01;07

Рождение, уничтожение и эволюция непараксиальных оптических вихрей. Сингулярные пучки высших порядков

© А.В. Воляр, Т.А. Фадеева

Таврийский национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина

Поступило в Редакцию 27 марта 2001 г.
В окончательной редакции 26 июня 2001 г.

Рассмотрены точные решения скалярного волнового уравнения Гельмгольца, описывающие непараксиальные модовые пучки высших порядков. Для того чтобы эти решения согласовывались с решениями параболического волнового уравнения, сформулированы смягченные приближенные граничные условия. В соответствии с ними параксиальные и непараксиальные волновые функции превращаются друг в друга в параксиальном пределе $kz_0 \gg 1$ вдали от фокальной каустики: $z \gg z_0$ или же вблизи нее. Изучено поведение модовых пучков с различными азимутальным и радиальным индексами мод.

На возможность параксиального перехода между волновыми функциями параксиальных и непараксиальных модовых пучков высших порядков указывали еще в 70-х и 80-х годах авторы работ [1–5]. Однако более подробный анализ показал, что эта проблема не имеет очевидных решений. Так, в работе [6] отмечено, что не существует относительно простых способов получения указанного соответствия. Тем не менее недавно мы уже показали [7], что параксиальный переход будет выполняться, если несколько переформулировать приближенные граничные условия, потребовав согласования непараксиальных пучков с собственными модами оптического волокна только в окрестности плоскости перетяжки (если предположить, что там расположен входной торец световода). Такое согласование полей мод свободного пространства и волокна указывает на возможность использования несколько смягченной формулировки приближенных граничных условий в смысле Дэвиса [8]. С другой стороны, параксиальные модовые пучки невозможно представить через единичные волновые поля, удовлетворяющие волновому уравнению Гельмгольца, а их комбинация также не позволяет получить параксиального соответствия на всей оптической оси из-за различия топологических фаз [9].

Целью данной работы явилось изучение свойств непараксиальных световых пучков высших порядков и условий, при которых они способны преобразовываться в свои параксиальные аналоги.

Рассмотрим решение скалярного волнового уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0 \tag{1}$$

в виде [1,2]:

$$\Psi_m^{(l)} = A_m^{(l)} P_m^{(l)}(\cos\theta) j_m(kR) \begin{pmatrix} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $P_m^{(l)}(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, $j_m(kR)$ — сферические функции Бесселя первого рода m-го порядка, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + iz_0)^2}$ — комплексный радиус, $\cos\theta = \frac{(z+iz_0)}{R}$, $A_m^{(l)}$ — нормировочный множитель, k — волновое число, φ — азимутальный угол. Потребуем, чтобы суперпозиция волновых функций (2) непараксиального сингулярного пучка в параксиальном приближении $kz_0 \gg 1$ превращалась в волновую функцию параксиального пучка:

$$\tilde{\Psi}_p^{(q)} = \mathcal{R}^l L_p^{(q)}\left(2|\mathcal{R}|^2\right) \frac{1}{\xi} \exp\left(-\mathcal{R}^2\right) \begin{pmatrix} \cos q\varphi \\ \sin q\varphi \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\mathcal{R}^2 = \frac{r^2}{\tilde{\rho}^2 \xi}$, $\xi = 1 - i\frac{z}{z_0}$, $r^2 = x^2 + y^2$, а обобщенные полиномы Лагерра имеют вид:

$$L_p^{(q)}\left(2|\mathcal{R}^2|\right) = p! \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{p+q}{p-s} \frac{1}{s!} 2|\mathcal{R}|^{2s}. \tag{4}$$

Зададим присоединенные полиномы Лежандра в волновой функции (2) как:

$$P_m^l(\mu) = \frac{(2m)}{2^m m!(m-l)} (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}l} \left\{ \mu^{m-l} - \frac{(m-l)(m-l-1)}{2(2m-1)} \mu^{m-l-2} \right.$$
$$\left. + \frac{(m-l)(m-l-1)(m-l-2)(m-l-3)}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} \mu^{m-l-4} - \ldots \right\}, \tag{5}$$

