01;03

Равновесная форма капли во взаимно перпендикулярных электрическом и гидродинамическом полях

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 13 мая 2002 г.

На основе анализа условия баланса давлений на поверхности капли идеальной несжимаемой жидкости, ламинарно обтекаемой идеальной несжимаемой средой, движущейся перпендикулярно внешнему однородному электростатическому полю, найдено, что в линейном по амплитуде деформации приближении равновесная форма капли является трехосным эллипсоидом.

Явление неустойчивости поверхности капли во внешних силовых полях представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике и технической физике [1]. Но большая часть исследований по этому вопросу связана с интересом к элементарным процессам внутри грозового облака в связи с неисследованностью физического механизма инициации разряда молнии. Исследование устойчивости капли по отношению к постоянным и переменным собственному и поляризационному зарядам приводит к нереально высоким значениям собственных зарядов и внешних электрических полей, при которых возможно зажигание коронного разряда в окрестности капли и инициирование разряда молнии [1–3]. Учет гидродинамического ламинарного обтекания капли потоком газа, коллинеарным внешнему электростатическому полю, приводит лишь к уменьшению величины эксцентриситета ее равновесной в электростатическом поле сфероидальной формы [4,5]. Наличие у капли собственного электрического заряда этой тенденции не меняет [6]. Тем не менее существует неисследованная возможность снижения критических условий реализации неустойчивости капли: гидродинамическая деформация к трехосному эллипсоиду, когда внешнее электростатическое поле и обтекающий каплю гидродинамический поток не коллинеарны [7].

В связи со сказанным найдем равновесную форму капли идеальной несжимаемой жидкости, обдуваемой со скоростью $\mathbf{U}$ ламинарным потоком газа плотностью ρ, направленным перпендикулярно внешнему однородному электростатическому полю: $\mathbf{U} \perp \mathbf{E}_0$. Введем декартову систему координат с началом в центре капли, в которой вектор $\mathbf{E}_0$ ориентирован вдоль орта $\mathbf{n}_z$, а вектор $\mathbf{U}$ — вдоль орта $\mathbf{n}_x$. Примем, что скорость потока U много меньше скорости звука в газе и будем моделировать газ идеальной несжимаемой жидкостью.

Сферическая форма и радиус R изолированной капли идеальной несжимаемой жидкости при $E_0 = 0$, $U = 0$ легко находятся из условия баланса давлений на ее поверхности:

$$\frac{2\sigma}{R} = \Delta p,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, Δp – перепад постоянных давлений в капле и среде.

Пусть теперь $E_0 \neq 0$, $U \neq 0$. Тогда равновесная форма капли будет уже не сферической. Новую равновесную форму капли в сферической системе координат с началом в центре капли, в которой угол θ отсчитывается от направления поля $\mathbf{E}$, а угол φ — от направления скорости потока $\mathbf{U}$, представим в виде

$$r(\theta, \varphi) = R + h(\theta, \varphi) \equiv R + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} A_n^m \cdot Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{1}$$

В выражении (1) $Y_n^m(\theta, \varphi)$ — ненормированные сферические функции; A_n^m — амплитуды отдельных мод; $\mu \equiv \cos(\theta)$; $h(\theta, \varphi)$ — искажение сферической поверхности капли. Будем искать возмущение сферической поверхности $h(\theta)$ (амплитуды возмущенных мод A_n^m) опять же из условия баланса давлений на равновесной поверхности капли:

$$p_\sigma = \Delta p + p_E + p_U, \tag{2}$$

определяя слагаемые, стоящие в правой части (2), на исходной сферической поверхности, а лапласовское давление p_σ, стоящее в левой части (2), на виртуально возмущенной сферической поверхности. Согласно сказанному, p_E — электростатическое давление поля поляризационного заряда на поверхность сферической капли; p_U —

аэродинамическое давление на поверхность сферической капли со стороны обдувающего ее ламинарного потока газа.

Будем искать амплитуды мод A_n^m, которые возбудятся в результате взаимодействия свободной поверхности капли с электрическим и аэродинамическим полями в ее окрестности. Согласно [5,8,9], выпишем выражения для давлений на виртуально искаженную сферическую поверхность капли p_σ, p_E и p_U в виде разложений по сферическим функциям:

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \big[2 - n(n+1)\big] A_n^m \cdot Y_n^m(\theta, \varphi); \tag{3}$$

$$p_E = \frac{3E_0^2}{8\pi} \big[Y_0^0(\theta, \varphi) + 2Y_2^0(\theta, \varphi)\big]; \tag{4}$$

$$p_U = \frac{9}{8} \rho U^2 \left[\frac{2}{3} Y_0^0(\theta, \varphi) + \frac{1}{3} Y_2^0(\theta, \varphi) - \frac{1}{6} Y_2^{-2}(\theta, \varphi)\right]. \tag{5}$$

