01;02

К теории упругого рассеяния электромагнитных волн на атомах

© С.О. Гладков

Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва
E-mail: SGlad@newmail.ru

В окончательной редакции 18 января 2002 г.

С помощью инвариантной теории возмущений получен гамильтониан упругого взаимодействия электромагнитного излучения (ЭМИ) с атомом в пределе, когда длина волны ЭМИ λ значительно превышает линейный размер атома a_0. Найдено точное выражение для амплитуды этого процесса и вычислена вероятность рассеяния ЭМИ на атоме.

Показано, что при больших длинах волн вероятность рассеяния пропорциональна квадрату частоты монохроматического излучения.

Доказано, что в пределе больших длин волн формула для расчета коэффициента экстинкции $h \sim (\omega/c)^4 v_0$ становится не применимой и начинает „работать" зависимость $h = A\omega^2$, где A — некоторый вполне определенный коэффициент.

Проблеме исследования взаимодействия вещества с электромагнитным излучением посвящено большое количество как оригинальных работ, так и монографий. Наиболее близки к задаче, которую будем решать мы и изложению которой посвящена настоящая работа, является материал, отраженный в монографии [1] и статьях [2–8]. В них изучались различные аспекты воздействия сильных электромагнитных полей, вызывающих внутренние энергетические переходы в атомах. Такие процессы обычно называются неупругими, хотя с точки зрения фотона, если его волновой вектор при рассеянии сохраняется, этот процесс можно характеризовать и как упругий.

Мы рассмотрим задачу упругого рассеяния фотона на атоме, не сопровождающегося внутренними переходами в нем. В принципе, эта задача может показаться весьма сходной с изучением рассеяния света на мелкодисперсной фазе, когда длина волны монохроматического источника λ значительно превышает линейный размер частицы d.

Качественно обе задачи похожи. В количественном же отношении между ними имеется весьма существенное отличие. Дело в том, что при увеличении длины волны рассеивающегося излучения начинает „работать" механизм взаимодействия между атомом и ЭМИ через коротковолновые фотоны из далекой ультрафиолетовой области. Вычисления показывают, что при этом вероятность рассеяния оказывается пропорциональной квадрату частоты падающего фотона ω. В этой связи уместно напомнить, что при рассеянии света на макроскопических частицах соответствующая вероятность (в качестве характеристики здесь вводится коэффициент экстинкции h, связь которого с частотой рассеяния $1/\tau$ есть просто произведение hc, где c — скорость света) пропорциональна ω^4. Такое сильное отличие объясняется чисто электромагнитной природой связи ЭМИ с атомом и обусловлено обменом быстрыми фотонами между атомом и длинноволновыми электромагнитными квантами. Природа обоих типов рассеяния качественно различна: при вычислении коэффициента экстинкции микроскопическая структура частицы, на которой происходит рассеяние, игнорируется и в итоге появляется четвертая степень частоты, а при точном учете взаимодействия атома с ЭМИ, как проделано далее, принимается во внимание внутренняя структура рассеивающей частицы.

Решение поставленной задачи мы будем осуществлять благодаря методу инвариантной теории возмущений и для начала введем взаимодействие между атомом и полем в следующем виде:

$$H_{int} = -(1/c) \int \mathbf{j}\,\mathbf{A}\, d^3x, \tag{1}$$

где плотность тока в атоме есть (см. [9])

$$\mathbf{j} = -(ie\hbar/2m)(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*), \tag{2}$$

e — заряд электрона, m — его масса, а $\psi = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_Z)$ — волновая функция атома, Z — число электронов в атоме (атомный номер).

Операторную волновую функцию фотона введем по формуле

$$\mathbf{A} = (2\pi\hbar c/V)^{1/2} \sum_{\mathbf{k},\alpha} \mathbf{e}_\alpha k^{-1/2} \big(c^+_{\mathbf{k},\alpha} e^{-i\omega t} + c_{-\mathbf{k}\alpha} e^{i\omega t}\big) e^{i\mathbf{kx}}, \tag{3}$$

где $\mathbf{e}_\alpha$ — вектор поляризации фотона; $\omega = ck$ — его частота (закон дисперсии); c — скорость света в вакууме; V — объем пространства, в котором существует фотон; $c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}(c_{-\mathbf{k}\alpha})$ — оператор рождения (уничтожения) фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}_\alpha$.

