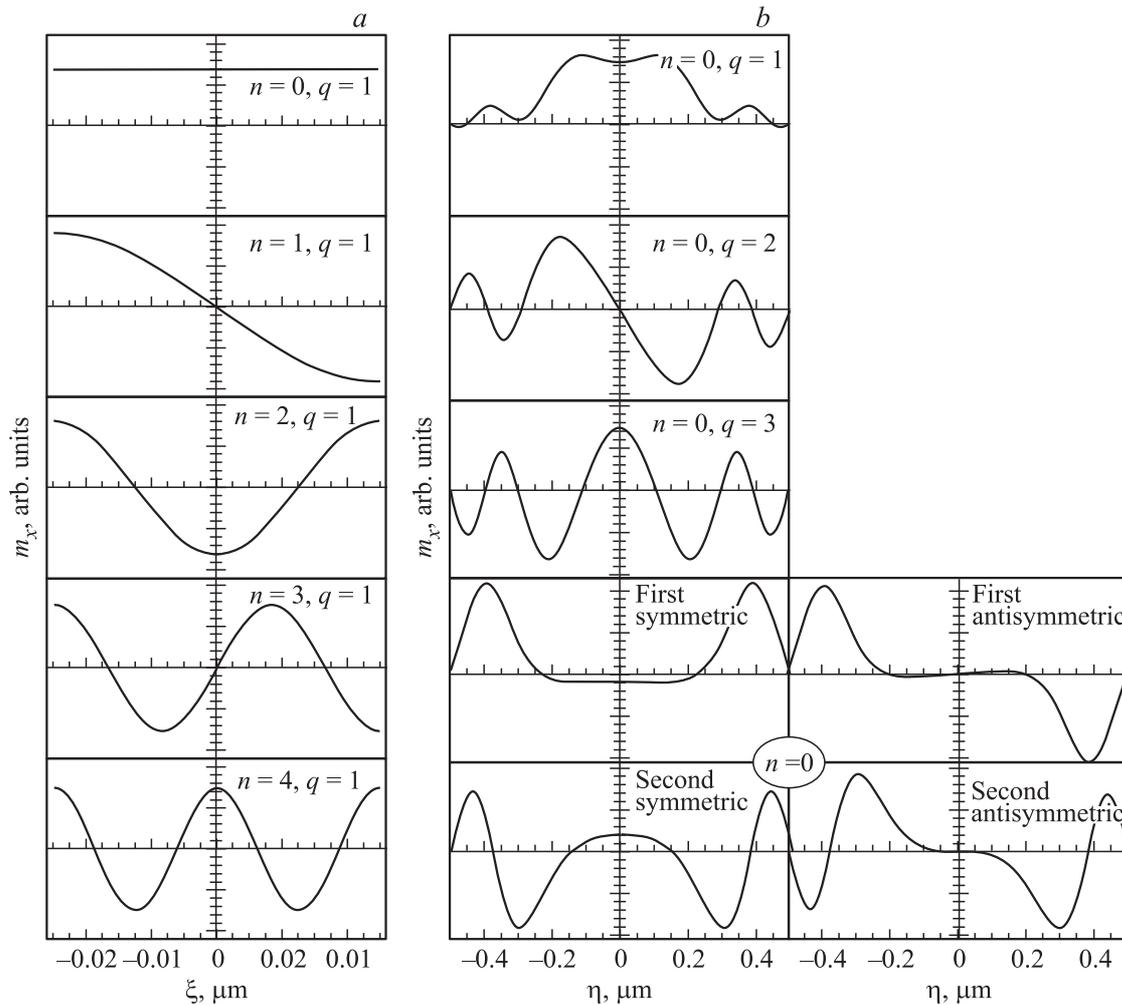
**Рис. 4.** Пространственное распределение  $x$ -компоненты относительной амплитуды динамической намагниченности для спин-волновых мод ЖИГ-волновода при  $k = 500 \text{ cm}^{-1}$ . *a*) Пространственное распределение пяти первых толщинных мод (рис. 3, *a*), при  $\eta = 0$ . *b*) Пространственное распределение широких и локализованных мод (рис. 3, *b*), при  $\xi = 0$ .

