01

Электромагнитный солитон огибающей, распространяющийся в диэлектрике

© А.Н. Волобуев, В.А. Неганов

Самарский государственный университет
Поволжская государственная академия
телекоммуникаций и информатики, Самара
E-mail: volobuev@samaramail.ru

Поступило в Редакцию 5 сентября 2001 г.

На основе рассмотрения взаимодействия электромагнитного излучения с диэлектриком получено нелинейное уравнение Шредингера, имеющее логарифмическую нелинейность. Найдено односолитонное решение этого уравнения. Показано, что импульс электромагнитной волны имеет огибающую, изменяющуюся по гауссовскому закону. Дан расчет импульса для определенных параметров вещества и падающей волны.

Рассмотрим одномерную задачу взаимодействия электромагнитного поля с веществом диэлектрика, в котором имеется определенная числовая концентрация n центрально-симметричных атомов — осцилляторов. Волновое уравнение для электрической составляющей поля E можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{n}{\varepsilon_0 V^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \tag{1}$$

В уравнении (1) введены следующие обозначения: P — вектор поляризации для одного атома, V — фазовая скорость света в веществе, ε_0 — электрическая постоянная, X — координата в направлении распространения волны, t — время.

В соответствии с 2-м законом Ньютона для осциллятора имеем [1]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_0^2 P = \frac{e^2}{m} NE, \tag{2}$$

где e и m — заряд и масса электронов, N — вероятность возбуждения атома, ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора.

Подставляя (2) в (1), найдем

$$\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m V^2} NE - \frac{n\omega_0^2 P}{\varepsilon_0 V^2} = \frac{1}{V^2}\left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} N - \omega_0^2 \chi\right) E, \qquad (3)$$

где $\chi = \frac{nP}{\varepsilon_0 E}$ — диэлектрическая восприимчивость вещества.

Введем преобразование напряженности электрического поля по формуле

$$E(X, t) = \Phi(X, t)\exp(-i\omega_0 t). \qquad (4)$$

Функция $\Phi(X, t)$ является более медленно меняющейся во времени, чем $E(X, t)$.

Подставляя (4) в (3) и пренебрегая слагаемым $(1/V^2)$ порядка малости, найдем

$$2i\frac{\omega_0}{V^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = -\left(\frac{\varepsilon\omega_0^2}{V^2} - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m V^2} N\right)\Phi, \qquad (5)$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ — относительная диэлектрическая проницаемость вещества, величина $\omega_0 \sim V$,

При падении электромагнитной волны на поверхность вещества взаимодействие электромагнитной волны с веществом подчиняется закону Бугера

$$I = I_0 \exp(-\alpha l), \qquad (6)$$

где α — показатель взаимодействия электромагнитной волны с веществом, l — длина слоя взаимодействия, I_0 — интенсивность падающей волны. Поглощением электромагнитных волн в смысле диссипации их энергии в веществе пренебрегаем. Считаем, что происходит только переизлучение электромагнитной волны атомами.

Учитывая, что интенсивность волны $I \sim E^2$, найдем

$$|E| = |E_0|\exp\left(-\frac{\alpha}{2} l\right). \qquad (7)$$

Показатель взаимодействия равен $\alpha = \sigma n$, где σ — эффективное сечение взаимодействия осциллятора с волной. Следовательно,

$$\alpha l = \sigma n l = n V_{ef} = nV\frac{V_{ef}}{V} = M\frac{V_{ef}}{V} = MN, \qquad (8)$$

где V_{ef} — эффективный объем взаимодействия. При выводе (8) правая часть формулы умножена и разделена на геометрический объем V, в котором находится M взаимодействующих с волной частиц. Отношение

$\frac{V_{ef}}{V} = N$, так как отношение эффективного объема взаимодействия к геометрическому объему характеризует вероятность взаимодействия электромагнитной волны с частицей, т. е. вероятность возбуждения атома.

Используя соотношение (4) и (7), можно найти

$$N = -\frac{2}{M} \ln\left|\frac{E}{E_0}\right| = -\frac{2}{M} \ln\left|\frac{\Phi}{\Phi_0^*}\right|, \tag{9}$$

где величина $E_0 = \Phi_0^* \exp(-i\omega_0 t)$.

