01;03

О влиянии заряда на равновесную форму капли в параллельных электростатическом и аэродинамическом полях

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 1 февраля 2002 г.

На основе принципа минимальности потенциальной энергии замкнутой системы в состоянии равновесия получено аналитическое выражение для равновесной сфероидальной деформации заряженной капли в параллельных аэродинамическом и электростатическом полях, связывающее величину эксцентриситета с величинами заряда, напряженности внешнего электростатического поля и скорости обдувающего потока.

Феномен деформации капель во внешних полях (электрических, гравитационных, аэродинамических) и их устойчивости в этих полях представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, технологии и научном приборостроении (см., например, [1] и указанную там литературу). Известно [1–3], что в однородном внешнем электростатическом поле капля деформируется к фигуре, близкой к вытянутому по полю сфероиду. В то же время очевидно, что в ламинарно обтекающем сферическую каплю потоке газа она должна деформироваться к сплющенному вдоль потока сфероиду, поскольку в силу уравнения Бернулли понижение давления на поверхность сферической капли из-за наличия обтекающего потока будет достигать максимальной величины в окрестности экваториального сечения. Не рассматривая вопроса о степени влияния на форму капли этих двух противоположных тенденций, зададимся вопросом о роли собственного заряда капли в ее деформации в электростатическом и аэродинамическом полях. Известно [3], что при наличии только электростатического поля собственный заряд усиливает деформацию капли в поле. Влияние же заряда капли на ее деформацию в обтекающем потоке пока не исследовано.

1. Пусть сферическая капля радиуса R с зарядом Q идеальной несжимаемой жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ, помещенная в однородное внешнее электростатическое поле $\mathbf{E}_0$, обдувается ламинарным потоком газа плотностью ρ и скоростью $\mathbf{U} \parallel \mathbf{E}_0$. В поле $\mathbf{E}_0$ капля деформируется к вытянутому сфероиду, в то же время в потоке $\mathbf{U}$ она деформируется к сплюснутому сфероиду. Примем, что соотношение между величинами E_0 и U таково, что из этих двух противоположных тенденций преобладает стремление к вытягиванию и капля имеет форму вытянутого сфероида с эксцентриситетом e. Зададимся вопросом, каков вклад E_0, U и Q в величину равновесного эксцентриситета. Рассмотрение проведем в сферической системе координат с началом в центре капли.

Выпишем выражение для полной потенциальной энергии капли, которая в указанных условиях состоит из энергии сил поверхностного натяжения [3]:

$$U_\sigma = 2\pi R^2 \sigma (1-e^2)^{1/3} \left(1 + e^{-1}(1-e^2)^{-1/2} \arcsin e\right);$$

энергии собственного заряда капли [4]:

$$U_q = \frac{Q^2}{2R} e^{-1} (1-e^2)^{1/3} \operatorname{arth} e;$$

энергии поляризационного в $\mathbf{E}_0$ заряда капли [4]:

$$U_E = -\frac{1}{6} E_0^2 \cdot R^3 \frac{e^3}{(1-e^2)(\operatorname{arth} e - e)};$$

энергии капли в аэродинамическом потоке:

$$U_U = -\int p_U(\theta) r^2 \cos^{-2}\gamma \sin\theta d\theta d\varphi dr,$$

где p_U — аэродинамическое давление на поверхность вытянутой сфероидальной капли [5]:

$$p_U = \frac{\rho U^2}{2}\,(1-0.5C_0)^{-2} \frac{\sin^2\theta}{[1 - e^2(2-e^2)\cos^2\theta]};$$

$$C_0 \equiv 2e^{-3}(1-e^2)\,(\operatorname{arth} e - e)\,.$$

Угол θ отсчитывается от направления $\mathbf{E}_0$; $\cos\gamma$ — косинус угла между вектором нормали к поверхности вытянутой сфероидальной капли и ортом $\mathbf{n}_r$ сферической системы координат с началом в центре капли, а интегрирование по R проводится от нуля до поверхности вытянутого сфероида:

$$r(\theta) = R(1-e^2)^{1/3}(1-e^2\sin^2\theta)^{-1/2}.$$

Выражение для U_U получено интегрированием по сфероидальной поверхности капли работы силы $p_U \cdot d\mathbf{S}$, действующей на элементарную площадку на поверхности капли $dS \equiv r^2 \sin\theta d\theta d\varphi/\cos\gamma$, при смещении площадки dS вдоль нормали к ней на $dn \equiv dr/cos\gamma$.

В силу принципа минимальности потенциальной энергии замкнутой системы в равновесном состоянии (в рассматриваемой ситуации замкнем систему на большом расстоянии от капли), приравнивая нулю производную по величине эксцентриситета от полной потенциальной энергии капли, можно найти выражение для квадрата эксцентриситета, при котором потенциальная энергия минимальна:

$$e^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{(w\pi^{-1} - We)}{(1-W)};$$

$$w \equiv E_0^2 R\sigma^{-1}; \quad We \equiv \rho U^2 R\sigma^{-1}; \quad W \equiv Q^2/16\pi\sigma R^3.$$

Несложно видеть, что при $E_0 = 0$ выражение для квадрата эксцентриситета получается отрицательным, что и соответствует сплющиванию капли вдоль потока. Влияние заряда на величину эксцентриситета в такой ситуации оказывается таким же, как и для случая $U = 0$, $E_0 \neq 0$: наличие собственного заряда увеличивает степень деформации капли. При $U = 0$, $E_0 = 0$, $Q \neq 0$ капля не деформируется.

Таким образом, собственный электрический заряд капли, не приводя к деформации сферической формы, усиливает равновесные деформации капли во внешних силовых полях.

В ситуации, когда и заряд капли, и напряженность внешнего электрического поля капли, движущейся с конечной (малой, чтобы обеспечить ламинарность обтекающего потока газа) скоростью, не равны нулю $Q \neq 0$, $E_0 \neq 0$, $U \neq 0$, капля может сохранять сферическую форму при $(w/\pi) = We$ и произвольном, меньшем критического по Рэлею [1], заряде. При $(w/\pi) > We$ капля деформируется к вытянутому сфероиду, при $(w/\pi) < We$ — к сплюснутому. При наблюдениях в условиях грозового облака регистрируются все три формы капель: сферическая, сплюснутая сфероидальная и вытянутая сфероидальная [6].

2. Заключение. Капля жидкости в потоке идеальной несжимаемой жидкости (газа), ламинарно ее обтекающем, деформируется к сплюснутому сфероиду с осью симметрии, ориентированной по потоку. Наличие на капле электрического заряда увеличивает степень сплюснутости (увеличивает эксцентриситет капли). Если имеется также однородное внешнее электростатическое поле, в котором капля в отсутствие обтекающего потока деформируется к вытянутому по полю сфероиду (наличие на капле заряда приводит к увеличению степени удлинения), то имеет место конкуренция стремления к сплющиванию в гидродинамическом потоке и к вытягиванию во внешнем электростатическом поле. При некотором соотношении между величиной напряженности электростатического поля и скорости потока форма капли остается сферической.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[2] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383–397.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. В. 6. С. 27–34.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[5] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
[6] *Jones D.M.* // J. Meteorology. 1959. V. 16. N 5. P. 504–510.