стороны, к размерному квантованию собственных волн образца. Первый эффект связан с анизотропией формы образца и проявляется только при определенных направлениях внешнего магнитного поля. Вторым эффектом обусловлен наличием обменного взаимодействия и проявляется в виде дополнительного расщепления волноводных мод независимо от направления внешнего поля подмагничивания.

На рис. 3 представлены спектры спиновых волн, рассчитанные для касательно намагниченных волноводов из ЖИГ с параметрами  $4\pi M_0 = 1750 \text{ G}$ ,  $\alpha = 3.1 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2$ ,  $\gamma/2\pi = 2.8 \text{ MHz/Oe}$ ,  $L = 10 \mu\text{m}$  и из пермаллоя с параметрами  $4\pi M_0 = 9525 \text{ G}$ ,  $\alpha = 4.43 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2$ ,  $\gamma/2\pi = 2.95 \text{ MHz/Oe}$ ,  $L = 40 \text{ nm}$ ,  $w = 1 \mu\text{m}$ . Волноводы касательно намагничены внешним магнитным полем  $H_0 = 500 \text{ Oe}$  в направлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi/2$ . Для обоих волноводов отношение  $w/L = 25$ , т.е. анизотропия формы одинаковая. Поверхностные спины считаются свободными на верхней и нижней

поверхностях волноводов и закрепленными на боковых гранях волноводов. Выбранные параметры волноводов и конфигурация внешнего магнитного поля характерны для экспериментально исследуемых образцов. На рис. 3, *a, c* представлены спектры толщинных мод ( $n = 0, 1, 2, \dots, q = 1$ ), а на рис. 3, *b, d* спектры широких мод ( $n = 0, q = 1, 2, 3, \dots$ ) волноводов. Такое разделение сделано для большей наглядности представляемых результатов. В действительности спектр должен быть общим. На врезках показано соответствующее распределение внутреннего статического магнитного поля по сечению волновода.

На рис. 3, *a, b* представлены соответственно спектры толщинных и широких мод ЖИГ-волновода. Как видно из рисунков при выбранных параметрах волновода спектр толщинных мод (рис. 3, *a*) напоминает соответствующий спектр толстой пленки при эффективном внутреннем поле  $H_{\text{eff}} = 450 \text{ Oe}$  с небольшим отличием групповой скорости основной моды (здесь она



**Рис. 5.** Пространственное распределение  $x$ -компоненты относительной амплитуды динамической намагниченности для спин-волновых мод пермаллового волновода при  $k = 9500 \text{ cm}^{-1}$ . *a*) Пространственное распределение пяти первых толщинных мод (рис. 3, *c*), при  $\eta = 0$ . *b*) Пространственное распределение ширинных и локализованных мод (рис. 3, *d*), при  $\xi = 0$ .

немного ниже) и частот ферромагнитного резонанса у высших мод (она примерно на 20 MHz ниже). Первый факт объясняется возникновением так называемого „эффективного дипольного закрепления“ поверхностных спинов [17], обусловленного сильной неоднородностью диполь-дипольного взаимодействия вблизи границ волновода. Второй факт вызван сильной неоднородностью внутреннего статического магнитного поля, вследствие чего на высшие спин-волновые моды действует другое „эффективное внутреннее поле“, т.е. основная мода и высшие моды по-разному „чувствуют“ неоднородность статического поля.