Так как в уравнении (1) вектор поляризации P записан для одного атома, принимаем $M = 1$.

Формула (9) требует некоторого обсуждения. Если $E < E_0$, что отражает процесс поглощения волны атомом, то $N > 0$ и классическое рассмотрение взаимодействия электромагнитной волны с атомом вполне приемлемо. Случай $E > E_0$ отражает процесс переизлучения волны. При этом $N < 0$ и величину N уже нельзя трактовать как вероятность возбуждения атома. В этом случае необходимо квантово-механическое рассмотрение процесса взаимодействия волны с двухуровневой энергетической системой атомов. Величина N в этом случае носит название среднего по атомам числа заполнения ($-1 < N < 1$, так как электроны — фермионы), которое дает меру инверсии системы атомов-излучателей [2]. При $N = -1$ все заряды находятся в основном состоянии [1].

Подставляя (9) в (5) и учитывая, что $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества, находим

$$2i\,\frac{\omega_0}{V^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} = -\left(\frac{\varepsilon\omega_0^2}{V^2} + \frac{2\varepsilon ne^2}{\varepsilon_a mV^2}\ln\left|\frac{\Phi}{\Phi_0^*}\right|\right)\Phi. \tag{10}$$

Обозначим

$$\omega_*^2 = \frac{2ne^2}{\varepsilon_a m}. \tag{11}$$

В результате найдем

$$i\beta\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{V_n}{k}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} = -\omega\left(\ln\left|\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|\right)\Phi, \tag{12}$$

где $\beta = 2\frac{r}{k}$, r и δ — постоянные величины, $V_n = \frac{\omega}{k}$ — групповая скорость волнового пакета $|\Phi_0| = |\gamma\Phi_0^*|$, а величина $\gamma = \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{\omega_*^2}\right)$.

Решение уравнения (12) можно найти, следуя [3], в виде

$$\Phi = |\Phi_0| f(kX - \omega t) \exp\left[i(rX - \delta t)\right]. \tag{13}$$

После подстановки (13) в (12) и ряда преобразований получим:

$$\Phi = |\Phi_0| \exp\left(\frac{r^2}{k^2} - 2\,\frac{\delta r}{\omega k} + \frac{1}{2}\right) \times \exp\left[-\frac{(kX - \omega t)^2}{4}\right] \exp\big[i(rX - \delta t)\big]. \tag{14}$$

Решение (14) описывает уединенную волну, имеющую огибающую, которая подчиняется гауссовскому закону.

При этом выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\omega}{rk} = \frac{V^2}{\omega_0}; \quad \frac{V_n}{r} = \frac{V^2}{\omega_0}; \quad \frac{\varepsilon\omega_*^2}{\omega_0} = \frac{\omega k}{r}; \quad \frac{\omega}{r} = \frac{\omega_* V\sqrt{\varepsilon}}{\omega_0}.$$

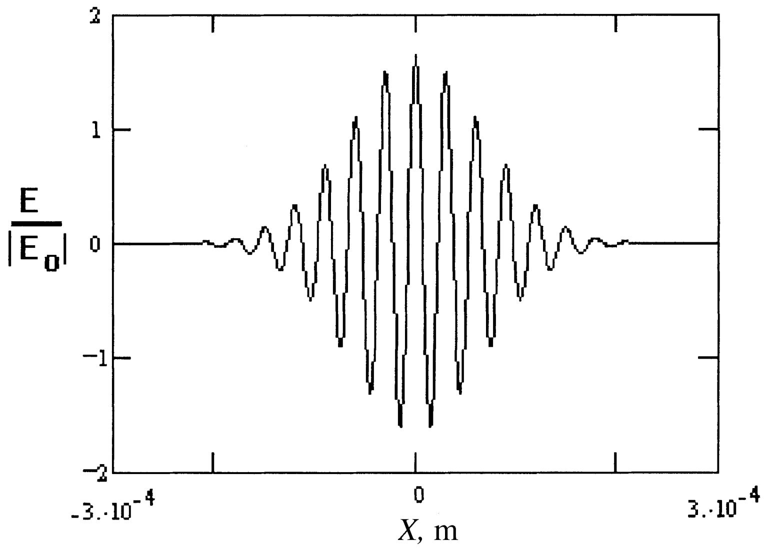
Наиболее простой вид решение (14) принимает в случае $V_n \approx V \approx c$, где c — скорость света в вакууме. Это справедливо в разреженном диэлектрике, так что $\varepsilon \approx 1$. В этом случае $r = \frac{\omega_0}{c}$; $\omega_* = \omega$; $\frac{r}{k} = \frac{\omega_0}{\omega_*}$. Учитывая $|\Phi_0| = |\gamma \Phi_0^*|$ и (4), получаем

