

01;03

Форма капли в постоянном электрическом поле

© А.А. Шутов

Филиал научно-исследовательского физико-химического института им. Л.Я. Карпова,
249030 Обнинск, Калужская область, Россия
e-mail: fci@meteo.ru

(Поступило в Редакцию 30 ноября 2001 г. В окончательной редакции 6 мая 2002 г.)

Рассчитано изменение формы капли в несмешивающейся жидкости под действием электрического поля. Перенос заряда включает как омический ток через межфазную границу, так и конвективный перенос по поверхности раздела. Рассмотрено квадратичное приближение решения задачи по параметру, являющегося отношением электрического давления к капиллярному. Определены условия трансформации капли в вытянутый или сплюснутый сфероид по отношению к направлению вектора напряженности поля. Выполнено экспериментальное исследование деформации капли электрическими силами.

Введение

Основной результат теоретических и экспериментальных исследований деформации капли в электрическом поле заключается в том, что капля приобретает форму вытянутого, сплюснутого сфероида или не меняет своей формы в зависимости от определенного соотношения диэлектрической проницаемости, проводимости и вязкости жидкостей внутри и вне капли. Теоретическое описание этого явления проводится на основе построения моделей в рамках электрогидродинамики (ЭГД). Постановка задачи о деформации капли в моделях [1–4] не использует граничное условие, связывающее поверхностную плотность заряда со скачком электрической индукции на межфазной границе, что является серьезным дефектом моделей с точки зрения ЭГД. Вместо этого условия используется условие равенства омических токов на границе, а зависимость от диэлектрической проницаемости возникает только из электрических натяжений на границе. Тем не менее рассчитываемая деформация капли в таких моделях адекватно описывает поведение некоторых жидких систем капля-окружающая среда. Например, такие модели верно предсказывают знак деформации очень вязких диэлектрических жидкостей [1,2]. Как правило, капля имеет вид сплюснутого сфероида, если окружающая среда имеет большую проводимость. В обратном случае капля вытягивается вдоль направления поля [2]. Целью настоящей работы является построение модели, которая позволяет выяснить пределы применимости использованных приближений [1–4], а также описать поведение систем, не согласующихся с этой схемой. Предлагаемая модель включает в рассмотрение кинетику поверхностного заряда простого слоя, которая в общем случае учитывает изменение заряда во времени, поверхностную конвекцию и омические потоки на подвижную межфазную границу. Зарядовое соотношение можно получить на основе физических соображений из баланса потоков заряда с учетом деформации поверхности [5]. Более общим методом получения уравнения эволюции поверхностного заряда является процедура осреднения уравнения сохранения объемного

заряда вблизи поверхности раздела. В работе [6] приведено зарядовое уравнение для задачи о пульсирующем двойном электрическом слое. Здесь будет рассмотрена стационарная задача для простого слоя с учетом поверхностной конвекции зарядов [7].

Постановка задачи

Уравнение переноса заряда должно согласовываться с определением поверхностной плотности заряда σ в электродинамике. Плотность σ вводится путем осреднения уравнения $\text{div } \mathbf{D} = \rho_e$ в нормальном направлении к межфазной границе таким образом, что [8]

$$D_{ne} - D_{ni} = \sigma, \quad \sigma = \int_{f-h}^{f+h} \rho_e dN, \quad (1)$$

где \mathbf{D} — электрическая индукция, ρ_e — объемная плотность заряда, dN — элемент длины в нормальном направлении, $N = f$ — уравнение поверхности раздела; единичный вектор нормали \mathbf{n} направлен из среды i в среду e , нижний и верхний пределы интегрирования относятся к жидкостям i и e соответственно.

Проинтегрируем уравнение сохранения объемного заряда в ортогональной системе координат q_1, q_2, q_3 , в которой координаты q_1, q_2 образуют ортогональную сеть на поверхности раздела $q_3 = f(q_1, q_2, t)$. Тогда с учетом (1) получим [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma \sqrt{g_0}) + \frac{\partial}{\partial q_1} (\sigma V_1 \sqrt{g_{11}}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\sigma V_2 \sqrt{g_{22}}) + \sqrt{g_0} (\lambda_e E_{ne} - \lambda_i E_{ni}) = 0, \quad (2)$$

где g_{ii} — элементы метрического тензора поверхности $q_3 = f(q_1, q_2, t)$; $i = 1, 2$; $g_0 = g_{11}g_{22}$.