где $\mu = \cos\theta = \frac{(z+iz_0)}{R}$. Из полученного выражения следует, что не из всех частных решений (2) уравнения (1) можно построить требуемую волновую функцию (3). Дело в том, что присоединенные полиномы Лежандра (5) выражаются через аргумент $(\cos\theta)^{m-l-2N}$. Но в аргумент полиномов Лагерра (4) входит переменная $\left(\frac{r}{w}\right)^2 \propto \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \sin^2\theta$. Следовательно, для построения волновой функции комбинированного пучка необходимо использовать такие индексы l и m, которые позволяют выражать полиномы Лежандра (5) через $\sin\theta$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие отбора для волновых функций: $2p + l = m$ и $l = q$. Этот вывод существенно ограничивает спектр непараксиальных пучков, соответствующих выбранным граничным условиям. Последнее соотношение $l = q$ есть не что иное, как закон сохранения топологического заряда сингулярного пучка при его острой фокусировке.

Представим комплексный радиус R пучка в виде ряда по степеням величины $\frac{r^2}{(z+iz_0)^2}$:

$$R = \sqrt{r^2 + (z + iz_0)^2} \approx z + iz_0 + (1/2)r^2/(z + iz_0). \tag{6}$$

При подстановке R в бесселевы функции, как правило [7], в аргументе тригонометрических функций оставляют два члена ряда Тейлора в комплексном радиусе R в (6), в то время как при подстановке в знаменатель ограничиваются только его первым членом $R \approx z + iz_0$. Тогда в параксиальной асимптотике имеем

$$Aj_m(kR) \approx i^m \tilde{\Psi}_0^{(0)}(r, z, z_0), \quad A = \frac{kz_0}{\mathrm{sh}(kz_0)} \tag{7}$$

для всей оптической оси. Следует заметить, что эти соотношения хорошо выполняются даже для относительно малых радиусов перетяжки пучка $kz_0 \geqslant 10$ или $z_0 \geqslant 1\,\mu$m.

Полученные выражения позволяют непосредственно сравнивать суперпозицию присоединенных полиномов Лежандра с обобщенными полиномами Лагерра.

Для "несимметричных" волновых функций необходимо, чтобы аргументы полиномов Лежандра были действительными величинами. Это условие выполняется с достаточно большой точностью: 1) для малой области оптической оси вблизи плоскости перетяжки $z = 0$, где $z + iz_0 \approx i\left(\frac{k\rho}{2}\right)w = i\left(\frac{k\rho}{2}\right)\rho\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$, и 2) для значительной части оптической оси $z \gg z_0$, где $z + iz_0 \approx \pm aw = \frac{z}{|z|}aw$, $a = \sqrt{\frac{kz_0}{2}}$. Приведенные

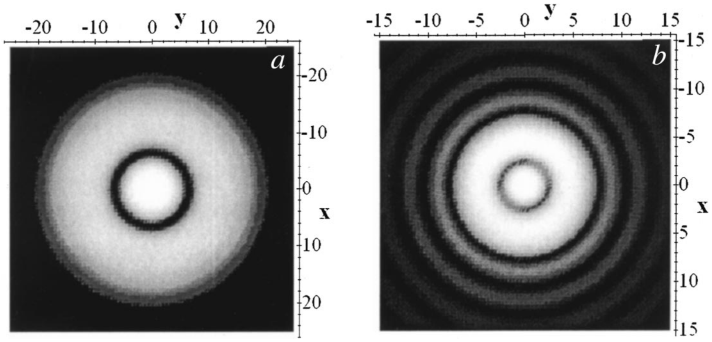

Рис. 1. Распределение интенсивности (a, b), модуля амплитуды (c, d, e) и фазы (f) в непараксиальном модовом пучке (кривая *1*) и аналогичном параксиальном пучке (кривая *2*) Лагерра–Гаусса с индексами $m = 1$, $l = 0\,(d, e)$ и $m = 2$, $l = 0$: a, c — $kz_0 = 3$, $kz = 0$; b, e, f — $kz_0 = 10$, $kz = 10$; d — $kz_0 = 10$, $kz = 0$. Амплитуда волновой функции измеряется в относительных единицах, пространственные координаты на всех рисунках заданы в единицах волнового числа $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Расчеты для фигур, представленных на рис. 1 и 2, проводились в соответствии с выражениями (2), (3), (7, a) с привлечением соответствующих значений коэффициентов $C_m^{(l')}$ из примеров 1, 2 и 3.