Спектр ширинных мод, показанный на рис. 3, *b*, можно условно разбить на две области. Верхняя часть спектра (выше 1.7 GHz) представляет собой спектр объемных мод, распространяющихся в центральной области волновода. Часть спектра, расположенная ниже частоты 1.7 GHz, представляет собой спектр спиновых волн, локализованных в „магнитных ямах“, расположенных

вблизи краев волновода. Спектр является дискретным и его плотность увеличивается при приближении к частоте 1.7 GHz. Кроме того, характерной особенностью спектра локализованных мод является наличие двух почти вырожденных состояний для каждой дискретной моды. Эти состояния отвечают симметричным и антисимметричным локализованным модам.

Полнее понять общую картину помогут пространственные распределения относительных амплитуд динамической намагниченности, представленные на рис. 4. Как видно из приведенных графиков, толщинные моды (рис. 4, *a*) слабо отличаются от собственных волн ферромагнитной пленки со свободными поверхностными спинами. Ширинные моды (рис. 4, *b*) делятся на две группы: объемные моды (первые три графика) и локализованные состояния (последние четыре графика).

На рис. 3, *c, d* представлены спектры толщинных и ширинных мод пермаллового волновода. Из представленных графиков следует, что спектр толщинных мод

(рис. 3, *c*) практически совпадает со спектром тонкой пленки пермаллоя ( $L = 40 \text{ nm}$ ) при  $H_{\text{eff}} = 260 \text{ Oe}$ . Это же подтверждают построенные при  $k = 9500 \text{ cm}^{-1}$  пространственные распределения относительных амплитуд динамической намагниченности для соответствующих мод (рис. 5, *a*). На рис. 3, *d* показан спектр ширинных мод пермаллового волновода. Так же как и в случае ЖИГ-волновода, спектр может быть условно разделен на две части. Одна из них, имеющая частоты, лежащие выше  $4.4 \text{ GHz}$ , представляет собой спектр объемных волноводных мод. Вторая, имеющая частоты ниже  $4.4 \text{ GHz}$ , является спектром локализованных состояний. Поскольку ширина пермаллового волновода гораздо меньше, чем у ЖИГ-волновода, спектр ширинных мод у него сильно разрежен. Хорошо видна основная объемная толщинная мода, пересекающая весь спектр и взаимодействующая со всеми высшими модами. Вследствие того, что спины на боковых гранях волновода считаются закрепленными, то в точках пересечения дисперсионных кривых возникает дипольное расталкивание и гибридизация мод. Этим объясняется отклонение от синусоидальной формы пространственных распределений относительных амплитуд динамической намагниченности для первых трех объемных толщинных мод, представленных на рис. 5, *b*. Разреженность спектра локализованных состояний объясняется сильной неоднородностью внутреннего статического магнитного поля (см. вставку рис. 3, *c*). В отличие от случая ЖИГ-волновода, „магнитные ямы“ по краям пермаллового волновода гораздо шире и мельче, и поэтому распределения относительных амплитуд динамической намагниченности для локализованных мод более определенно выражены (рис. 5, *b*).

Проанализируем теперь применимость формул, приведенных в работах [9,20], для расчета спектра спиновых волн в диагональном приближении, которые обычно используются при описании экспериментальных результатов в ферритовых волноводах [9–14]. Сравнение точных спектров с результатами расчета по приближенной теории показывает, что приближенные формулы дают неплохие результаты при описании толщинных мод в пермалловом волноводе с  $w/L > 20$ , поскольку по толщине поле практически однородно. Для представленного на рис. 3, *c* спектра можно использовать один подгоночный параметр — эффективное внутреннее статическое поле  $H_{\text{eff}} = 260 \text{ Oe}$ . Однако при описании спектра спиновых волн более толстых ЖИГ-волноводов (рис. 3, *a*) уже не удается ограничиться одним подгоночным параметром. В этом случае для основной моды и высших толщинных мод приходится использовать разные эффективные поля, а именно  $H_{\text{eff}} = 450 \text{ Oe}$  для основной моды и  $H_{\text{eff}} = 445 \text{ Oe}$  для высших мод. Кроме того, как известно, в случае касательно намагниченных толстых пленок ( $L > 0.5 \mu\text{m}$ ) диагонального приближения недостаточно для правильного описания групповой скорости всех мод спектра, а при использовании приближенного подхода правильный учет взаимодействия мод в волноводе невозможен. Следует также отметить,

что для поперечно намагниченного волновода групповая скорость основной толщинной моды с  $n = 1$ , а следовательно и высших ширинных мод с  $n = 1$ , рассчитанная в рамках приближенной теории, оказывается завышена для толстого волновода и занижена для тонкого.

