

03

Интерференция нестационарных косых ударных волн

© А.В. Омельченко, В.Н. Усков

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: vmu@peterlink.ru

Поступило в Редакцию 18 декабря 2001 г.

Рассматриваются особенности расчета течения за нестационарной косой ударной волной при ее движении по потоку совершенного невязкого газа. Определяются интенсивности косой волны, при которых течение за ней может иметь особенности. Решается задача расчета нестационарной ударно-волновой конфигурации, образующейся при взаимодействии сверхзвуковой струи с преградой.

Во многих задачах газодинамики [1–3] требуется определить параметры течения f_2 за ударными волнами, которые перемещаются в потоке газа. В подобных задачах считаются известными величинами параметры f_1 потока перед волной (скорость u_1 , статическое давление p_1 , плотность ρ_1 , температура T_1 и др.), а также скорость w движения ударной волны вдоль прямолинейной траектории, составляющей угол α с направлением движения потока, и угол σ наклона волны к траектории (рис. 1, a).

В качестве основного параметра задачи принимается интенсивность ударной волны

$$J = \frac{p_2}{p_1} = (1 + \varepsilon) \left(\frac{u_{1n} - D}{a_1} \right)^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (1)$$

зависящая от нормальных к фронту компонент скоростей $u_{1n} = u \sin(\sigma - \alpha)$ и $D = w \sin \sigma$, а также от термодинамических переменных исходного потока (скорости звука a_1 и показателя адиабаты γ). Физически обусловленное требование $J \geq 1$ накладывает ограничения на определяющие параметры, анализ которых будет произведен ниже.

Используя условия динамической совместности на фронте ударной волны [1–3], несложно получить ударную адиабату Рэнкина–Гюгонио,

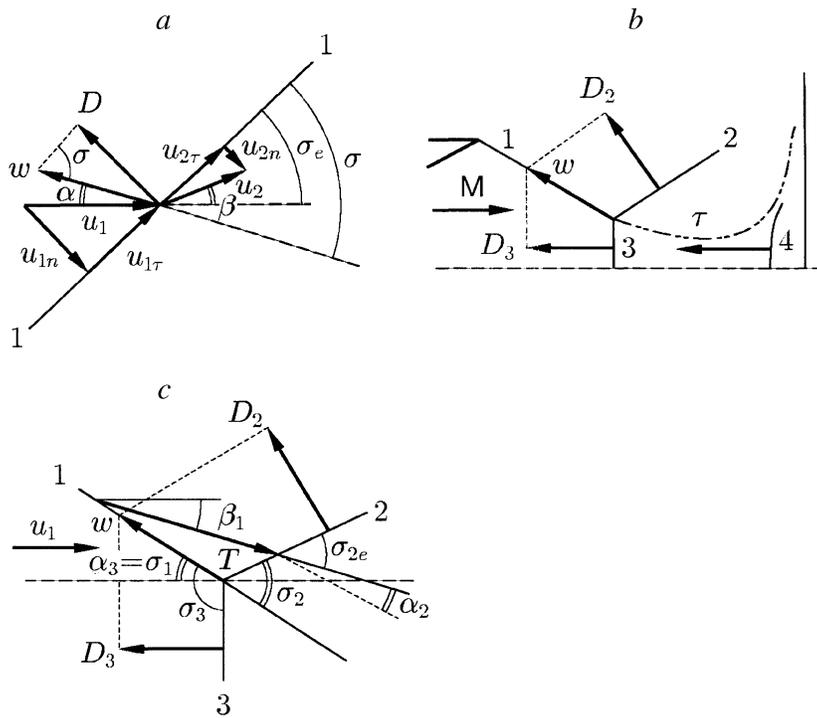


Рис. 1. Геометрия течения, образующегося в результате: *a* — движения клина со скоростью w в сносящем потоке, имеющем скорость u ; *b* — натекания перерасширенной сверхзвуковой струи на бесконечную плоскую преграду; *c* — движения тройной конфигурации ударных волн по сверхзвуковому потоку.