приближения для комплексного радиуса можно рассматривать как два типа смягченных граничных условий.

Теперь запишем волновую функцию непараксиального пучка в виде

$$\Psi_{2p+q}^{(q)} = \sum_{l'=0}^{q} \sum_{m=0}^{2p+q} C_m^{(l')} P_m^{(l')}(\cos\theta) j_m(kR) \begin{Bmatrix} \cos l'\varphi \\ \sin l'\varphi \end{Bmatrix} \tag{7a}$$

и потребуем, чтобы выполнялось приближенное тождество:

$$\tilde{\Psi}_p^q(x, y, z, z_0) \cong \Psi_{2p+l}^l(x, y, z, z_0)\big|_{kz_0 \gg 1}. \tag{8}$$

Рассмотрим несколько практически важных случаев.

1) Пусть $l = 0$, p — четное число. Используем приближенное тождество (8), выражение (7) и остановимся на граничных условиях первого рода, рассматривая согласование полей в плоскости перетяжки.

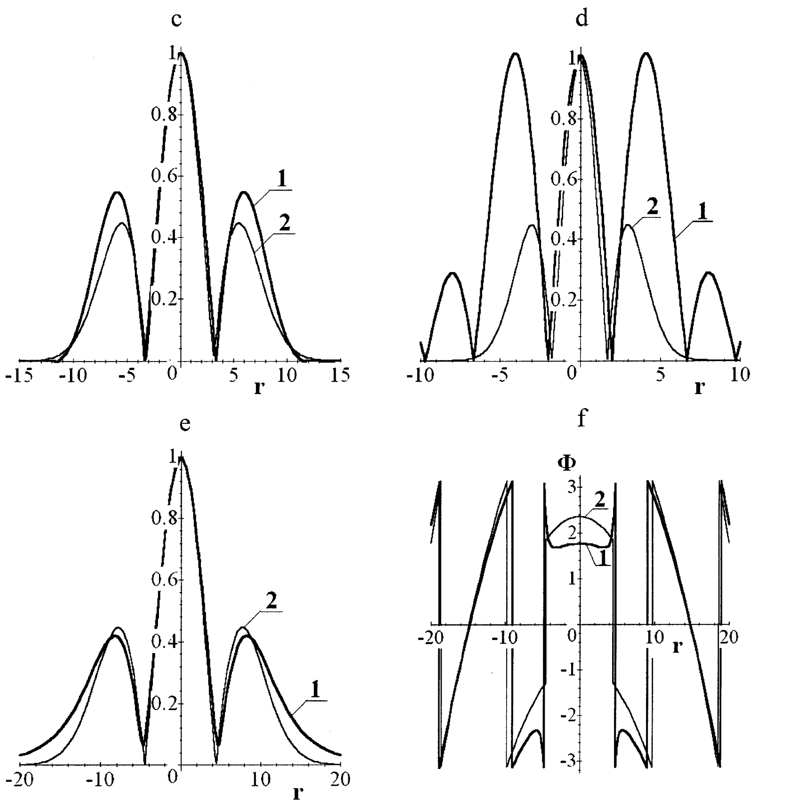

Рис. 1 (*продолжение*).

Например, пусть $p = 1$. Тогда $L_1^{(0)} = 1 - 2\frac{r^2}{w^2}$, $P_0^{(0)} = 1$, $P_2^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(2 - 3\frac{r^2}{R^2}\right)$. Из тождества (9) находим значения коэффициентов: $C_0 = 1 - C_2$, $C_2 = \frac{2}{3}kz_0$.

На рис. 1 приведены картины распределения интенсивности, модуля амплитуды и фазы поля волновой функции данного непараксиального пучка. Обращает на себя внимание тот факт, что при сравнительно малых значениях длины Рэлея $kz_0 < 5$ высота второго максимума оказывается сравнимой с главным максимумом. Кроме того, координаты главного нуля в непараксиальном и параксиальном пучках не совпадают.