При описании ширинных мод возникает другая ситуация. Из-за сильной неоднородности поля по ширине волновода для описания спектра спиновых волн приближенным методом изначально требуется два подгоночных параметра  $H_{\text{eff}}$  и  $w_{\text{eff}}$ . Например, для описания спектра ЖИГ-волновода (рис. 3, *b*) хорошие результаты в области больших  $k$  для нескольких первых объемных ширинных мод дают следующие подгоночные параметры —  $H_{\text{eff}} = 450 \text{ Oe}$  и  $w_{\text{eff}} = 220 \mu\text{m}$  (в области частот  $2.3\text{--}3.5 \text{ GHz}$ ). Однако в области малых  $k$  ( $k < 500 \text{ cm}^{-1}$ ) расхождение даже для этих мод оказывается значительным. В этой области сильно влияние диполь-дипольного взаимодействия, которое значительно отличается для случаев бесконечной пленки и ограниченного по ширине волновода. Кроме того, по мере увеличения номера ширинной моды  $q$ , т.е. по мере приближения к частоте  $1.7 \text{ GHz}$ , спектр сгущается, поэтому моды начинают сильно взаимодействовать и приближенная теория перестает работать. Ниже частоты примерно в  $1.7 \text{ GHz}$  начинается спектр локализованных мод. Эта область вообще не может быть описана с помощью приближенной теории.

При описании спектра ширинных мод пермаллового волновода (рис. 3, *d*) приближенная теория практически не работает. При подгоночных параметрах  $H_{\text{eff}} = 242 \text{ Oe}$  и  $w_{\text{eff}} = 0.75 \mu\text{m}$  даже основная мода описывается неудовлетворительно, а расстояния между высшими модами сильно зависят от межмодового взаимодействия и величины эффективного магнитного поля. В этом случае из-за сильной неоднородности внутреннего магнитного поля различные толщинные моды оказываются в разных условиях, т.е. на них действуют разные эффективные поля. Описать такую ситуацию с помощью приближенной теории практически невозможно. Кроме того, локализованные состояния, образующиеся ниже основного спектра объемных мод (ниже  $\sim 4 \text{ GHz}$ ), также не могут быть описаны в рамках приближенного подхода.

## 5. Заключение

В работе представлена теория, строго описывающая спектр дипольно-обменных спиновых волн в произвольно намагниченном анизотропном ферритовом волноводе прямоугольного сечения. Теория учитывает пространственную неоднородность внутреннего магнитного поля в поперечном сечении волновода. Исследованы дисперсионные характеристики двух типов волноводов: толстого ЖИГ-волновода и тонкого пермаллового волновода. Показано, что спектр дипольно-обменных спиновых волн ферритовых волноводов имеет сложный характер и его особенности в большой степени определяются

формой внутреннего статического магнитного поля. На основе анализа пространственных распределений амплитуд спин-волновых мод сделан вывод о том, что энергетические уровни, появляющиеся в спектре спиновых волн на частотах, лежащих ниже спектра объемных мод, являются так называемыми „локализованными состояниями“, т.е. спиновые волны, соответствующие данным состояниям, распространяются вдоль „магнитных ям“ по краям волновода. Установлено, что появление локализованных мод в спектре спиновых волн обусловлено сильной пространственной неоднородностью как статического, так и динамического дипольного поля и не может быть описано в рамках обычной приближенной теории с использованием эффективных параметров.