связь удельных энтальпий, температур и скоростей звука с интенсивностью ударной волны

$$E = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{J + \varepsilon}{1 + \varepsilon J}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{J}{E} = \frac{J(1 + \varepsilon J)}{J + \varepsilon}, \quad (2)$$

а также выражения для нормальных компонент скорости

$$D = u_{1n} + \chi I a_1, \quad u_{2n} = u_{1n} + \chi(1 - \varepsilon)a_1 \left(I - \frac{1}{I} \right), \quad I = \sqrt{\frac{J + \varepsilon}{1 + \varepsilon}}. \quad (3)$$

Здесь $\chi = \pm 1$ — показатель направления движения волны. Выражая составляющие скоростей через углы $\sigma_e = \sigma - \alpha$ и β , можно из равенства $u_{1\tau} = u_{2\tau}$ определить скорость u_2 потока за волной

$$u_2 = u_1 \frac{\cos \sigma_e}{\cos(\sigma_e - \beta)}, \quad (4)$$

а затем, используя соотношения (3) и (4), получить связь углов β и σ_e на косой ударной волне:

$$\operatorname{tg}(\sigma_e - \beta) = \operatorname{tg} \sigma_e + \chi \frac{(1 - \varepsilon)(I - 1/I)}{M_1 \cos \sigma_e}. \quad (5)$$

Из формулы (4) с учетом (2) следует также равенство

$$M_2 = M_1 \frac{\cos \sigma_e}{\cos(\sigma_e - \beta)} \sqrt{\frac{J + \varepsilon}{J(1 + \varepsilon J)}}, \quad (6)$$

позволяющее выразить число Маха $M_2 = u_2/a_2$ за ударной волной через число Маха $M_1 = u_1/a_1$ исходного потока.

Полагая в (1) $J = 1$, получим формулу

$$\sigma_s = \arcsin \frac{M_D - \chi}{M_1}, \quad (7)$$

связывающую числа Маха $M_D = D/a_1$ и $M_1 > 0$ с углом $\sigma_e = \sigma_s$ между траекторией набегающего потока и фронтом слабого разрыва. Заметим, что в отличие от слабой стационарной ударной волны ($M_D = 0$), для которой σ_s фиксирован и равен $\arcsin 1/M_1$, в нестационарном случае угол σ_s может меняться в диапазоне $[-\pi/2, \pi/2]$. При этом случаю $\sigma_s \in (0, \pi/2]$ соответствует слабая встречная ударная волна, а случаю $\sigma_s \in [-\pi/2, 0)$ — слабая спутная ударная волна. Особому углу $\sigma_s = 0$ отвечает вариант распространения слабой ударной волны перпендикулярно набегающему потоку. Последний в этом случае никак не влияет на ударную волну, и она распространяется так, как если бы поток вовсе отсутствовал.

Значение $J = 1$ соответствует минимально возможной интенсивности ударной волны. Максимум интенсивности достигается при значениях, соответствующих прямой ударной волне ($\sigma = \pi/2$). Зафиксируем число Маха $M_1 > 0$ и проанализируем характер поведения основных

газодинамических параметров при различных числах M_D и значениях $J \geq 1$. При этом ограничимся случаем $\chi = -1$.

Как видно из формулы (7), при $\chi = -1$ диапазон изменения M_D ограничен сверху значением $M_D = M_1 - 1$. При таком числе M_D в потоке может существовать только лишь слабый разрыв с $J = 1$ и $\sigma = \pi/2$, который при $M < 1$ распространяется вверх по потоку, а при $M > 1$ сносится этим потоком вниз по течению. С уменьшением M_D нижняя граница σ_s (7) уменьшается, достигая нуля при $M_D = -1$, а затем и значения $\sigma_s = -\pi/2$ при $M_D = -M_1 - 1$. При $M_D < -M_1 - 1$ косая ударная волна существует при любых значениях $\sigma \in [-\pi/2, \pi/2]$ и имеет интенсивность $J > 1$ для любого σ из указанного диапазона.

На рис. 2 представлены кривые $\sigma(\beta)$, построенные для различных значений $M_D < M_1 - 1$ при числе Маха $M_1 = 3$. Как видно из рисунка, характер поведения исследуемых зависимостей существенно зависит от числа Маха M_D . Так, при числах $M_D \in (M_*, M_1 - 1)$ функции $\sigma(\beta)$ (кривые 1–3 на рис. 2) качественно не отличаются от кривой $\sigma(\beta)$, построенной для случая стационарной ударной волны ($M_D = 0$; пунктирная кривая на рисунке). В случае $M_D < M_*$ для любого значения $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ существует ударная волна, разворачивающая поток на заданный угол β (кривые 5–8 на рис. 2). Особое число Маха M_* соответствует случаю, когда число Маха M_2 за прямой ударной волной обращается в ноль (кривая 4 на рисунке). Используя (1), (3), несложно получить связь M_* с числом Маха M_1 набегающего потока:

$$M_* = \frac{(1 - 2\varepsilon)M_1 - \sqrt{M_1^2 + 4(1 - \varepsilon)^2}}{2(1 - \varepsilon)}. \quad (8)$$

При числах Маха M_D , меньших M_* , поток за прямой ударной волной разворачивается на 180° , а при $\sigma < \pi/2$ угол поворота потока меняется в диапазоне значений $\beta \in [0^\circ, 180^\circ]$. В случае $M_D < -M_1 - 1$ все кривые $\sigma(\beta)$ исходят из точки $(0^\circ, -90^\circ)$ и приходят в точку с координатами $(180^\circ, 90^\circ)$.

