01;03

К вопросу о колебательном движении аэрозольных частиц

© Ю.И. Яламов, А.Л. Лебедева

Московский педагогический университет

Поступило в Редакцию 24 декабря 2002 г.

Рассматривается колебательное движение умеренно крупных твердых сферических аэрозольных частиц под действием периодической внешней силы, в бинарной газовой смеси. В настоящей работе использован математический и физический подход Ландау Л.Д. и Фукса Н. А. [1,2] для обобщения задачи с учетом изотермического скольжения. Отмеченный эффект возникает при наличии в среде градиента среднемассовой скорости. Проведенные оценки показали, что влияние изотермического скольжения на характер колебаний умеренно крупных аэрозольных частиц зависит от частоты и может достигать 20% от общей скорости.

Рассмотрим сферическую частицу радиуса R, совершающую поступательное колебательное движение с угловой частотой ω по закону: $U = U_m \cos(\omega t + \alpha)$, где U — скорость частицы. Удобно писать такую функцию в виде вещественной части от комплексного выражения $U = \mathrm{Re}\{U_0 \exp(-i\omega t)\}$, с комплексной постоянной $U_0 = U_m \exp(-i\alpha)$ (U_0 можно сделать вещественной надлежащим выбором начала отсчета времени). В дальнейшем будем опускать знак взятия вещественной части и производить вычисления так, как если бы U было комплексным, после чего можно взять вещественную часть от окончательного результата.

В дальнейшем будем писать:

$$U = U_0 \exp(-i\omega t). \qquad (1)$$

Внешняя среда будет характеризоваться вязкостью η и плотностью ρ.

Поскольку капля имеет сферическую форму, расчеты удобно проводить в сферической системе координат. Выберем начало сферических координат r, θ, φ в точке нахождения центра частицы в данный момент времени. Полярную ось выберем вдоль направления колебаний частицы. Распределение скоростей и давления во внешней среде удовлетворяет следующей системе линеаризованных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\,\Delta\mathbf{V}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

здесь p — давление, $\mathbf{V}$ — скорость среды.

Используя математический подход работы [1], получаем общий вид скорости колебания сферической частицы:

$$\mathbf{V} = a\exp(ikr)\left(\mathbf{U}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ikr^3} - \frac{ik}{r}\right)\right.$$
$$\left. + (\mathbf{U},\mathbf{n})\,\mathbf{n}\left(\frac{ik}{r} - \frac{3}{r^2} + \frac{3}{ikr^3}\right)\right) + \frac{b}{r^3}\big(\mathbf{U} - 3(\mathbf{U},\mathbf{n})\mathbf{n}\big), \tag{4}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$.

Компоненты скорости в сферческих координатах имеют вид

$$V_r = U\cos\theta\left(a\exp(ikr)\left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{ikr^3}\right) - \frac{2b}{r^3}\right), \tag{5}$$

$$V_\theta = -U\sin\theta\left(a\exp(ikr)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ikr^3} - \frac{ik}{r}\right) + \frac{b}{r^3}\right). \tag{6}$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий на поверхности частицы [3]:

$$V_r\big|_{r=R} = U\cos\theta, \tag{7}$$

$$V_\theta\big|_{r=R} = -U\sin\theta + C_m\lambda\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right). \tag{8}$$

В соотношении (8) для касательной компоненты скорости V_θ учтено изотермическое скольжение, пропорциональное коэффициенту C_m [4,5], λ — средняя длина свободного пробега молекул внешней среды.

Из уравнений (5)–(8) находим

$$a = -\frac{3R}{ik}\exp(ikR)C'_m, \tag{9}$$

$$b = -\frac{R^3}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{ikR} + \frac{3}{k^2R^2}\right)C'_m\right). \tag{10}$$

В (9), (10) C'_m — коэффициент, который имеет вид

$$C'_m = \frac{(1 + 2C_m\mathrm{Kn})\exp(i\varphi)}{\sqrt{\left(1 + 3C_m\mathrm{Kn} + C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}\right)^2 + \left(C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}\right)^2}}. \qquad (11)$$

В формуле (11) $\mathrm{Kn} = \lambda/R$ — число Кнудсена, а сдвиг фаз φ определяется следующими соотношениями:

$$\cos\varphi = \frac{1 + 3C_m\mathrm{Kn} + C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}}{\sqrt{\left(1 + 3C_m\mathrm{Kn} + C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}\right)^2 + \left(C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}\right)^2}}; \qquad (12)$$

$$\sin\varphi = -\frac{C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}}{\sqrt{\left(1 + 3C_m\mathrm{Kn} + C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}\right)^2 + \left(C_m\mathrm{Kn}\frac{R}{\delta}\right)^2}}. \qquad (13)$$

Аналогичным образом получено распределение давления вокруг колеблющейся частицы

$$p = p_0 + \eta U\cos\theta\,\frac{k^2}{r^2}\,b. \qquad (14)$$

С помощью полученных формул можно вычислить силу давления текущей среды на колеблющуюся частицу. Полная сила F, действующая на сферическую частицу, равна:

$$F = \int (-p\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)\big|_{r=R}\,df, \qquad (15)$$

где

$$df = \int\limits_0^{2\pi} R^2\sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2\sin\theta d\theta.$$