Подставим (3)–(5) в (2) и, приравнивая коэффициенты при сферических функциях разного порядка, найдем амплитуды возбудившихся мод. Несложно видеть из (4)–(5), что могут возбудиться лишь три моды: $\sim Y_0^0(\theta, \varphi)$, $Y_2^0(\theta, \varphi)$ и $\sim Y_2^2(\theta, \varphi)$. Амплитуды возбудившихся мод легко рассчитываются, но в амплитуду моды: $\sim Y_0^0(\theta, \varphi)$ входит неизвестный перепад постоянных давлений δp и поэтому A_0^0 удобнее рассчитать через A_2^0 и A_2^{-2} на основе условия постоянства объема капли несжимаемой жидкости. Для A_2^0 и A_2^{-2} получим соотношения:

$$\frac{A_2^0}{R} = \frac{3}{16\pi}\,\omega + \frac{3}{32}\,We; \qquad \frac{A_2^{-2}}{R} = -\frac{3}{64}\,We; \tag{6}$$

$$w = E_0^2 R \sigma^{-1}; \qquad We = \rho U^2 R \sigma^{-1}.$$

Параметр w характеризует устойчивость капли по отношению к индуцированному заряду и его критическое значение, при достижении которого капля становится неустойчивой, равно ≈ 2.6 [10]. We — число Вебера для сферы в потоке газа плотностью ρ.

Выражение для амплитуды A_0^0, рассчитанное из условия постоянства объема, оказывается квадратичным по амплитудам A_2^0 и A_2^{-2}, и при расчетах в линейном по амплитуде деформации приближение учитываться не должно.

Уравнение поверхности трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

во введенной выше сферической системе координат с началом в центре сфероида в приближении линейном по квадратам эксцентриситетов e и e_0

$$e^2=1-\frac{b^2}{c^2},\quad e_0^2=1-\frac{b^2}{a^2} \tag{7}$$

эллипсов, получающихся при сечении трехосного эллипсоида плоскостями $x=0$ и $z=0$ декартовой системы координат имеет вид:

$$\frac{r(\theta)}{b}=\left\{\left[1+\frac{1}{6}e^2+\frac{1}{6}e_0^2\right]Y_0^0(\theta,\varphi)+\left[\frac{1}{3}e^2-\frac{1}{6}e_0^2\right]Y_2^0(\theta,\varphi)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12}e_0^2Y_2^{-2}(\theta,\varphi)+O(e^4,e_0^4)\right\},\quad e^2\ll 1,\quad e_0^2\ll 1. \tag{8}$$

Сравнивая найденные выражения для амплитуд A_2^0 и A_0^{-2} (6) с коэффициентами при $Y_2^0(\theta,\varphi)$ и $Y_2^{-2}(\theta,\varphi)$ в выражении (8), несложно видеть, что фигура, к которой деформируется исходная сферическая капля, является трехосным эллипсоидом, у которого

$$e^2=\frac{9}{16\pi}\,\omega,\qquad e_0^2=-\frac{9}{16}\,We.$$

Трехосный эллипсоид, характеризуемый такими значениями эксцентриситетов e и e_0, в соответствии с (7) вытянут вдоль оси OZ и сплюснут вдоль оси OX. При отсутствии гидродинамического потока капля принимает сфероидальную форму с эксцентриситетом e.

Естественно задаться вопросом, как скажется на устойчивости капли по отношению к внешнему электростатическому полю появление гидродинамического потока, деформирующего сфероидальную в $\mathbf{E}_0$ форму капли к трехосному эллипсоиду. Ответ на такой вопрос требует специального исследования, но известно [7], что устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида, снижается по сравнению с каплей, имеющей сфероидальную форму. В этой связи можно предполагать, что если кроме внешних электрических и гидродинамических полей на поверхность капли действует и электростатическое давление собственного заряда, то деформация ее формы к трехосному сфероиду приведет к снижению критических условий реализации ее неустойчивости по отноешению к суперпозиции собственного и индуцированного зарядов.

З а к л ю ч е н и е. Равновесная форма капли идеальной несжимаемой жидкости во внешнем однородном электростатическом поле и перпендикулярном к нему ламинарном гидродинамическом потоке является трехмерным эллипсоидом, вытянутым вдоль электрического поля и сплюснутым вдоль направления обтекающего потока.

Список литературы

[1] *Григорьев А.В., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Дячук В.А., Мучник В.М.* // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
[3] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
[4] *Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 5. С. 12–17.
[5] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 7. С. 41–47.
[6] *Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 12. С. 91–95.
[7] *Григорьев А.И., Щукин С.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. В. 11. С. 48–51.
[8] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. В. 9. С. 1863–1866.
[9] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз. 1963. 584 с.
[10] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383–397.