

01;09

Автостохастическая система с параметрическим возбуждением

© Э.В. Кальянов, В.И. Калинин

Институт радиотехники и электроники РАН, Москва

Поступило в Редакцию 18 января 2002 г.

Проведен численный анализ параметрического возбуждения хаотических движений в динамической системе, содержащей резонатор в цепи запаздывающей обратной связи. Показана возможность эффективного управления структурой колебаний при параметрической накачке резонатора регулярными или хаотическими сигналами.

Распределенные системы находят широкое применение в различных областях науки и техники [1–6]. Такие системы обладают сложной динамикой и, как показано в [4–6], наличие запаздывания приводит к неустойчивости движений при параметрическом воздействии. В работах [4–6] экспериментально обнаружено развитие автомодуляции колебаний в области сильной неравновесности при параметрическом воздействии на системы с запаздыванием. Однако теоретический анализ этого явления не проводился.

В настоящей работе численными методами исследуется явление параметрического возбуждения нелинейных колебаний в динамической системе, состоящей из воздействующей подсистемы со сложным поведением и „накачиваемой“ подсистемы с запаздыванием. Рассматриваются случаи параметрического воздействия регулярными и хаотическими сигналами с целью выяснения возможности управления структурой нелинейных колебаний. Вопросам управления динамикой нелинейных систем в последнее время уделяется большое внимание (см., например, [7]).

Исследуемая динамическая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta_0 \frac{dx}{dt} + x &= f_-(x, y) - Ry, \\ \frac{dy}{dt} + cy &= f_+(x, y), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\varphi(x)}{Q} \frac{dz}{dt} + [\varphi(x)]^2 z &= \frac{[\varphi(x)]^2}{\sigma} \frac{dF(u)}{dt}, \\ \delta \frac{du}{dt} + u &= z(t - \tau), \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, z, u — динамические переменные, $f_{\pm}(x, y) = \beta \pm xy$, $F(u) = \sigma B u \exp(-u^2)$ — нелинейные функции; $\delta_0, R, B, c, \beta, Q, \omega_0, \delta, \sigma, \tau$ — постоянные параметры. Функция $\varphi(x) = \omega_0(1 + \alpha x(t))$ определяет параметрическое изменение частоты резонатора в кольце задержанной обратной связи системы.

Первые два уравнения динамической системы (1) описывают диссипативную подсистему рёслеровского типа с регулярным поведением при $\delta_0 = 0.1, R = -2.8, \beta = 0.2, c = 2.6$ и хаотическим при $\delta_0 = 0.15, R = -8.8, \beta = 0.4, c = 8.5$. Третье и четвертое уравнения системы (1) определяют неавтономную подсистему с запаздывающим аргументом на время τ . Накачка резонатора в кольце обратной связи этой подсистемы производится выходными колебаниями $x(t)$ первой подсистемы.

Фазовые портреты (x, \dot{x}) для регулярных (рис. 1, *a*) и хаотических (рис. 1, *b*) колебаний в первой подсистеме рассчитаны при отмеченных выше значениях параметров. В автономном режиме ($\alpha = 0$) поведение нелинейной системы с запаздыванием характеризуется простым предельным циклом при $\omega_0 = 6.4, Q = 10, B = 0.6, \delta = 0.1, \tau = 2$ (рис. 1, *c*).

В результате параметрической накачки резонатора регулярным сигналом с уровнем $\alpha = 0.18$ в нелинейной системе с запаздыванием вместо простого предельного цикла возникает хаотический аттрактор (рис. 1, *d*). Происходит стимулирование хаотического режима, и осуществляется управление колебаниями, выражающееся в принудительном переводе нелинейной подсистемы из режима регулярных движений в хаотические.