Разобьем оператор $\mathbf{A}$ на две части

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{A}_0 = (2\pi\hbar c/V)^{1/2} \sum_{0 \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{q}/\mathbf{b}} \mathbf{e}_\alpha k^{-1/2}\big(c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} e^{-i\omega t} + c_{-\mathbf{k}\alpha} e^{i\omega t}\big) e^{i\mathbf{kx}}, \tag{5}$$

$$\mathbf{A}_1 = (2\pi\hbar c/V)^{1/2} \sum_{q/b \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{q}} \mathbf{e}_\alpha k^{-1/2}\big(c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{-i\omega t} + c_{-\mathbf{k}\alpha} e^{i\omega t}\big) e^{i\mathbf{kx}}, \tag{6}$$

где q — предельный волновой вектор фотона по электромагнитной шкале; его можно положить равным приблизительно $10^{13}\,\mathrm{cm}^{-1}$, а b — число, большее единицы.

Зная взаимодействие (1), запишем S-матрицу в виде [10]:

$$S = T\exp\left\{-i\int H_{int}(t)\,dt\right\}, \tag{7}$$

здесь T — оператор хронологического упорядочения операторов по времени, начиная с наибольшего.

Очевидно, что изучаемый нами эффект сможет проявиться только в четвертом порядке теории возмущений, поэтому, разлагая выражение (7) до слагаемых порядка H^4_{int}, имеем

$$S^{(4)} = (1/4!)T \iiiint H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)H_{int}(t_3)H_{int}(t_4) \prod_{s=1}^{4} dt_s. \tag{8}$$

Искомое же взаимодействие определим формулой

$$V = -i\hbar \lim_{t\to\infty}(S^{(4)}/t). \tag{9}$$

Подставляя в (8) взаимодействие (1) и выражения (5) и (6) с учетом лишь парных операторов $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, находим

$$S^{(4)} = (1/4c^4\hbar^4)T \int \Pi dt_s \int \Pi d^3x_s\, j_i(\mathbf{x}_1) j_k(\mathbf{x}_2) j_l(\mathbf{x}_3) j_n(\mathbf{x}_4)$$
$$\times A_{0i}(\mathbf{x}_1, t_1) A_{0k}(\mathbf{x}_2, t_2) A_{1l}(\mathbf{x}_3, t_3) A_{1n}(\mathbf{x}_4, t_4), \tag{10}$$

где $i, k, l, n = 1, 2, 3$, а под повторяющимся индексом подразумевается суммирование. При получении этого выражения было учтено, что существует шесть одинаковых слагаемых и потому 4! заменено просто на 4.

Усредним $S^{(4)}$ по „быстрой“ фотонной подсистеме и далее воспользуемся выражением (6). Вначале возникает функция Грина для фотонов, а именно

$$D_{ln}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t_3, t_4) = \langle T|A_{1l}(\mathbf{x}_3, t_3)A_{1n}(\mathbf{x}_4, t_4)|\rangle, \tag{11}$$

где угловые скобки соответствуют усреднению по основному состоянию коротковолновых фотонов.

Подставив сюда выражение (6), находим

$$D_{ln}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t_3, t_4) = (2\pi\hbar c/V)\sum e'_{l\alpha}e''_{n\alpha}(k_3k_4)^{-1/2}\exp(i\mathbf{k}_3\mathbf{x}_3 - i\mathbf{k}_4\mathbf{x}_4)$$
$$\times\big[\langle T|c^+(k_3, t_3)c(k_4, t_4)|\rangle + \langle T|c(k_4, t_4)c^+(k_3, t_3)|\rangle\big]. \tag{12}$$