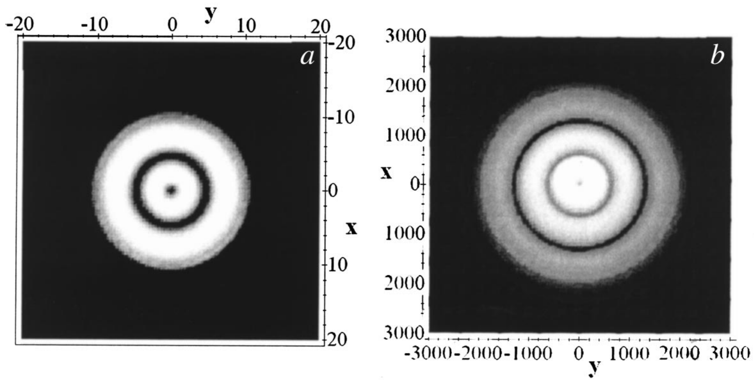

Рис. 2. Распределение интенсивности (a, b), модуля амплитуды (c, d, e) и фазы (f) в непараксиальных (кривая *1*) и параксиальных (кривая *2*) сингулярных модовых пучках, переносящих оптические вихри: a, c, e — $m = 1$, $l = 1$; b, d, f — $m = 2$, $l = 1$. А именно: a — $kz_0 = 10$, $kz = 0$; b — $kz_0 = 30$, $kz = 3000$; c — $kz_0 = 10$, $kz = 50$; d — $kz_0 = 30$, $kz = 300$; e — $kz_0 = 10$, $kz = 550$; f — $kz_0 = 30$, $kz = 3000$.

По мере возрастания длины Рэлея $(kz_0 < 5)$ распределение интенсивности и фазы в непараксиальном пучке начинает довольно хорошо согласовываться с профилем интенсивности и фазы пучка Лагерра–Гаусса.

2) Пусть l и p — нечетные числа. Вновь воспользуемся тождеством (8), приближенными граничными условиями второго рода. Например, при $p = 1$, $l = 1$ имеем $L_1^{(1)} = -2\big(1 - \frac{r^2}{w^2}\big)$, $P_1^{(1)} = \frac{r}{R}$, $P_3^{(1)} = -\frac{3}{2}\frac{r}{R}\big(4 - 5\frac{r^2}{R^2}\big)$. Тогда находим коэффициенты волновой функции в виде:

$$C_1^{(1)} = i2\,\frac{z}{|z|}\,a\left(1 - \frac{12}{15}\,a\right), \quad C_3^{(1)} = i\,\frac{4}{15}\,\frac{z}{|z|}\,a^3.$$

Эволюцию контура амплитуды волновой функции иллюстрирует рис. 2.

3) Пусть теперь l — нечетное, p — четное, например, $l = 1$, $p = 2$. Решим эту задачу для приближенных граничных условий первого рода, рассматривая согласование пучков вблизи плоскости перетяжки. Тогда

