01;07

Нелинейные моды оптического волокна

© И.В. Дзедолик, А.И. Дзедолик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь
E-mail: dzedolik@crimea.edu

Поступало в Редакцию 24 сентября 2001 г.
В окончательной редакции 10 января 2002 г.

Показано, что в оптическом волокне в нелинейном режиме электромагнитное поле распространяется в форме нелинейных мод — кноидальных (периодических) волн, которые в линейном режиме переходят в монохроматические моды оптического волокна. Возникновение кноидальных волн обусловлено нелинейными эффектами поляризации диэлектрической среды, которые описываются уравнениями с синусоидальной нелинейностью.

Как известно, электромагнитное поле при непрерывном излучении лазера в линейном режиме распространяется в оптических волокнах в форме мод с гармонической зависимостью от времени и продольной координаты [1]. При высокой интенсивности лазерного излучения либо в импульсном режиме возникают нелинейные взаимодействия электромагнитного поля со средой, которые в большинстве работ описываются уравнениями для огибающей плоской монохроматической волны, зависящей от продольной координаты и времени [2–4]. Однако в нелинейном режиме уже нельзя описывать электромагнитное поле линейными модами волокна. В ряде работ (например, [5,6]) исследуется динамика комплексной огибающей монохроматического поля, зависящей как от поперечных, так и от продольной координаты и времени, которая удовлетворяет уравнению Шредингера с кубической нелинейностью в безграничной среде с осевой симметрией. В данной работе предпринята попытка найти выражения для нелинейных мод поперечно ограниченной диэлектрической среды с осевой симметрией — оптического волокна с учетом синусоидальной нелинейности.

Рассмотрим условия возникновения нелинейных поляризационных и электромагнитных волн в оптическом волокне. Запишем систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в кварцевом волокне:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

с материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2}$$

где $\mathbf{P} = -eN\mathbf{r}$ — вектор поляризации среды. Из (1) и (2) с учетом $\nabla\mathbf{E} + 4\pi\nabla\mathbf{P} = 0$ получаем уравнение

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = -4\pi\left[\nabla(\nabla\mathbf{P}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}\right]. \tag{3}$$

Элементарная ячейка кварца имеет центр симметрии, поэтому потенциал кристаллической решетки можно аппроксимировать четной периодической функцией $U = -f_0\cos(\frac{2\pi}{r_0}r)$, где r_0 — средний радиус атома. Уравнение движения оптического электрона в атоме, находящемся в узле кристаллической решетки кварца, под действием периодической силы электрического поля с частотой, лежащей вдали от области поглощения кварца, представим в виде

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U - e\mathbf{E}, \tag{4}$$

где $-\nabla U = -\mathbf{f}_0\sin(\frac{2\pi}{r_0}r)$ — „усредненная“ возвращающая сила кристаллической решетки. Умножим уравнение (4) на $-eN$ и разделим на массу электрона m, получаем уравнение для поляризации

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} = -\mathbf{f}_m\sin(\mathbf{q}\mathbf{P}) + \nu_e^2\mathbf{E}, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}_m = eN\mathbf{f}_0/m$, $\mathbf{q} = \mathbf{1}(2\pi/r_0eN)$, $\nu_e^2 = e^2N/m$. Система уравнений (3)–(5) описывает нелинейные моды оптического волокна.

Получив решение для электрического поля из (3)–(5), магнитное поле можно найти из (1):

$$\mathbf{B} = -c\nabla \times \int dt\mathbf{E}. \tag{6}$$

Найдем решение системы (3)–(5) в простейшем случае TM-мод оптического волокна со ступенчатым профилем показателя преломления [1]. Полагаем, что в цилиндрической системе координат, в которой координата z направлена вдоль оси волокна, $\mathbf{E} = \mathbf{1}_r E(z,t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{1}_r P(z,t)$. Тогда, учитывая, что $\nabla\mathbf{P} = 0$, из (3)–(5) получаем систему уравнений

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$
$$\frac{d^2P}{dt^2} + f_m \sin(qP) = \nu_e^2 E. \tag{7}$$

Предположим, что зависимость компонент поля для однородного волнового пакета со стационарным профилем является периодической по продольной координате и времени [7]: $E = E_0\exp(i\phi)$, $B = B_0\exp(i\phi)$, $P = P_0\exp(i\phi)$, где $\phi = \omega t - \beta z$. Тогда из ((7)-1) получаем уравнение

$$\left(-\beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)E = -\frac{4\pi}{c^2}\omega^2 P,$$