Элементы g_{ii} определяются следующим образом:

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2; \quad i = 1, 2,$$

где

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (q_1, q_2, q_3 = f(q_1, q_2, t)).$$

В данном случае метрические коэффициенты совпадают с определением метрики поверхности, индуцированной метрикой пространства [9]. В частности, в сферической системе координат r, Θ, ϕ на теле вращения $r = f(\Theta, t)$ координаты Θ, ϕ образуют ортогональную сеть. Элемент длины на такой поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}d\Theta^2 + g_{22}d\phi^2 \\ &= (f^2 + f'^2)d\Theta^2 + f^2 \sin^2 \Theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначено $f' = \partial f / \partial \Theta$.

Рассмотрим стационарную осесимметричную задачу о форме капли, взвешенной в несмешивающейся жидкости, в однородном электрическом поле. Начало сферической системы координат расположено в центре капли, форма которой есть шар радиуса r_0 в отсутствие поля. Угол Θ отсчитывается от направления вектора напряженности поля E_0 . Радиус капли зависит только от Θ , поступательное движение капли отсутствует. Предполагаем, что электрический ток в жидкостях протекает в отсутствие объемного заряда.

Безразмерные переменные, обозначаемые чертой над символом, вводятся соответственно для радиуса, давления, скорости, напряженности поля, электрического потенциала и поверхностного заряда следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{r_0}, \quad \bar{p} = \frac{pr_0}{T}, \quad \bar{v} = \frac{\mu_e + \mu_i}{\varepsilon_e \varepsilon_0 E_0^2 r_0} V, \\ \bar{E} &= \frac{E}{E_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{E_0 r_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\varepsilon_e \varepsilon_0 E_0}, \end{aligned}$$

где $E = -\nabla\varphi$; величины $\mu_{e,i}, \varepsilon_{e,i}, \lambda_{e,i}$ обозначают вязкость, диэлектрическую проницаемость и проводимость соответствующей жидкости; T — поверхностное натяжение; ε_0 — диэлектрическая постоянная; индексы i и e относятся к жидкостям внутри и вне капли соответственно.

Безразмерная система уравнений имеет следующий вид:

$$\nabla p_{e,i} = \alpha M_{e,i} \Delta \mathbf{V}_{e,i}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_{e,i} = 0, \quad \Delta \varphi_{e,i} = 0 \quad (4)$$

$$r = f: \quad V_r = V_\Theta \frac{df}{fd\Theta}, \quad (5)$$

$$\alpha\beta \frac{d}{d\Theta} (\sigma V_\Theta f \sin \Theta) + (\lambda E_{ne} - E_{ni}) f^2 \sqrt{1 + \frac{f'^2}{f^2}} \sin \Theta = 0, \quad (6)$$

где

$$\lambda = \frac{\lambda_e}{\lambda_i}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_0 E_0^2 r_0}{T}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_0 T}{\lambda_i (\mu_i + \mu_e) r_0}.$$

Здесь уравнение непроницаемости для стационарного осесимметричного течения вырождается в условие (5),

определяющее границу как поверхность тока. Соотношение (6) есть зарядовое уравнение (2) на межфазной поверхности $r = f(\Theta)$ с метрическими коэффициентами (3). Здесь и далее знак черты над безразмерной величиной опущен. Уравнения (4)–(6) дополняются следующими граничными условиями на поверхности $r = f(\Theta)$:

$$[V_\Theta] = 0, \quad [V_r] = 0, \quad [\varphi] = 0, \quad (7)$$

$$E_{ne} - \varepsilon E_{ni} = \sigma, \quad (8)$$

$$[p]\mathbf{n} - \alpha[M\Pi] = -K\mathbf{n} + \alpha(E_{ne}\mathbf{E}_e - \varepsilon E_{ni}\mathbf{E}_i - (E_e^2 - \varepsilon E_i^2)\mathbf{n}/2),$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow -r \cos \Theta. \quad (9)$$

Здесь $[A] = A_e - A_i$ обозначает скачок величины A . Кривизна K и вектор вязких натяжений Π с компонентами Π_n, Π_τ в нормальном и тангенциальном направлении равны соответственно