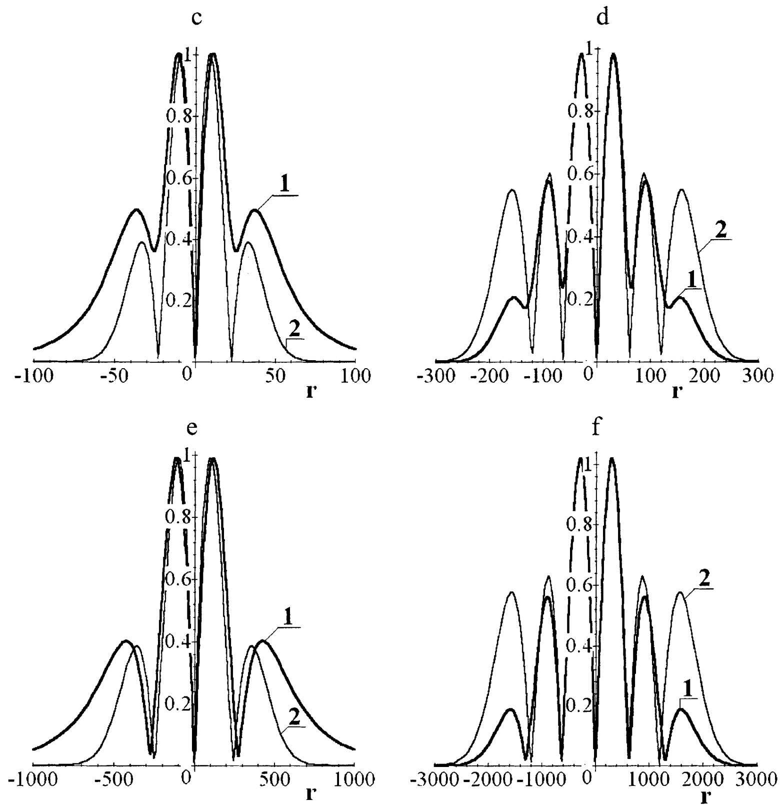

Рис. 2 (*продолжение*).

имеем

$$L_2^{(1)} = 4\left(\frac{r}{w}\right)^4 - 12\left(\frac{r}{w}\right)^2 + 6, \quad P_5^{(1)} = \frac{21}{8}\,\frac{r}{R}\left\{5 - 40\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 15\left(\frac{r}{R}\right)^4\right\},$$

$$C_1^{(1)} = -i6\,\frac{z}{|z|}\,a\left(1 - \frac{5}{2}\,a^2 + 2a^4\right),$$

$$C_3^{(1)} = -i2\,\frac{z}{|z|}\,a^3\left(1 - \frac{8}{9}\,a^2\right), \quad C_5^{(1)} = -\frac{z}{|z|}\,\frac{32}{315}\,a^5.$$

Следует учитывать тот факт, что с ростом индексов p и l снижается степень согласования результатов, полученных на основе параксиального и непараксиального подходов. Это выражается в том, что кривые *1* и *2* (рис. 2, *c, d, e, f*), соответствующие непараксиальному (кривая *1*) и параксиальному (кривая *2*) случаям, практически совпадают на сравнительно больших расстояниях от перетяжки (рис. 2, *e*) и для малых значений модовых индексов ($l = p = 1$), в то время как вблизи фокальной плоскости степень рассогласования профилей пучков увеличивается (рис. 2, *c*). Профили модовых пучков с более высокими значениями индексов в окрестности фокальной плоскости очень слабо согласуются. Например, это хорошо видно из рис. 2, *d*, где о частичном согласовании профилей пучков с $p = 2$ и $l = 1$ можно судить только по совпадению координата нулей интенсивности. Для того чтобы достигнуть хорошего соответствия между пучками с более высокими значениями модовых индексов, необходимо удалиться от фокальной плоскости на достаточно большое расстояние $kz \gg kz_0$, составляющее несколько сотен и тысяч длин волн (рис. 2, *f*). Заметим, что степень согласования между параксиальными и непараксиальными пучками практически перестает зависеть от длины Рэлея, если $kz_0 > 50$.

В заключение можно отметить, что вследствие модовой дисперсии состояний световых пучков элементарные пучки, входящие в состав волновой функции, имеют различные фазовые скорости вдоль оси z, поэтому мы можем получить строгое соответствие между параксиальной и непараксиальной волновой функцией только на небольших отрезках оптической оси. По-видимому, не существует способа, основанного на линейных преобразованиях, позволяющего согласовывать параксиальный и непараксиальный пучок во всем пространстве.

Работа выполнена в рамках проекта Р-051 Научно-исследовательской лаборатории ВВС США (EOARD).

Список литературы

[1] *Felsen L.B.* // J. Opt. Soc. Am. 1976. V. 66. N 8. P. 751–760.
[2] *Siegman A.E.* // J. Opt. Soc. Am. 1973. V. 63. N 9. P. 1093–1094.
[3] *Shin S.Y., Felsen L.B.* // J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. N 5. P. 699–700.
[4] *Coutare M., Belanger P.A.* // Phys. Rev. A. 1981. V. 24. N 1. P. 355–359.
[5] *Zauderer E.* // J. Opt. Soc. Am. 1986. V. 3. N 4. P. 465–469.

[6] *Sheppard C., Saghafi S.* // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. N 4. P. 2971–2979.
[7] *Воляр А.В., Шведов В.Г., Фадеева Т.А.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. № 1. С. 104–112.
[8] *Davis L.W.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. N 3. P. 1177–1779.
[9] *Воляр А.В., Фадеева Т.А., Шведов В.Г.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 5. С. 87–95.