откуда выражаем электрическое поле

$$E = -\frac{4\pi\omega^2}{\omega^2 - c^2\beta^2}P. \tag{8}$$

Подставляя (8) в ((7)-2) и переходя к переменной ϕ, получаем уравнение для поляризации

$$\frac{d^2P}{d\phi^2} + f_S\sin(qP) + a_0P = 0, \tag{9}$$

где $f_S = f_m/\omega^2$, $a_0 = \omega_e^2/(\omega^2 - c^2\beta^2)$. Проинтегрируем уравнение (9) с начальными условиями $P(\phi = 0) = 0$, $(dP/d\phi)_0 = \xi = \mathrm{const}$ и получим первый интеграл

$$\left(\frac{dP}{d\phi}\right)^2 = \xi^2 + \frac{2f_S}{q}\left[\cos(qP) - 1)\right] - a_0P^2. \tag{10}$$

Если напряженность электрического поля мала, то $qP \ll 1$ и из уравнения (10) легко найти второй интеграл

$$\phi = \pm \int \frac{dP}{\sqrt{\xi^2 - (a_0 + f_S q)P^2}} = \begin{cases} \arcsin(P/b_0), \\ \arccos(P/b_0), \end{cases}$$

где $b_0 = \xi/\sqrt{a_0 + f_S q}$. В этом случае, как известно, поляризация линейная и описывается гармоническими функциями

$$P = \begin{cases} b_0 \sin(\sqrt{a_0 + f_S q}\,\phi), \\ b_0 \cos(\sqrt{a_0 + f_S q}\,\phi). \end{cases} \qquad (11)$$

Для учета нелинейных свойств поляризации учтем следующий член в разложении косинуса, тогда из (10) получаем

$$\phi = \pm \int \frac{dP}{\sqrt{\xi^2 - (a_0 + f_S q)P^2 + (f_S q^3/12)P^4}}.$$

Этот интеграл имеет вид

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{a} F\left(\widetilde{\varphi}, \frac{b}{a}\right),$$

где $F(\widetilde{\varphi}, b/a)$ — эллиптический интеграл 1 рода, $\widetilde{\varphi} = \arcsin(x/b)$, постоянные a, b определяются соотношениями: $a^2 b^2 = 12\xi^2/f_S q^3$, $a^2 + b^2 = 12(a_0 + f_S q)/f_S q^3$. Отсюда находим

$$a^2 = \frac{\xi^2}{(a_0 + f_S q)/2 \pm \sqrt{(a_0 + f_S q)^2/4 - \xi^2}},$$

$$b^2 = \frac{6(a_0 + f_S q)}{f_S q^3} \pm \sqrt{\frac{36(a_0 + f_S q)^2}{f_S^2 q^6} - \frac{12\xi^2}{f_S q^3}}.$$

Тогда, обращая эллиптический интеграл, получаем выражение для нелинейной поляризации

$$P = \pm b \,\mathrm{sn}\,(a\sqrt{f_S q^3/12}\;\phi, b/a). \qquad (12)$$

Выражение для электрического поля найдем, подставляя (12) в (8):

$$E_r = \mp \frac{4\pi\omega^2 b}{\omega^2 - c^2\beta^2} \operatorname{sn}\left(a\sqrt{f_S q^3/12}\,\phi,\, b/a\right). \qquad (13)$$

Найдем выражение для магнитного поля TM-мод из (6), подставляя (13):

$$B_\varphi = -c\,\frac{\partial}{\partial z}\int dtE = \mp\frac{4\pi\omega c\beta b^2}{a(\omega^2 - c^2\beta^2)}\,\frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(u)}{\sqrt{\operatorname{dn}^2(u) + b^2/a^2 - 1}}$$

$$= \mp\frac{4\pi\omega c\beta b}{\omega^2 - c^2\beta^2} \operatorname{sn}\left(a\sqrt{f_S q^3/12}\,\phi,\, b/a\right). \qquad (14)$$

Вектор Пойнтинга, характеризующий плотность потока энергии электромагнитного поля в волокне, в рассматриваемом случае равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{1}_z E_r B_\varphi$$

$$= \mathbf{1}_z\,\frac{4\pi\omega^3 c^2\beta b^2}{(\omega^2 - c^2\beta^2)^2} \operatorname{sn}^2\left(a\sqrt{f_S q^3/12}\,\phi,\, b/a\right). \qquad (15)$$

Таким образом, электромагнитное поле в общем случае распространяется в оптическом волокне в виде волновых пакетов, представляющих собой набор кноидальных (периодических) волн, которые лишь в частном случае слабого поля вырождаются в гармонические волны — линейные моды волокна. Критическое значение интенсивности электромагнитного поля, при котором моды волокна становятся нелинейными, имеет величину $I \sim 10^{12}$ W/cm^2 [2].

Список литературы

[1] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.

[2] *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.

[3] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.

[4] *Золотовский И.О., Семенцов Д.И.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 14. С. 1–5.
[5] *Rosas D., Law C.T., Swartzlander G.A., Jr.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1997. V. 14. N 11. P. 3054–3065.
[6] *Kivshar Y.S., Nepomnyashchy A., Tikhonenko V., Christou J., Luther-Davies B.* // Optics Letters. 2000. V. 25. N 2. P. 123–125.
[7] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.