Поскольку операторы $c_k^+(t)$ и $c_k(t)$ берутся в представлении взаимодействия, то $c_k^+(t) = c_k^+e^{-i\omega t}$, $c_k(t) = c_k e^{i\omega t}$ и отличное от нуля значение функции D_{ln} достигается лишь при $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4$ и $\mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}''_\alpha$. При этом следует учесть, что $\langle|c_k^+c_k|\rangle = 0$, а $\langle|c_kc_k^+|\rangle = 1$. В итоге после усреднения выражения (12) по направлениям поляризации, что даст множитель $\langle e_{l\alpha}e_{n\alpha}\rangle = \delta_{ln}/3$, получаем промежуточный результат

$$D_{ln}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, t_3, t_4) = (2\pi\hbar c/3V)\delta_{ln}\sum_{q/b\leqslant k\leqslant q} k_3^{-1}\exp\big[i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4)-i\omega_3(t_3-t_4)\big]. \tag{13}$$

Согласно выражению (10), нам следует теперь выполнить интегрирование по t_3 и t_4. Чтобы это сделать, введем новые переменные $t = 1/2(t_3 + t_4)$, $\tau = t_3 - t_4$. Тогда

$$\int_0^\infty dt_3\int_0^\infty dt_4\exp\big[-i\omega_3(t_3 - t_4)\big] = \int_0^t dt\int_0^\infty d\tau\,\exp(-i\omega_3\tau) = t/i\omega_3$$

и, согласно (9), искомое взаимодействие после взятия интегралов по t_1 и t_2 (что даст дробь $1/\omega_1\omega_2$) будем иметь вид

$$V = -(\pi^2/3c^5V^2\hbar)\sum_{0\leqslant k',\,k''\leqslant q/b} e'_ie''_jc^+_{k'}c_{k''}(k'k'')^{-3/2}\sum_{q/b\leqslant k_3\leqslant q} f(k_1, k_2, k_3)/k_3^2, \tag{14}$$

где функция

$$f(k_1,k_2,k_3)=\int \Pi\, d^3x_s\, j_{1i}\, j_{2s}\, j_{3l}\, j_{4l} \exp\{i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4)+i\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1-i\mathbf{k}_2\mathbf{x}_2\}. \tag{15}$$

В силу того что интегрирование в формуле (15) осуществляется по области локализации атомной волновой функции, линейный размер которой порядка атомного размера a_0, а значения волновых векторов k_3 велики, то $\exp\{i\mathbf{k}_3(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4)\}$ является быстроосциллирующим множителем. Однако при интегрировании по областям d^3x_1 и d^3x_2 благодаря условию $|k_1|$, $|k_2|<q/b$, мы имеем право считать, что $\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{x}_1-i\mathbf{k}_2\mathbf{x}_2)\approx 1$. Сказанное означает, что функция f после подстановки в нее выражения (2) становится следующей:

$$f(k_1,k_2,k_3)\approx f(k_3)=(e\hbar/2m)^4\left[\int(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)d^3\mathbf{x}\right]^2$$

$$\times\left|\int(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\exp(i\mathbf{k}_3\mathbf{x})d^3\mathbf{x}\right|^2. \tag{16}$$

Чтобы оценить выражение (16), прежде всего следует напомнить, что волновая функция атома содержит Z электронов и интегрирование проводится по всему конфигурационному пространству атома. Это означает, что $d^3\mathbf{x}=\Pi\, d^3x_s$, где $s\in[1,Z]$. Следовательно,

$$\int(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)d^3\mathbf{x}=\int\sum\big[\psi^*(\{\mathbf{x}_i\})\nabla_i\psi(\{\mathbf{x}_i\})$$

$$-\psi(\{\mathbf{x}_i\})\nabla_i\psi^*(\{\mathbf{x}_i\})\big]\Pi\, d^3x_s, \tag{17}$$

где $\{\mathbf{x}_i\}=\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\ldots,\mathbf{x}_Z$.

По смыслу выражения (17) мы можем положить, что средний импульс электронов в атоме есть $\langle|\mathbf{P}|\rangle=\hbar|\int(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)d^3\mathbf{x}|$, где $\mathbf{P}=\sum\mathbf{p}_s$.