## Приложение

Выражения для матричных элементов  $H_{nn',qq'}$  в формуле (12) при однородном намагничивании  $M_0(\mathbf{r}) = \text{const}$ :

$$H_{nn',qq'} = \frac{H_{0z}}{4\pi M_{0z}} \delta_{nn'} \delta_{qq'} - N_{zz}^A - \cos(\theta)^2 H_{nn',qq'}^{\xi\xi} + \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 H_{nn',qq'}^{\eta\eta} + \sin(2\theta) \sin(\varphi) H_{nn',qq'}^{\xi\eta},$$

где  $H_{nn',qq'}^{\xi\xi} = -H_{nn',qq'}^{\eta\eta} - \delta_{nn'} \delta_{qq'}$ ,  $H_{nn',qq'}^{\eta\eta} = -\frac{1}{wL} \frac{1}{2\pi} \times \int_0^\infty \kappa \cdot H_{1nn'}(\kappa) H_{2qq'}(\kappa) d\kappa$ ,  $H_{nn',qq'}^{\xi\eta} = H_{nn',qq'}^{\eta\xi} = \frac{1}{wL} \frac{1}{2\pi} \times \int_0^\infty \kappa \cdot H_{3nn'}(\kappa) H_{4qq'}(\kappa) d\kappa$ . Здесь функции  $H_{1nn'}(\kappa)$ ,  $H_{2qq'}(\kappa)$ ,  $H_{3nn'}(\kappa)$ ,  $H_{4qq'}(\kappa)$  имеют вид

$$\begin{aligned} H_{1nn'}(\kappa) &= 2L\delta_{nn'} - G_{1nn'}^-(\kappa) (\Phi_n(0)\Phi_{n'}(0) + D_n D_{n'}) \\ &\quad - G_{1nn'}^+(\kappa) (\Phi_n(0)\Phi_{n'}(0) - D_n D_{n'}), \\ H_{2qq'}(\kappa) &= G_{2qq'}(\kappa) (\Phi_q(0)\Phi_{q'}(0) + D_q D_{q'}) \\ &\quad + G_{2qq'}^+(\kappa) (\Phi_q(0)\Phi_{q'}(0) - D_q D_{q'}), \\ H_{3nn'}(\kappa) &= G_{3nn'}^+(\kappa) (\Phi_n(0)D_{n'} + \Phi_{n'}(0)D_n) \\ &\quad - G_{3nn'}^-(\kappa) (\Phi_n(0)D_{n'}(0) - \Phi_{n'}(0)D_n), \\ H_{4qq'}(\kappa) &= G_{4qq'}^+(\kappa) (\Phi_q(0)D_{q'} + \Phi_{q'}(0)D_q) \\ &\quad - G_{4qq'}^-(\kappa) (\Phi_q(0)D_{q'} - \Phi_{q'}(0)D_q), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{1nn'}^\pm(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \frac{k_{nn'}^\pm (1 + \exp(-\kappa L)) \sin(k_{nn'}^\pm L/2) + \kappa (1 - \exp(-\kappa L)) \cos(k_{nn'}^\pm L/2)}{\kappa^2 + (k_{nn'}^\pm)^2}, \\ G_{2qq'}^\pm(\kappa) &= \frac{2 \sin(\kappa w/2)}{\kappa} \\ &\quad \times \frac{\kappa \cos(\kappa_{qq'}^\pm w/2) \sin(\kappa w/2) - \kappa_{qq'}^\pm \cos(\kappa w/2) \sin(\kappa_{qq'}^\pm w/2)}{\kappa^2 - (k_{qq'}^\pm)^2}, \end{aligned}$$

$$G_{3nn'}^\pm(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \times \frac{k_{nn'}^\pm (\exp(-\kappa L) - 1) \cos(k_{nn'}^\pm L/2) + \kappa (\exp(-\kappa L) + 1) \sin(k_{nn'}^\pm L/2)}{\kappa^2 + (k_{nn'}^\pm)^2},$$

$$G_{4qq'}^\pm(\kappa) = \frac{2 \sin(\kappa w/2)}{\kappa} \times \frac{k_{qq'}^\pm \cos(\kappa_{qq'}^\pm w/2) \sin(\kappa w/2) - \kappa \cos(\kappa w/2) \sin(\kappa_{qq'}^\pm w/2)}{\kappa^2 - (k_{qq'}^\pm)^2},$$