В практических задачах изучение нестационарных ударных волн обычно проводят, обращая движение [3]. Переход от лабораторной системы координат к системе, связанной с движущейся ударной волной, упрощает задачу, сводя ее к изучению более простого объекта — скачка уплотнения [2]. Однако обращение движения не всегда возможно

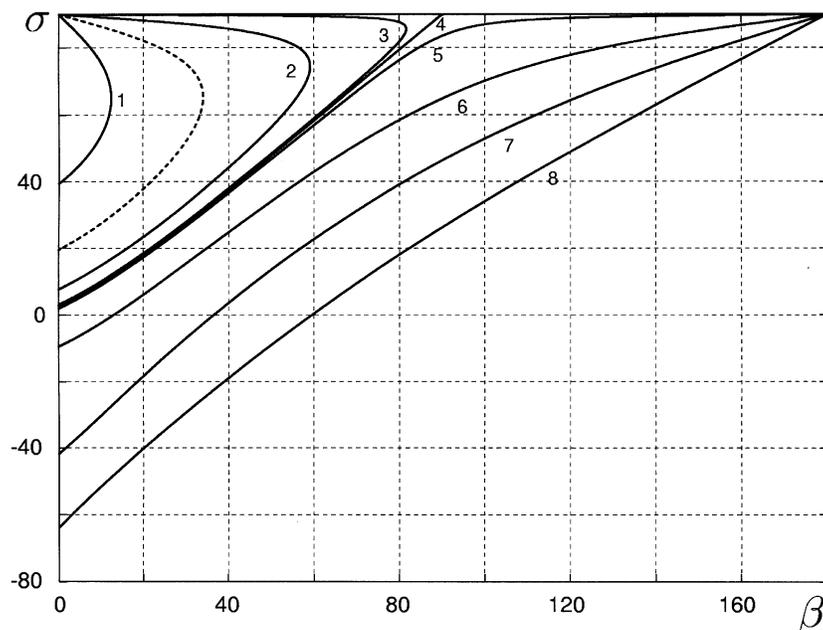


Рис. 2. Зависимость угла β поворота потока за волной от угла σ наклона волны.

провести в достаточно сложных задачах, связанных с интерференцией косых ударных волн. Рассмотрим в качестве примера ударно-волновую конфигурацию, образующуюся при изучении нестационарных процессов в струйных течениях [4]. В случае истечения равномерного плоского потока из профилированного сопла с перерасширением ($n_a = p_n/p_a < 1$) на кромке сопла возникает прямолинейный косой скачок уплотнения 1, который для случая достаточно малых нерасчетностей n_a нерегулярно отражается от оси струи (рис. 1, *b*). В результате отражения образуется маховская ножка 3, отраженный косой скачок уплотнения 2, а также разделяющий потоки за скачками 2 и 3 тангенциальный разрыв τ . Для простоты предположим, что в результате отражения косого скачка образуется стационарная маховская конфигурация ударных волн,

в которой ветвящийся скачок уплотнения 3 ортогонален линиям тока набегающего потока.

Пусть теперь такая струя натекает на бесконечную плоскую преграду (рис. 1, *b*). Как показано, например, в [5], динамическое и полное давления в сверхзвуковом потоке, прошедшем через скачки 1 и 2, могут значительно превосходить значения соответствующих параметров в дозвуковом потоке за прямолинейным скачком 3. Большой перепад этих величин может привести к мгновенному „прилипанию“ тангенциального разрыва τ к поверхности преграды и к запираению дозвукового потока. В результате в точке прилипания образуется идущая вверх по потоку криволинейная ударная волна 4. Взаимодействие этой волны с маховской ножкой 3 приведет к движению ударной волны 3 вверх по потоку. Следствием этого должно явиться смещение ударной волны 2, имеющей общую точку T с ветвящимся скачком уплотнения 3 (рис. 1, *b*). При этом возникает задача описания течения за волной 2.