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{1}{f} + \frac{d^2}{d\Theta^2} \frac{1}{f} \right) / \left(1 + \frac{f'^2}{f^2} \right)^{3/2} \\ &\quad - \frac{1}{\sin \Theta} \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{\cos \Theta}{f} \right) / \left(1 + \frac{f'^2}{f^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\Pi_n = \left(\tau_{rr} - 2 \frac{f'}{f} \tau_{r\Theta} + \frac{f'^2}{f^2} \tau_{\Theta\Theta} \right) / \left(1 + \frac{f'^2}{f^2} \right),$$

$$\Pi_\tau = \left(\tau_{r\Theta} \left(1 - \frac{f'^2}{f^2} \right) + (\tau_{rr} - \tau_{\Theta\Theta}) \frac{f'}{f} \right) / \left(1 + \frac{f'^2}{f^2} \right),$$

где τ_{ij} — компоненты тензора вязких натяжений в сферической системе координат. Безразмерные параметры в (4)–(9) равны $\varepsilon = \varepsilon_i/\varepsilon_e, \mu = \mu_i/\mu_e, M_i = \mu/(\mu + 1), M_e = 1/(\mu + 1)$.

Взаимодействие электрических и гидродинамических полей в рассматриваемой самосогласованной задаче выглядит следующим образом. Скачок электрической индукции выражается, согласно (8), через поверхностную плотность заряда. Величина σ определяется в процессе решения задачи, причем в соответствии с (6) поверхностная плотность заряда связывает касательную скорость жидкости на границе и электрические поля. Динамическое граничное условие (9) в свою очередь включает в рассмотрение еще давление и поверхностное натяжение. Уравнение (5) определяет заранее неизвестную границу капли. В общем случае в капле и окружающей среде возникает вихревое движение. В некоторых частных случаях движение жидкостей может отсутствовать. На незаряженной границе раздела идеальных диэлектриков или свободной поверхности идеального проводника не возникают касательные электрические силы и рассматриваемая постановка допускает статическое решение, при котором форма капли определяется из баланса нормальных к поверхности сил [10]. Решение

системы (4)–(9) ищем в виде разложения по степеням параметра α

$$f(\Theta) = 1 + \alpha f_1(\Theta) + \alpha^2 f_2(\Theta) + \dots,$$

$$\sigma(\Theta) = \sigma_0(\Theta) + \alpha \sigma_1(\Theta) + \alpha^2 \sigma_2(\Theta) + \dots,$$

$$\Phi(r, \Theta) = \Phi^{(0)}(r, \Theta) + \alpha \Phi^{(1)}(r, \Theta) + \alpha^2 \Phi^{(2)}(r, \Theta) + \dots,$$

где Φ обозначает любую величину p, V, φ .

Разлагая граничные условия по параметру α , входящему также и в f , и выделяя слагаемые при одинаковых степенях, будем иметь в каждом приближении задачу, которая формулируется на $f = 1$. Общая задача (4)–(9) будет решаться до квадратичного приближения включительно. Нулевое приближение формально соответствует отсутствию воздействия поля $E_0 = 0$. В этом приближении капля имеет постоянный радиус $f = 1$ и давление в ней относительно внешней среды равно капиллярному $p_i^{(0)} = 2$. Поскольку последующие приближения будут формулироваться на поверхности $f = 1$, то можно использовать общие решения для сферы. Решение гидродинамической задачи в стоксовом приближении имеет вид [11]

$$p_i = \text{const} + M_i \sum_n (2n+2)(2n+3)a_n \omega_n,$$

$$p_e = \text{const} + M_e \sum_n 2n(n-1)b_n \pi_n,$$

$$\mathbf{V}_i = \sum_n a_n ((n+3)r^2 \nabla \omega_n - 2nr \omega_n) + \sum_n (n+1)c_n \nabla \omega_n,$$

$$\mathbf{V}_e = \sum_n b_n ((2-n)r^2 \nabla \pi_n + 2(n+1)r \pi_n) - \sum_n nd_n \nabla \pi_n,$$

$$\pi_n = r^{-n-1} P_n(\eta), \quad \omega_n = r^n P_n(\eta), \quad (10)$$

где $P_n(\eta)$ — полином Лажандра, $\eta = \cos \Theta$.