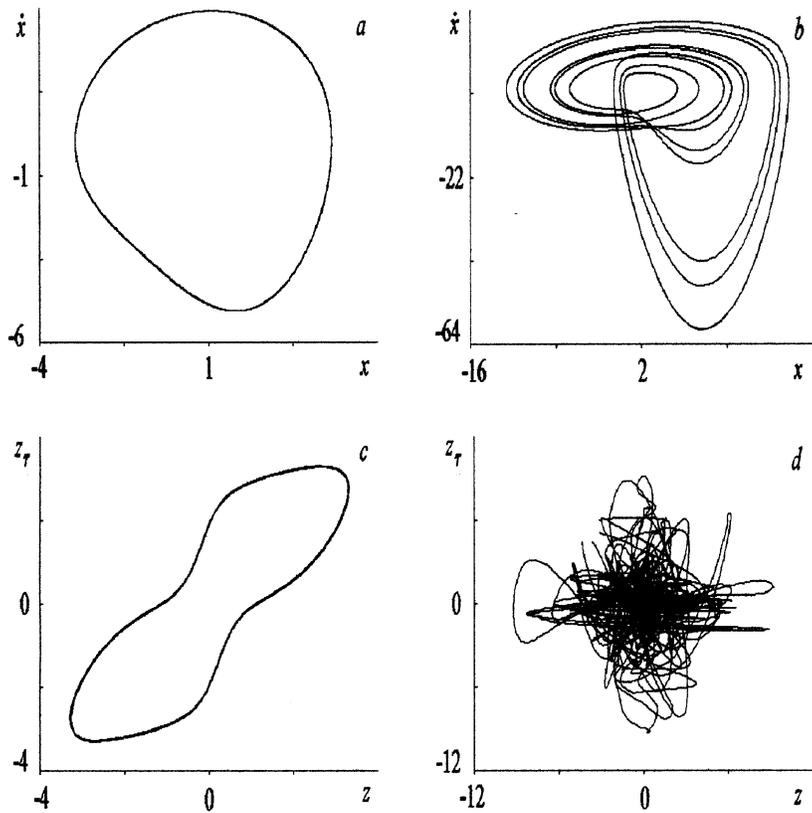


Рис. 1. Аттракторы, соответствующие колебаниям воздействующего сигнала (a, b) и подсистемы с запаздыванием (c, d) при ее автономной работе (c) и при воздействии регулярного сигнала (d). c, d — введено обозначение $z(t - \tau) = z_\tau$.

При параметрической накачке резонатора хаотическими колебаниями, которым соответствует аттрактор рёслеровского типа (рис. 1, b), в подсистеме с запаздыванием также возбуждаются хаотические движения. Отвечающий им хаотический аттрактор при $\alpha = 0.006$ имеет вид, подобный аттрактору на рис. 1, d . При хаотической накачке требуется

меньшая величина α для стимулирования хаотических движений в системе. Это обусловлено тем, что размах воздействующих хаотических колебаний при отмеченных параметрах первой подсистемы в несколько раз превышает амплитуду периодических движений.

Отличие результатов хаотической накачки от регулярной иллюстрируется бифуркационными диаграммами изменения максимальных значений $[z]$ колебательного процесса $z(t)$ в зависимости от параметра накачки α (рис. 2). При регулярной накачке превышение управляющим параметром критического значения $\alpha = 0.15$ вызывает случайный разброс точек на бифуркационной диаграмме (рис. 2, *a*), что свидетельствует о возбуждении хаотических колебаний в системе. При слабых регулярных воздействиях ($\alpha < 0.02$) имеют место квазипериодические движения (рис. 2, *b*) на поверхности двумерного инвариантного тора с двумя некрратными частотами — частотой собственных колебаний подсистемы с запаздыванием и частотой периодической накачки. С увеличением надкритичности при $\alpha \in [0.02; 0.065]$ в нелинейной системе с запаздыванием возникает периодическая автомодуляция колебаний с некрратной частотой. Геометрическим образом параметрически возбуждаемых трехчастотных колебаний является трехмерный тор в фазовом пространстве нелинейной системы. На рис. 2, *b* представлен фрагмент бифуркационной диаграммы рис. 2, *a*, рассчитанный в интервале $\alpha \in [0; 0.075]$. Двухчастотным движениям на этом рисунке отвечают (при $\alpha < 0.02$) односвязные сечения двумерного тора. Трехчастотным движениям соответствуют при $0.02 < \alpha < 0.065$ многосвязные сечения трехмерного тора.