Для решения задачи заметим, что ударная волна 2 движется вдоль траектории, совпадающей с линией скачка 1, со скоростью $w = D_2 / \sin \sigma_2 = D_3 / \sin \sigma_3$, где D_2 и D_3 — скорости движения ударных волн 2 и 3, σ_2 и $\sigma_3 = \pi/2 + \sigma_1$ — углы между вектором w и поверхностями разрывов 2 и 3, σ_1 — угол наклона скачка уплотнения 1 (рис. 1, *c*). Движение ударной волны 3 вверх по потоку с относительной скоростью $M_{D3} < 0$ приводит к увеличению ее интенсивности

$$J_3 = (1 + \varepsilon) \left[\frac{u}{a} \sin(\sigma_3 - \alpha_3) - \frac{w}{a} \sin \sigma_3 \right]^2 - \varepsilon = (1 + \varepsilon)(M - M_{D3})^2 - \varepsilon.$$

Здесь $\alpha_3 = \sigma_1$ — угол между w и вектором u скорости набегающего потока. Как следствие, увеличивается интенсивность $J_2 = J_3/J_1$ ударной волны 2, что, в свою очередь, приводит к изменению угла σ_2 , связанного с J_2 формулой (1):

$$J_2 = (1 + \varepsilon)(M_1 \sin \sigma_{2e} - M_{D2})^2 - \varepsilon, \quad \sigma_{2e} = \sigma_2 - \alpha_2. \quad (9)$$

Здесь M_1 — число Маха за скачком 1, $\alpha_2 = \sigma_1 - \beta_1$ — угол между w и вектором u_1 потока за скачком 1. Численное решение (9) позволяет вычислить σ_2 , а следовательно, и угол β_2 поворота потока (5) на ударной волне 2. В общем случае этот угол отличается от угла β_{20} поворота потока за неподвижным скачком 2 в стационарной маховской

конфигурации, и условия динамической совместности на разделяющем потоке тангенциальном разрыве τ перестают выполняться. Для обеспечения условий динамической совместности следует допустить, что первоначально прямолинейный скачок уплотнения \mathcal{Z} в процессе движения искривляется в окрестности тройной точки с тем, чтобы удовлетворить как условию равенства давлений, так и условию коллинеарности линий тока над и под τ (рис. 1, *c*). Предполагая при этом, что скорость w движения ударной волны \mathcal{Z} вдоль скачка l по-прежнему связана со скоростью D_3 движения ударной волны в окрестности оси симметрии соотношением $D_3 = w \cos \sigma_1$, несложно получить систему уравнений для определения газодинамических параметров потока в точке T ветвления:

$$J_3 = J_1 J_2, \quad \beta_3 = \beta_2 - \beta_1. \quad (10)$$

Входящие в систему интенсивности J_2 и J_3 рассчитываются по формулам (9) и

$$J_3 = (1 + \varepsilon)(M \sin \sigma_{3e} - M_w \sin \sigma_3)^2 - \varepsilon, \quad \sigma_{3e} = \sigma_3 - \alpha_3, \quad M_w = w/a,$$

а углы β_2 и β_3 определяются из соотношений (5). Как показали проведенные расчеты, с увеличением скорости D_3 движения маховской ножки интенсивности J_2 , J_3 , а также углы поворота β_2 , β_3 монотонно увеличиваются. Интереснее ведет себя угол σ_3 наклона ударной волны \mathcal{Z} в точке T : функция $\sigma_3(M_{D3})$ при малых $|M_{D3}|$ уменьшается от значения $\sigma_{30} = 90^\circ + \sigma_1$, достигает минимума, а затем вновь увеличивается, стремясь к σ_{30} при $M_{D3} \rightarrow M_*$ (8). В точке M_* производная функции $\sigma_3(M_{D3})$ терпит разрыв, а при $M_{D3} < M_*$ угол σ_3 монотонно уменьшается с ростом $|M_{D3}|$. Следует также заметить, что для чисел Маха $|M_{D3}| > |M_*|$ поток за волной \mathcal{Z} меняет свое направление на противоположное, и для расчета газодинамических параметров в окрестности точки T следует вместо (10) решать систему

$$J_3 = J_1 J_2, \quad \pi - \beta_3 = \beta_2 - \beta_1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект № 99–785), РФФИ (проект № 00–15–96106).

Список литературы

- [1] Усков В.Н. Бегущие одномерные волны. СПб.: Изд-во БГТУ, 2000.
- [2] Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955.
- [3] Etapuef G., Yi T.H. // Shock Waves. 2000. N 10. P. 113–117.
- [4] Семилетенко Б.Г., Собколов Б.Н., Усков В.Н. // Изв. СО АН СССР. Техническая серия. 1975. № 13.
- [5] Омельченко А.В., Усков В.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 118–126.