$$E = |E_0| \exp\left(\frac{1}{2} - 2\,\frac{\delta r}{\omega k}\right) \exp\left[-\frac{(kX - \omega t)^2}{4}\right] \exp\big[i(rX - \delta t - \omega_0 t)\big]. \tag{15}$$

Кроме того, учитывая, что волна заполнения, как и весь волновой пакет, распространяется со скоростью c, из $r = \frac{\omega_0}{c}$ следует, что $\delta = 0$. Следовательно, формула (15) преобразуется к виду

$$E = |E_0| \exp\left(\frac{1}{2}\right) \exp\left[-\frac{(kX - \omega t)^2}{4}\right] \exp\big[i(rX - \omega_0 t)\big]. \tag{16}$$

Проведем некоторые численные оценки. Современные лазеры генерируют импульсы длительностью $T = 10^{-9} \div 10^{-12}$ s [2,4]. Это соответствует диапазону циклических частот $\omega = 2\pi/T = 6.28(10^9 \div 10^{12})\,\mathrm{s}^{-1}$. Учитывая $\omega_* = \omega$, а также (11), найдем числовую концентрацию атомов $n = 6.2(10^{15} \div 10^{21})\,\mathrm{m}^{-3}$. Учитывая, что в воздухе при нормальных условиях числовая концентрация молекул $2.7 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$, предположение о разреженности диэлектрической среды справедливо.



Полученная числовая концентрация атомов указывает на возможность игнорирования обратного рассеивания электромагнитных волн. При этом должно быть $n < 10^{24}\,\mathrm{m}^{-3}$ [2]. Следовательно, уравнение (16) может описывать солитон, возникающий при явлении самоиндуцированной прозрачности.

Для расчета примем $\omega = 6.28 \cdot 10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}$. Это соответствует длине волнового пакета $\lambda = 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Период волны заполнения примем $T = 10^{-13}\,\mathrm{s}$, что соответствует циклической частоте $\omega_0 = 6.28 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$. Кроме того, найдем волновые числа $k = \frac{\omega}{c} = 2.1 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^{-1}$ и $r = \frac{\omega_0}{c} = 2.1 \cdot 10^5\,\mathrm{m}^{-1}$.

На рисунке показан график зависимости $\frac{E}{|E_0|}(X)$, построенный для предложенных значений постоянных параметров по формуле (16) в момент времени $t = 0$.

Решения (14), (15) и (16) имеют солитонный характер. К сожалению, двухсолитонное решение уравнения (12) пока неизвестно. Однако в [5] было численно проанализировано взаимодействие уединенных волн, описываемых уравнением (12), и показано, что при этом они ведут себя как солитоны.

Список литературы

[1] *Абловиц М.Дж., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи / Пер. с англ. М.: Мир, 1987. С. 343, 374, 375. (Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM. Philadelphia, 1981).

[2] *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Пер с англ. М.: Мир, 1988. С. 588, 590, 601. (Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. Academic Press Inc. London, 1984).

[3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны / Пер. с англ. М.: Мир, 1977. С. 575. (Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. J. Wiley, New York, 1974).

[4] *Лэм Дж.Л.* Введение в теорию солитонов / Пер. с англ. Могилев: Бибфизмат, 1997. С. 214. (Lamb G.L. Elements of soliton theory. New York: J. Wiley & Sons, 1980).

[5] *Волобуев А.Н., Неганов В.А., Болочагин В.Ю.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. Самара, 2000. Т. 3. № 1. С. 12.