Квадрат же среднего значения импульса можно приблизительно приравнять к среднему значению энергии атома $\langle E\rangle$, умноженной на $2m$. Обозначив тогда выражение $|\int(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)d^3\mathbf{x}|^2$ через $8m\langle E\rangle/\hbar^2$, находим

$$V=\frac{\pi^2\langle E\rangle e^4\hbar}{6m^3c^5V^2a_0^2}\sum_{q/b\leqslant k_3\leqslant q}\frac{F(k_3)}{k_3^2}\sum_{0\leqslant k',\,k''\leqslant q/b}\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}''c^+_{k'}c_{k''}}{(k'k'')^{3/2}}, \tag{18}$$

где новая безразмерная функция определена выражением $F(k) = a_0^2|\int(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\exp(i\mathbf{k}_3\mathbf{x})d^3\mathbf{x}|^2$.

Формулу (18) удобно записывать не в виде суммы по волновым векторам, а в виде интегралов по „k“, если ввести плотность состояний фотонов. Действительно, заменив $\sum(\ldots)$ интегралом $V\int(\ldots)d^3k/(2\pi)^3 = (V/2\pi^2)\int(\ldots)k^2dk$, находим

$$V = -\frac{\langle E\rangle e^4\hbar}{24\pi^2m^3c^5a_0^2}\sum_{q/b\leqslant k_3\leqslant q}\frac{F(k_3)}{k_3^2}\iint\varphi(k',k'')c_{k'}^+c_{k''}dk'dk'', \tag{19}$$

где функция

$$\varphi(k',k'') = \mathbf{e}'\mathbf{e}''(k'k'')^{1/2}. \tag{20}$$

Последнее, что нам осталось сделать, это оценить сумму по k_3. Здесь очень удобно перейти от суммирования по k_3 к интегрированию по энергиям выскочастотных фотонов и ввести их плотность состояний по энергиям, т. е. положить $\sum(\ldots) = (2\pi/\Delta E)\int(\ldots)d\varepsilon_3/2\pi$, где ΔE — некоторый разброс энергий, а $d\varepsilon_3 = \hbar c dk_3$. В результате оказывается, что

$$\sum F(k_3)/k_3^2 = 2\pi\left[(\hbar c)^2/\Delta E\right]\iiint\left[F(\varepsilon_3,\mathbf{n})/\varepsilon_3^2\right](d\varepsilon_3/2\pi)(dO/4\pi),$$

где dO — элемент телесного угла, равный, как обычно, произведению $\sin\theta d\theta d\varphi$.

Вводя среднее значение функции F по угловым переменным, а именно $\langle F(\varepsilon_3)\rangle = (1/4\pi)\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(\varepsilon_3,\mathbf{n})dO$, учитывая (20), выражение (19) можно представить в виде

$$V = \iint\phi(\varepsilon',\varepsilon'')c_{\varepsilon'}^+c_{\varepsilon''}d\varepsilon'd\varepsilon''/(2\pi)^2, \tag{21}$$

где амплитуда упругого рассеяния низкочастотного электромагнитного излучения на атоме в диапазоне длин волн $\lambda \gg a_0$ есть

$$\phi(\varepsilon',\varepsilon'') = -\frac{4\pi^3\langle E\rangle e^4(\mathbf{e}'\mathbf{e}'')(\varepsilon'\varepsilon'')^{1/2}R(q)}{3m^3c^6a_0^2\Delta E}, \tag{22}$$

где функция

$$R(q) = \int\limits_{\hbar cq/b}^{\hbar cq}\langle F(\varepsilon)\rangle(d\varepsilon/2\pi\varepsilon^2). \tag{23}$$

Первая часть задачи решена: гамильтониан взаимодействия низкочастотного ЭМИ с атомом имеет вид (21).

Оценим теперь вероятность рассеяния в единицу времени потока фотонов ансамблем атомов некоторой разряженной среды. Будем предполагать, что расстояния между атомами велики по сравнению с длиной свободного пробега фотона, а рассеяние происходит независимо на каждом атоме (интерференция отсутствует). Для вычисления зависимости $1/\tau(\varepsilon)$ удобно поступить следующим образом. Обозначим плотность состояний по энергиям как $\nu(\varepsilon)$, тогда выражение (22) переписывается в виде суммы по ε' и ε''. Действительно,

$$V = \sum \phi(\varepsilon', \varepsilon'')/\nu(\varepsilon')\nu(\varepsilon'')c^+_{\varepsilon'}c_{\varepsilon''}. \tag{24}$$