Найдем компоненты тензоров вязких напряжений σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$:

$$\sigma_{rr} = 2\eta\frac{\partial V_r}{\partial r}$$
$$= 2\eta U\cos\theta\left(a\exp(ikr)\left(-\frac{2ik}{r^2} + \frac{6}{r^3} - \frac{6}{ikr^4}\right) + \frac{6b}{r^4}\right), \qquad (16)$$

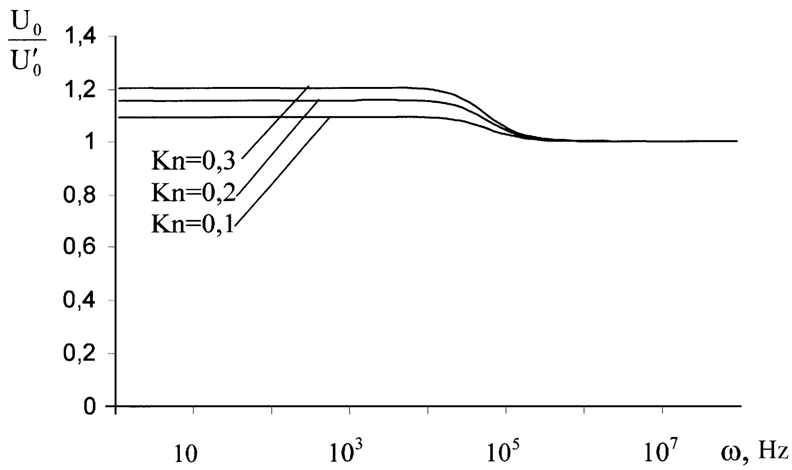

Рис. 1. $R = 1\,\mu$m.

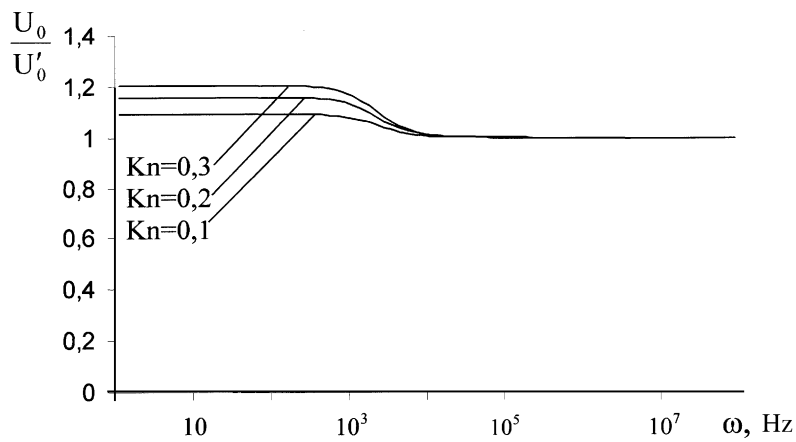

Рис. 2. $R = 5\,\mu$m.

$$\sigma_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}\right)$$

$$= -\eta U\sin\theta\left(a\exp(ikr)\left(\frac{3ik}{r^2} - \frac{6}{r^3} + \frac{6}{ikr^4} + \frac{k^2}{r}\right) - \frac{6b}{r^4}\right). \qquad (17)$$

В итоге для F получим:

$$F = 6\pi\eta R\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)C'_m U + 3\pi R^2\sqrt{\frac{2\eta\rho}{\omega}}\left(C'_m + \frac{2}{9}\frac{R}{\delta}\right)\frac{dU}{dt}. \qquad (18)$$

Из выражения (18) следует, что учет изотермического скольжения приводит к появлению сдвига фаз φ между скоростью колебания частицы и силой сопротивления среды. Величина отмеченной силы также меняется.

Сила (18) была использована для уточнения формулы скорости колебания сферических аэрозольных частиц под действием периодической внешней силы [2]. Для амплитуды скорости колебаний U_0 было получено выражение:

$$U_0 = \frac{F_0 f}{\omega m C'_m\sqrt{\frac{f^2}{C'^2_m} + 3\beta\frac{f}{C'_m} + \frac{9}{2}\beta^2 + \frac{9}{2}\beta^3 + \frac{9}{4}\beta^4}}. \qquad (19)$$

В (19) F_0 — амплитуда внешней силы, m — масса частицы, f и β определяются следующими выражениями:

$$f = \frac{2\rho_i}{3\rho}; \qquad \beta = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}, \qquad (20)$$

ρ_i — плотность частицы.

Обозначим амплитуду скорости колебаний частицы в случае $C'_m = 1$ (без учета изотермического скольжения) U'_0.

Зависимость отношения U_0/U'_0 от частоты колебания частиц для капель воды в воздухе при нормальных условиях представлена на рис. 1, 2. При частоте, не превышающей $\approx 10^4$ Hz, изотермическое скольжение оказывает существенное влияние на скорость колебаний, которая увеличивается на 15–20% в зависимости от величины числа Кнудсена. При более высоких частотах отмеченный эффект можно не учитывать.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1988. 736 с.
[2] *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М., 1955. 352 с.
[3] *Яламов Ю.Г., Галоян В.С.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван, 1985. 208 с.
[4] *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н.* // Аннотации докладов IV Всесоюзной конференции по динамике разреженного газа. М., 1975. С. 32.
[5] *Яламов Ю.И., Гайдуков М.Н., Юшканов А.А.* // ИФЖ. 1975. Т. 9. № 3. С. 489–493.