

01

## Радиальные распределения быстро меняющихся токов и полей в цилиндрических проводниках

© Н.И. Кускова, С.И. Ткаченко

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,  
Николаев  
E-mail: kvp@air.mk.ua  
Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

Поступило в Редакцию 13 февраля 2002 г.

Показано, что при быстром изменении тока в цилиндрических проводниках происходит перераспределение плотности тока и полей по сечению проводника, причем при возрастании ток течет в основном в поверхностном слое, а при убывании, наоборот, плотность тока может быть максимальна во внутренних слоях проводника. К моментам времени, соответствующим максимумам тока, плотность тока стремится к однородному распределению.

Известно, что при быстром периодическом изменении тока с частотой  $\omega$ , описываемом функцией  $\exp(i\omega t)$ , в цилиндрическом проводнике может возникнуть радиальная неоднородность плотности тока. При сильной неоднородности ток течет только в тонком поверхностном слое проводника — скин-слое [1].

Исследуем радиальные неоднородности, возникающие в цилиндрическом проводнике при быстром „включении“ тока  $I \sim \exp(\beta t)$  или „выключении“  $I \sim \exp(-\beta t)$ , где  $\beta$  — коэффициент нарастания или убывания.

Процесс диффузии продольного поля  $E_z$  и соответственно плотности тока  $j = \sigma E_z$  в цилиндрических координатах можно описать уравнением

$$\frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial j}{\partial r} = \mu \sigma \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\sigma$  — электропроводность.

Запишем решение уравнения (1):

$$j(r, t) = j(0, 0) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \left( \frac{r}{\delta} \right)^{2n} \right) \exp(\pm \beta t), \quad (2)$$

где  $\delta = (\mu\sigma\beta)^{-0.5}$ , за начальный принят момент времени, в который  $j(0, 0) \neq 0$ .

Выражение (2) представляет собой две разные функциональные зависимости, соответствующие росту и падению тока. При возрастании тока

$$j(r, t) = j(0, 0) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \left( \frac{r}{\delta} \right)^{2n} \right) \exp(\beta t). \quad (3)$$

При  $\delta \ll a$ , как следует из выражения (3), имеет место скин-эффект. В случае резкого убывания тока

$$j(r, t) = j(0, 0) J_0 \left( \frac{r}{\delta} \right) \exp(-\beta t), \quad (4)$$

где  $J_0(r/\delta)$  — функция Бесселя первого рода.

Таким образом, при резком спаде и выполнении соотношения  $a/\delta < 2.4$  ( $a/\delta = 2.4$  — первый корень  $J_0(a/\delta)$ ) ток, наоборот, течет по всему проводнику, а в поверхностном слое плотность тока убывает до нуля.

Реальный проводник при протекании тока нагревается и расширяется. В этом случае уравнение диффузии магнитного поля  $B_\varphi$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} \right) = \mu\sigma \left( \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial (v B_\varphi)}{\partial r} \right), \quad (5)$$

где  $v$  — радиальная скорость расширения.

Аналитическое решение уравнения (5) можно получить в том случае, если  $v = ur$ , а радиус проводника изменяется по закону  $a = a_0 \exp(ut)$ . Тогда

$$B_\varphi(r, t) = B(a, 0) r \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(\pm 1)^m}{2^{2m}(m+1)!} \left( \frac{r}{\delta} \right)^{2m} \times \prod_{l=1}^m \left( \frac{2(k-1)u}{\beta} + 1 \right) \right] \exp(\pm \beta t). \quad (6)$$