Если теперь ввести функцию распределения ансамбля фотонов, определив ее как $f_\varepsilon = \langle c^+_\varepsilon c_\varepsilon \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по неравновесному состоянию фотонов, интеграл столкновений в борновском приближении можно записать в виде (см. к примеру монографии [11–15]): $L\{f_\varepsilon\} = (2\pi/\hbar)\sum \overline{|\phi(\varepsilon, \varepsilon')|}^2/\nu^2(\varepsilon')\nu^2(\varepsilon)(f_{\varepsilon'} - f_\varepsilon)\delta(\varepsilon - \varepsilon')$, где черта сверху означает усреднение по направлениям поляризаций фотона, а суммирование ведется по виртуальным состояниям ε'. Отсюда немедленно следует, что искомое время релаксации легко оценить по формуле

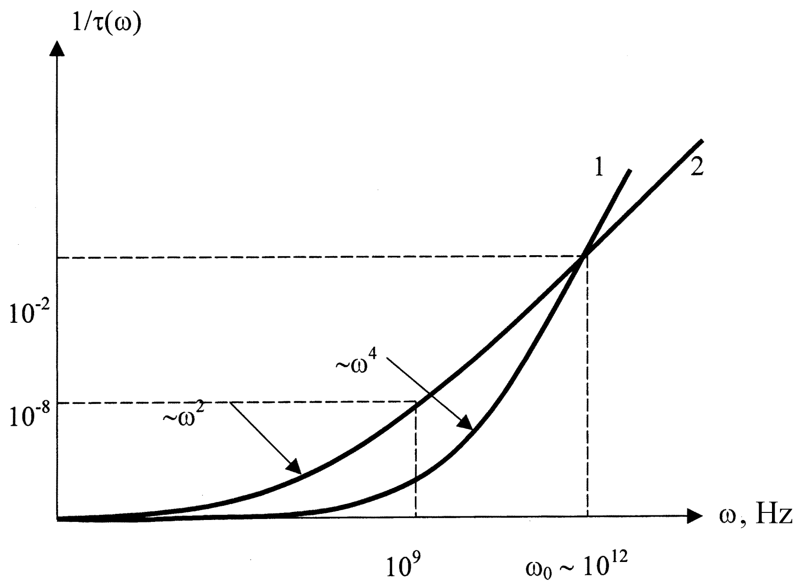
$$1/\tau(\varepsilon) = (2\pi/\hbar)\sum |\phi(\varepsilon, \varepsilon')|^2/\nu^2(\varepsilon')\nu^2(\varepsilon)\delta(\varepsilon - \varepsilon'). \tag{25}$$

Переходя здесь снова к интегрированию по ε', используя правило $\sum(\ldots) = \int \nu(\varepsilon)(\ldots)d\varepsilon/2\pi$, после элементарного интегрирования и подстановки явного выражения для амплитуды рассеяния (22) находим окончательно

$$1/\tau(\varepsilon) = (4\pi^3/9)^2(e^2/a_0mc^2)^4(\langle E\rangle/mc^2)^2\varepsilon^2R(q)/\Delta E^2\nu^3(\varepsilon)\hbar^3. \tag{26}$$

Для оценки времени $\tau(\varepsilon)$ положим $F(\varepsilon) \approx 2\pi$, а $R(q) \approx b/\hbar cq$ (здесь было использовано условие $b \gg 1$). Тогда, если плотность состояний низкочастотных фотонов равна плотности состояний высокочастотных, т. е. $\nu(\varepsilon) = 1/\Delta E$, а $\varepsilon = \hbar\omega$, получаем окончательно

$$1/\tau(\omega) = b^2(4\pi^3/9)^2(e^2/a_0mc^2)^4(\langle E\rangle/mc^2)^2(\omega/cq)^2(\Delta E/\hbar). \tag{27}$$



Схематическое изображение частотной зависимости обратного времени рассеяния. *1* — закон Рэлея, *2* — предсказанная в статье возможная зависимость обратного времени рассеяния от частоты монохроматического излучения в диапазоне весьма малых частот (по шкале длин волн это соответствует диапазону примерно в сотни и более метров). Частота $\omega_0 = (Ac/v)^{1/2}$ и о ней подробно говорится в тексте.