$D_q = \frac{1}{\kappa_q} \frac{d\Phi_q(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0}$ ,  $D_n = \frac{1}{k_n} \frac{d\Phi_n(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0}$ ,  $k_{nn'}^\pm = k_n \pm k_{n'}$ ,  $\kappa_{qq'}^\pm = \kappa_q \pm \kappa_{q'}$ , причем  $\Phi_q(0)$  — значение функции  $\Phi_q(\eta)$  при  $\eta = 0$ , явный вид которой для общего случая обменных граничных условий приведен в работе [21].  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера.

Выражения для матричных элементов в формулах (10a), (10b)

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\xi\xi}(k_\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P_{nn'}(k_\xi, \kappa) \cdot I_{1qq'}(\kappa) d\kappa - \delta_{nn'} \delta_{qq'},$$

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\eta\eta}(k_\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty P_{nn'}(k_\xi, \kappa) \frac{k^2}{k_\xi^2 + \kappa^2} I_{1qq'}(\kappa) d\kappa,$$

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\xi\eta}(k_\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P_{nn'}(k_\xi, \kappa) \frac{-k_\xi^2}{k_\xi^2 + \kappa^2} I_{1qq'}(\kappa) d\kappa,$$

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\xi\xi}(k_\xi) = \Gamma_{nn',qq'}^{\xi\xi}(k_\xi)$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty Q_{nn'}(k_\xi, \kappa) \frac{k_\xi}{\sqrt{k_\xi^2 + \kappa^2}} I_{2qq'}(\kappa) d\kappa,$$

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\xi\eta}(k_\xi) = \Gamma_{nn',qq'}^{\eta\xi}(k_\xi)$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty P_{nn'}(k_\xi, \kappa) \frac{k_\xi \kappa}{k_\xi^2 + \kappa^2} I_{2qq'}(\kappa) d\kappa,$$

$$\Gamma_{nn',qq'}^{\eta\eta}(k_\xi) = \Gamma_{nn',qq'}^{\eta\eta}(k_\xi)$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty Q_{nn'}(k_\xi, \kappa) \frac{\kappa}{\sqrt{k_\xi^2 + \kappa^2}} I_{2qq'}(\kappa) d\kappa.$$

Матричные элементы  $P_{nn'}(k_\xi, \kappa)$  и  $Q_{nn'}(k_\xi, \kappa)$  получаются заменой  $k_\xi$  на  $\sqrt{k_\xi^2 + \kappa^2}$  в соответствующих формулах работы [20]. Выражения для  $I_{1qq'}(\kappa)$  и  $I_{2qq'}(\kappa)$

выглядят следующим образом:

$$I1_{qq'}(\kappa) = \Phi_q(0)\Phi_{q'}(0)C2_q(\kappa)C2_{q'}(\kappa) + D_q D_{q'} C1_q(\kappa)C1_{q'}(\kappa),$$

$$I2_{qq'}(\kappa) = D_{q'}\Phi_q(0)C1_{q'}(\kappa)C2_q(\kappa) - D_q\Phi_{q'}(0)C1_q(\kappa)C2_{q'}(\kappa).$$