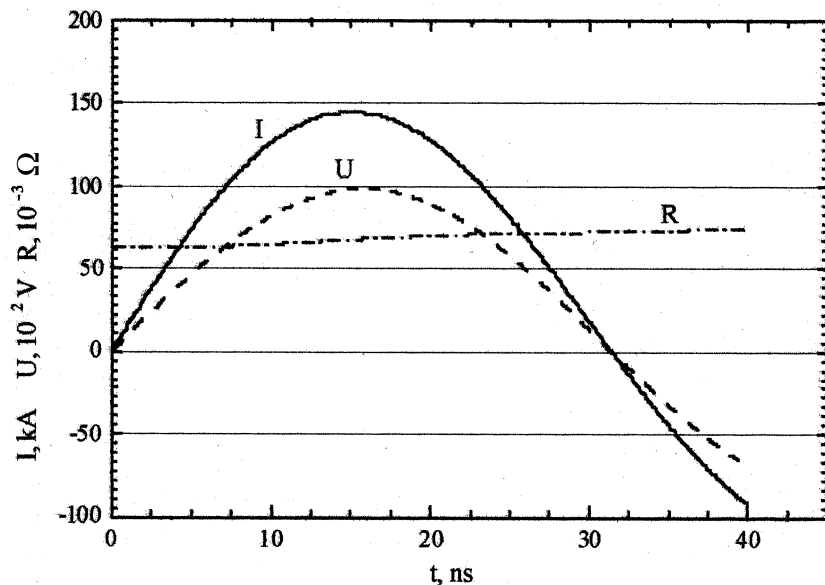
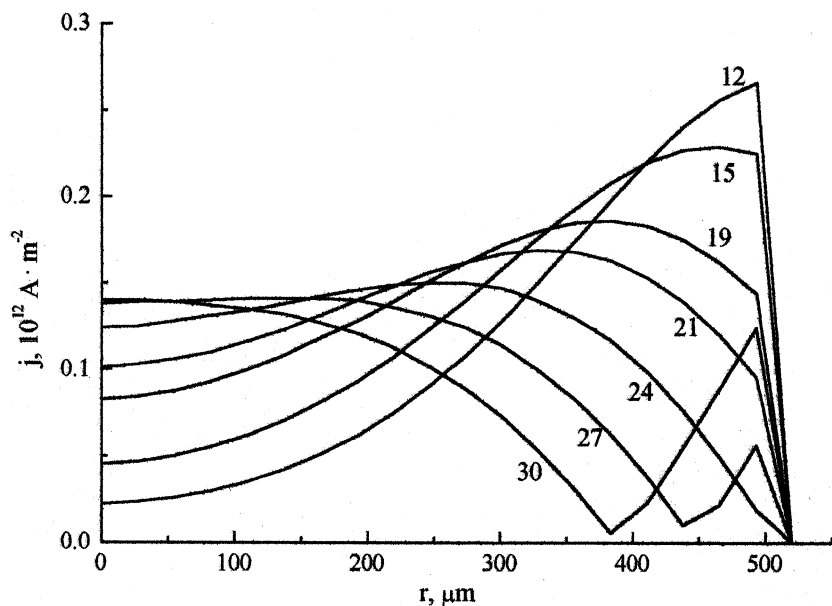


Рис. 1. Временные зависимости тока, напряжения и сопротивления исследуемого цилиндрического проводника.

Получим радиальное распределение плотности тока  $j = (\mu r)^{-1} \times \partial(rB_\varphi)/(\partial r)$ :

$$j(r, t) = j(0, 0) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \left( \frac{r}{\delta} \right)^{2n} \prod_{k=1}^n \left( \frac{2(k-1)u}{\beta} + 1 \right) \right) \exp(\pm \beta t). \quad (7)$$

Из выражения (7) следует, что расширение проводника существенно изменяет распределение плотности тока. Для реального проводника, в котором изменение тока и закон расширения не могут быть описаны экспонентами, плотность тока может быть найдена численно. Ранее [2] было получено слабонеоднородное распределение плотности тока, при котором в случае  $dI/dt < 0$  плотность тока максимальна в центре проводника. По-видимому, зависимость радиального распределения плотности тока и электромагнитного поля от знака производной  $dI/dt$  должна иметь место для любых  $I(t)$ .



**Рис. 2.** Радиальное распределение плотности тока в разные моменты времени (цифрами указаны моменты времени в наносекундах).

Система уравнений, моделирующая процесс нагрева твердого цилиндрического проводника в электрической цепи с емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$  имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{2\mu r^2} \frac{\partial(r^2 B_\phi^2)}{\partial r}, \\ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} &= -P \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \kappa r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{j^2}{\sigma}, \\ \frac{d(\mu B_\phi)}{dt} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sigma r} \frac{\partial(r B_\phi)}{\partial r} \right), \quad \frac{d^2(LI)}{dt^2} + \frac{d(RI)}{dt} + \frac{I}{C} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $m$  — масса,  $P$  — давление,  $\varepsilon$  — внутренняя удельная энергия,  $T$  — температура,  $\rho$  — плотность,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $R$  — сопротивление. Выберем параметры цепи и проводника

такими, чтобы ток имел колебательный характер: начальное напряжение  $U_0 = 80 \text{ kV}$ ,  $L = 5 \text{ nH}$ ,  $C = 20 \text{ nF}$ ,  $a_0 = 0.52 \text{ mm}$ , длина проводника  $l = 2 \text{ cm}$ . Проводник тугоплавкий с начальной электропроводностью  $10^5 \text{ Sm/m}$ . Полученная в процессе численного решения временная зависимость тока, как показано на рис. 1, имеет вид слабо затухающей синусоиды. На этом же рисунке приведены временные зависимости напряжения и сопротивления проводника.

Радиальные распределения плотности тока представлены на рис. 2. Видно, что распределение плотности тока к моменту времени  $t = 12 \text{ ns}$  является резко неоднородным, затем происходит перераспределение. При  $dI/dt \rightarrow 0$  в некоторый момент времени ( $t > 15 \text{ ns}$ ) плотность тока становится почти однородной. При убывании тока, как и следовало ожидать, плотность максимальна в центре проводника и падает до нуля в поверхностном слое (момент времени  $t \approx 24 \text{ ns}$ ).

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [2] Кускова Н.И., Ткаченко С.И. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 10. С. 30–34.
- [3] Kuskova N.I., Tkachenko S.I., Koval S.V. // J. Phys.: Condens. Matter. 1997. V. 9. P. 1675–1684.