Положим $\omega = 10^{12}$ (1/s), $b = 10^5$, $\Delta E = \hbar cq/b = 10^{-9}$ erg, $a_0 = 10^{-8}$ cm, $q = 10^{13}$ (1/cm), $\langle E \rangle = Z^2 me^4/\hbar^2 = 10^{-9}$ erg. В итоге $1/\tau(\omega) = 10^{-2}$ (1/s) (заметим, что h на этой частоте будет еще меньше!). Как и ожидалось, приведенное время свидетельствует о довольно слабом рассеянии монохроматических фотонов на атомах. Приведенная оценка кажется вполне разумной, если вспомнить известный факт приема радиосигналов из космоса от удаленных на огромные расстояния источников излучений.

Если оценить зависимость коэффициента экстинкции от частоты ЭМИ, то в соответствии с формулой (см. [16]) $h = zv(\omega/c)^4$, где v — объем рассеивающей частицы, z — численный множитель, можно сделать вывод о преобладании механизма (26)–(27) в области радиочастот и сверхвысоких частот (СВЧ) над механизмом h (напомним в этой связи, что связь коэффициента экстинкции с временем релаксации τ элементарна: $h = 1/c\tau$); это утверждение не нуждается в детальной оценке ввиду его очевидности.

Итак, мы убедились, что в диапазоне низких частот будет выполняться неравенство $1/\tau(\omega) > 1/\tau = hc$. Заметим, что приведенное неравенство начинает „работать“ уже при частотах $\omega < (Ac/v)^{1/2}$, где $A = b^2(4\pi^3/9)^2(e^2/a_0mc^2)^4(\langle E\rangle/mc^2)^2\ (\Delta E/q^2\hbar)$, что и соответствует диапазону СВЧ и ниже. Если рассеивающая частица сферическая, то ее объем есть $v_0 = (4\pi/3)a_0^3$ и легко получить частоту „пересечения“ обратных времен. Эта частота есть

$$\omega_0 = b(4\pi^3/3)\big(Z^2e^2/mc^2a_0\big)^2\big(\langle E\rangle/mc^2\big)\big(3\Delta Ec/\hbar q^2a_0^3\big)^{1/2}. \qquad (28)$$

Для приведенных выше численных значений параметров оказывается, что частота $\omega_0 \approx 10^{12}$ (1/s). Рисунок иллюстрирует качественное и количественное отличие механизмов рассеяния Рэлея и предсказанного в настоящей работе.

В качестве основного вывода отметим, что существует предел применимости формулы для коэффициента экстинкции до определенного порога частот, ниже которого рассеяние будет описываться зависимостью (27), пропорциональной не ω^4, а ω^2.

Список литературы

[1] *Делоне Н.Б., Крайнов В.П.* Атом в сильном световом поле. М.: Энергоатомиздат, 1984. 224 с.
[2] *Бункин Ф.В., Прохоров А.М.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. В. 3. С. 1090–1097.
[3] *Gavrila M.* // Phys. Rev. 1967. V. 164. N 1. P. 147–159.
[4] *Stendholm S.* // Phys. Rep. 1973. V. 6. N 1. P. 1–121.
[5] *Зельдович Я.Б.* // УФН. 1973. Т. 110. В. 2. С. 139–152.
[6] *Зарецкий Д.Ф., Крайнов В.П.* // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. В. 2. С. 537–541.
[7] *Суран В.В., Запесочный И.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 1. В. 21. С. 973–974.
[8] *Делоне Н.Б., Коварский В.А., Маслов А.В., Перельман Н.Ф.* // УФН. 1980. Т. 131. В. 4. С. 617–652.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Квантовая механика. Т. 3. М.: Наука, 1974. 752 с.

[10] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* // Квантовая электродинамика. Т. 4. М.: Наука, 1980. 702 с.
[11] *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* // Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 338 с.
[12] *Могилевский Б.М., Чудновский А.Ф.* Теплопроводность полупроводников. М.: Наука, 1972. 536 с.
[13] *Ансельм А.И.* Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978. 615 с.
[14] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. Т. 10. М.: Наука, 1979. 527 с.
[15] *Гладков С.О.* Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.
[16] *Шифрин К.С.* Рассеяние света в мутной среде. М.: ГИТТЛ, 1951. 288 с.