В случае накачки хаотическими сигналами $x(t)$ диаграмма изменения $[z]$ в зависимости от бифуркационного параметра α имеет вид, подобный диаграмме, показанной на рис. 2, *a*. Однако имеется существенное отличие. Даже при очень слабой хаотической накачке ($\alpha < 0.006$) имеет место хаотизация (принудительная хаотическая модуляция) выходных колебаний $z(t)$ (рис. 2, *c*). В односвязных сечениях бифуркационной диаграммы наблюдается разброс случайных отсчетов $[z]$. При увеличении уровня хаотической накачки $\alpha \in [0.006; 0.015]$ в подсистеме с запаздыванием развивается автомодуляционная неустойчивость и устанавливается режим автомодуляции колебаний. Сечения бифуркационной диаграммы становятся многосвязными и заполняются случайными отсчетами. В области сильной неравновесности при $\alpha > 0.015$ многосвязные области разрушаются и на бифуркационной

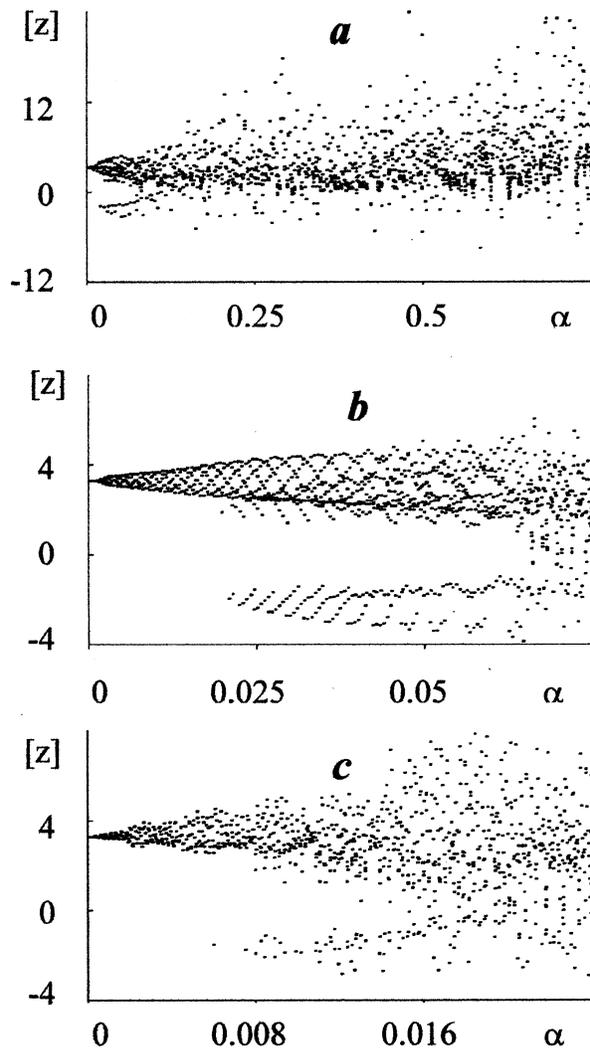


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы изменения максимальных значений колебательного процесса $z(t)$ при увеличении параметра эффективности воздействия: *a, b* — воздействие регулярного сигнала; *c* — воздействие хаотического сигнала.

диаграмме вновь образуются односвязные сечения, которые заполнены хаотическими отсчетами.

Механизм параметрического возбуждения развитых хаотических движений одинаков для случаев регулярной и хаотической накачки. Он обусловлен подвозбуждением с помощью внешней накачки потенциально возможных автомодуляционных мод в нелинейной системе с запаздыванием.

Проведенный анализ свидетельствует о том, что при параметрическом воздействии в нелинейной системе с запаздыванием имеет место возбуждение хаотических колебаний. При тех же параметрах в автономной системе без внешнего воздействия устанавливаются регулярные движения. Параметрическая накачка может осуществляться как регулярными, так и хаотическими сигналами. Эффект параметрического воздействия на нелинейные системы с запаздыванием можно использовать для управления структурой колебаний с целью их переключения от регулярных к хаотическим и обратно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 01–02–17529 и № 01–07–90349).

Список литературы

- [1] *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
- [2] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [3] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
- [4] *Калинин В.И., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. В. 21. С. 1311–1314.
- [5] *Калинин В.И., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* // Сб. Трудов XVII Межд. школы-семинара „Новые магнитные материалы микроэлектроники“ 20–23 июня 2000 г. М.: физ. факультет МГУ, 2000. С. 336–337.
- [6] *Кальянов Э.В., Старков С.О.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 11. С. 55–59.
- [7] *Chen G.* Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering systems. CRC Press. Boca Raton. 2000.