

01;04

Распределение потенциала и электрического поля в периодической цепочке заряженных плоскостей в плазме

© А.Е. Дубинов, А.А. Тренькин

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ экспериментальной
физики, Саров

Поступило в Редакцию 11 июля 2002 г.

Приведено теоретическое решение одномерной задачи распределения электрического поля между периодически расположенными в плазме заряженными плоскостями. Данное решение может служить моделью для описания упорядоченных структур в пылевой плазме.

Большой интерес представляет нахождение распределения электрического поля в пылевой плазме, когда частицы пыли образуют периодическую структуру. На первый взгляд может показаться, что задача решается просто, поскольку распределение поля вокруг отдельного заряда, помещенного в плазму, известно [1–3]. Однако пылевая плазма имеет существенную особенность. Частицы пыли в ней приобретают отрицательный электрический заряд, в результате чего происходит обеднение электронной концентрации плазмы. Возможность существования пылевой плазмы с пониженной электронной концентрацией показана в работе [4]. Необходимо отметить, что в масштабах, превосходящих расстояние между частицами пыли, условие квазинейтральности плазмы выполняется, поскольку сумма отрицательных зарядов электронов и частиц пыли равна положительному заряду ионов.

Сформулированная выше задача весьма сложна для двух- или трехмерного случая и численно решена только для двух частиц пыли [5], однако для пространства одного измерения она решается аналитически, если заменить частицы заряженными плоскостями. Модель заряженных плоскостей в плазме недавно использовалась в работе [6] для определения электрического поля. Однако в [6] плоскости заряжались положительно в результате эффекта Ричардсона, а эмитированные электроны ионизировали газ, в результате чего возникала избыточная

концентрация электронов. Положительно заряженные плоскости рассматривались также в работе [7].

В экспериментальной работе [8] измерялась сила взаимного притяжения двух пластин, помещенных в плазму тлеющего разряда. Пластины в плазме заряжались отрицательно. Это говорит о том, что решенная нами задача имеет не только методологическое, но и практическое значение.

Рассмотрим периодическую цепочку заряженных плоскостей, расположенных в термодинамически равновесной плазме с температурой T . Период цепочки обозначим L , а концентрацию электронов и ионов — n_e и n_i . Условие квазинейтральности запишем как

$$\int_{mL-\frac{L}{2}}^{mL+\frac{L}{2}} e(n_e - n_i)dz + \sigma = 0, \quad (1)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов на плоскости, $e = -|e|$ — заряд электрона и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Удобно записать это уравнение, используя усреднение по периоду цепочки:

$$e\langle n_e \rangle L - e\langle n_i \rangle L + \sigma = 0. \quad (2)$$

Распределение электростатического потенциала находим из одномерного уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -4\pi e [n_e - n_i - L(\langle n_e \rangle - \langle n_i \rangle)\delta(z - mL)] \quad (3)$$

с граничными условиями

$$E = -\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=mL} = 2\pi\sigma = -2\pi e L(\langle n_e \rangle - \langle n_i \rangle); \quad (4)$$

$$E = -\left. \frac{d\varphi}{dz} \right|_{z=mL+\frac{L}{2}} = 0, \quad (5)$$

где $\delta(\dots)$ — дельта-функция Дирака. Второе граничное условие следует из симметрии задачи.

Предположим также, что электронная и ионная концентрации удовлетворяют распределению Больцмана. Приближенно будем иметь

$$n_{i,e} = n_{i,e}^0 \exp\left(\pm \frac{e\varphi}{kT}\right) \approx n_{i,e}^0 \left(1 \pm \frac{e\varphi}{kT}\right), \quad (6)$$

где k — постоянная Больцмана. Тогда уравнение (3) может быть представлено как

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{\varphi}{\lambda_D^2} + f(z), \quad (7)$$

где

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2(n_e^0 + n_i^0)}}$$

и

$$f(z) = 4\pi e(n_i^0 - n_e^0) + 4\pi eL(\langle n_e \rangle - \langle n_i \rangle)\delta(z - mL).$$

Решение данной краевой задачи, включающей в себя неоднородное дифференциальное уравнение, ищем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_{nu}. \quad (8)$$

Общее решение хорошо известно и представляет собой сумму экспоненциальных функций с константами интегрирования c_1 и c_2 :

$$\varphi_h = c_1 \exp\left(\frac{z}{\lambda_D}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{z}{\lambda_D}\right). \quad (9)$$

Частное решение может быть представлено в форме интеграла

$$\varphi_{nu} = \int_{mL}^z G(z, z') f(z') dz' \quad (10)$$

с функцией Грина в виде

$$G(z, z') = \frac{\lambda_D}{2} \left[\exp\left(\frac{z - z'}{\lambda_D}\right) - \exp\left(-\frac{z - z'}{\lambda_D}\right) \right]. \quad (11)$$

После интегрирования в (10) получаем

$$\varphi_{mi} = 4\pi e\lambda_D \left\{ \lambda_D (n_i^0 - n_e^0) \left[\cosh\left(\frac{z - mL}{\lambda_D}\right) - 1 \right] - L(\langle n_i \rangle - \langle n_e \rangle) \sinh\left(\frac{z - mL}{\lambda_D}\right) \right\}. \quad (12)$$