Выражения для  $C1_q(\kappa)$  и  $C2_q(\kappa)$  задаются следующим образом:

$$C1_q(\kappa) = \frac{2}{\kappa^2 - \kappa_{q'}^2} \times (\kappa \cos(\kappa w/2) \sin(\kappa_{q'} w/2) - \kappa_{q'} \sin(\kappa w/2) \cos(\kappa_{q'} w/2)),$$

$$C2_q(\kappa) = \frac{2}{\kappa^2 - \kappa_{q'}^2} \times (\kappa \sin(\kappa w/2) \cos(\kappa_{q'} w/2) - \kappa_{q'} \cos(\kappa w/2) \sin(\kappa_{q'} w/2)).$$

## Список литературы

- [1] M.P. Kostylev, A.A. Stashkevich, N.A. Sergeeva. Phys. Rev. B **69**, 064 408 (2004).
- [2] N.Yu. Grigorieva, B.A. Kalinikos, M.P. Kostylev, A.A. Stashkevich. In Ser.: Handbook of Artificial Materials. V. I / Ed. F. Capolino. Taylor and Francis Group, LLC., Oxford, UK (2009). P. 974.
- [3] G. Gubbiotti, S. Tacchi, M. Madami, G. Carlotti, A.O. Adeyeye, M. Kostylev. J. Phys. D: Appl. Phys. **43**, 264 003 (2010).
- [4] A.A. Serga, A.V. Chumak, B. Hillebrands. J. Phys. D **43**, 264 002 (2010).
- [5] A.B. Дроздовский, Б.А. Калиникос. Письма в ЖЭТФ **95** 7, 397 (2012).
- [6] S.-K. Kim, K.-S. Lee, D.-S. Han. Appl. Phys. Lett. **95**, 082 507 (2009).
- [7] A.V. Chumak, P. Pirro, A.A. Serga, M.P. Kostylev, R.L. Stamps, H. Schultheiss, K. Vogt, S.J. Hermsdoerfer, B. Laegel, P.A. Beck, B. Hillebrands. Appl. Phys. Lett. **95**, 262 508 (2009).
- [8] F. Ciubotaru, A.V. Chumak, N.Yu. Grigoryeva, A.A. Serga, B. Hillebrands. J. Phys. D **45**, 255 002 (2012).
- [9] S.O. Demokritov, B. Hillebrands, A.N. Slavin. Phys. Rep. **348**, 441 (2001).
- [10] C. Mathieu, V.T. Synogatch, C.E. Patton. Phys. Rev. B **67**, 104 402 (2003).
- [11] C. Bayer, J.P. Park, H. Wang, M. Yan, C.E. Campbell, P.A. Crowell. Phys. Rev. B **69**, 134 401 (2004).
- [12] P. Pirro, T. Bracher, K. Vogt, B. Obry, H. Schultheiss, B. Leven, B. Hillebrands. Phys. Status Solidi B **248**, 2404 (2011).
- [13] V.E. Demidov, S.O. Demokritov, K. Rott, P. Krzysteczko, G. Reiss, J. Phys. D **41**, 164 012 (2008).
- [14] Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures II. Series: Top. Appl. Phys. V. 87/Ed. B. Hillebrands, K. Ounadjela. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2003). 323 p.
- [15] M.P. Kostylev, G. Gubbiotti, J.-G. Hu, G. Carlotti, T. Ono, R.L. Stamps. Phys. Rev. B **76**, 054 422 (2007).
- [16] K.Y. Guslienko, A.N. Slavin. JMMM **323**, 2418 (2011).
- [17] K.Yu. Guslienko, S.O. Demokritov, B. Hilbrands, A.N. Slavin. Phys. Rev. B. **66**, 132 402 (2002).
- [18] M. Krawczyk. J. Magn. Magn. Mater. **322**, 562 (2010).
- [19] R.I. Joseph, E. Schlomann. J. Appl. Phys. **36**, 1579 (1965).
- [20] B.A. Kalinikos, A.N. Slavin, J. Phys. C **19**, 7013 (1986).
- [21] N. Grigoryeva, D. Popov, B. Kalinikos. EPJ Web Conf. **40**, 12004 (2013).