Теперь необходимо определить постоянные интегрирования c_1 и c_2 так, чтобы полученное решение (8) удовлетворяло граничным условиям (4) и (5). Эти условия сводятся к двум алгебраическим уравнениям относительно c_1 и c_2 . Решая их, получаем:

$$c_{1,2} = \pi e\lambda_D^2 \frac{\exp(\mp \frac{mL}{\lambda_D})}{\sinh(\frac{L}{2\lambda_D})} \left\{ 2 \left[\frac{L}{\lambda_D} (\langle n_i \rangle - \langle n_e \rangle) \cosh\left(\frac{L}{2\lambda_D}\right) - (n_i^0 - n_e^0) \sinh\left(\frac{L}{2\lambda_D}\right) \right] - \frac{L}{\lambda_D} (\langle n_i \rangle - \langle n_e \rangle) \exp\left(\mp \frac{L}{2\lambda_D}\right) \right\}. \quad (13)$$

Таким образом, выражения (9), (12) и (13) представляют собой решение поставленной задачи. Продемонстрируем численным примером форму полученного решения. Для этого введем обозначения

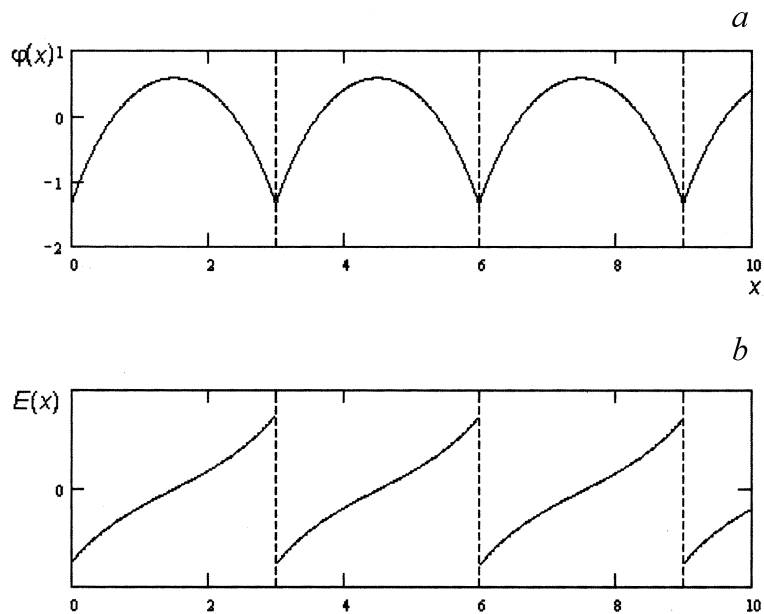
$$\eta = \frac{n_i^0 - n_e^0}{n_e}; \quad x = \frac{z}{\lambda_D}; \quad \delta = \frac{L}{\lambda_D}$$

и предположим, что концентрации электронов и ионов не сильно отклоняются от средних значений: $n_{e,i}^0 \approx \langle n_{e,i} \rangle$. Тогда решение примет форму, удобную для построения графиков:

$$\varphi(x) = 2\pi e\lambda_D^2 n_e \eta \left[2\delta \cosh(x - m\delta) \coth(\delta/2) - \delta \frac{\cosh(x - \delta(m + 1/2))}{\sinh(\delta/2)} - 2(1 + \delta \sinh(x - m\delta)) \right].$$

Типичные графики пространственного распределения потенциала и напряженности электрического поля представлены на рисунке.

В заключение обратим внимание на тот факт, что мы рассматривали простейший случай термодинамического равновесия. Однако



полученное решение легко обобщить на случай, когда $T_e \neq T_i$, что более типично для экспериментальных условий. Для этого всего лишь необходимо использовать следующую форму записи дебаевского радиуса:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT_e T_i}{4\pi e^2 (n_e^0 T_i + n_i^0 T_e)}}. \quad (14)$$

Работа одного из нас (А.Е.Д.) выполнялась по гранту NWO # 0.47–008–013.

Список литературы

- [1] Lin C., Zhang X.-L. // J. Phys. Soc. Jap. 1995. V. 64. N 10. P. 3767–3769.
- [2] Shivamoggi B.K. // J. Math. Phys. 1996. V. 37. N 1. P. 254–262.
- [3] Das S.K., Janaki M.S., Dasgupta B. // J. Math. Phys. 1997. V. 38. N 11. P. 5707–5710.

- [4] *Цытович В.Н.* // УФН. 1997. Т. 167. № 1. С. 57–99.
- [5] *Choi S.J., Kushner M.J.* // J. Appl. Phys. 1994. V. 75. N 1. P. 3351–3357.
- [6] *Яковленко С.И.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 9. С. 83–94.
- [7] *Чукбар К.В.* // Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 5. С. 455–458.
- [8] *Дубинов А.Е., Жданов В.С., Игнатов А.М.* и др. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 13. С. 73–80.