Аналогично общее решение уравнения Лапласа для потенциала имеет вид:

$$\varphi_e = -r \cos \Theta + \sum_n B_n P_n / r^{n+1}, \quad \varphi_i = \sum_n C_n P_n r^n. \quad (11)$$

Здесь $a_n, b_n, c_n, d_n, B_n, C_n$ — константы.

Результаты расчета

Система (4)–(9) в первом приближении имеет вид

$$\nabla p_{i,e}^{(1)} = M_{i,e} \Delta \mathbf{V}_{i,e}^{(0)}, \quad \text{div} \mathbf{V}_{i,e}^{(0)} = 0, \quad \Delta \varphi_{i,e}^{(0)} = 0$$

с граничными условиями на $f = 1$

$$V_{\Theta i}^{(0)} = V_{\Theta e}^{(0)}, \quad V_{ri}^{(0)} = V_{re}^{(0)} = 0,$$

$$\lambda E_{re}^{(0)} - E_{ri}^{(0)} = 0, \quad E_{re} - \varepsilon E_{ri} = \sigma_0, \quad (12), (13)$$

$$\varphi_i^{(0)} = \varphi_e^{(0)}, \quad r \rightarrow \infty: \quad \varphi_e^{(0)} \rightarrow -r \cos \Theta,$$

$$\left[M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial \Theta} + \frac{\partial V_{\Theta}^{(0)}}{\partial r} - \frac{V_{\Theta}^{(0)}}{r} \right) \right] = \sigma_0 E_{\Theta}^{(0)},$$

$$\left[p^{(1)} - 2M \frac{\partial V_r^{(0)}}{\partial r} \right] = \frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{df_1}{d\eta} + 2f_1 + \frac{E_{re}^{(0)2} - E_{\Theta e}^{(0)2} - \varepsilon (E_{ri}^{(0)2} - E_{\Theta i}^{(0)2})}{2}. \quad (14)$$

Используя представления (10), (11), находим следующее решение этой задачи:

$$p_i^{(1)} = 14M_i U r^2 P_2(\eta) + \text{const}, \quad p_e^{(1)} = 4M_e U P_2(\eta) / r^3 + \text{const},$$

$$V_{ri}^{(0)} = 2U(r^3 - r)P_2(\eta), \quad V_{\Theta i}^{(0)} = U(3r - 5r^3) \sin \Theta \cos \Theta,$$

$$V_{re}^{(0)} = 2U \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) P_2(\eta), \quad V_{\Theta e}^{(0)} = -2U \frac{1}{r^4} \sin \Theta \cos \Theta,$$

$$\varphi_e^{(0)} = - \left(r + \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1} \frac{1}{r^2} \right) \cos \Theta, \quad \varphi_i^{(0)} = - \frac{3\lambda}{2\lambda + 1} r \cos \Theta,$$

$$U = \frac{9\lambda(1 - \lambda\varepsilon)}{10(2\lambda + 1)^2}, \quad \sigma_0 = 3 \frac{1 - \lambda\varepsilon}{2\lambda + 1} \cos \Theta. \quad (15)$$

Здесь необходимо отметить, что граничное условие (13) для решения задачи первого приближения не используется, а служит лишь для определения плотности σ_0 . Пара условий (13), (14), определяющая поля в классической электродинамике, заменяется в этой постановке условиями (12), (14). Как видно из зарядового уравнения (6), такая ситуация реализуется при $\alpha\beta \ll 1$. Поэтому линейное разложение справедливо только в предельных случаях очень вязких сред или высокой проводимости капли. Вклад первого порядка в радиус капли равен

$$f_1 = F P_2(\eta) = \frac{3}{4(2\lambda + 1)^2} \left(1 + \lambda^2 - 2\lambda^2 \varepsilon + \frac{3}{5} \lambda(1 - \lambda\varepsilon) \frac{3\mu + 2}{\mu + 1} \right) P_2(\eta). \quad (16)$$

Условие $F > 0$ соответствует преобразованию капли в вытянутый сфероид по направлению поля. В обратном случае $F < 0$ капля приобретает форму сплюснутого сфероида [2,3].

В следующем приближении процедура выделения членов одинакового порядка по α связывает квадратичные слагаемые в p и f с линейными членами остальных функций. Во втором порядке имеем аналогичную постановку задачи, однако в отличие от первого приближения

в зарядовом уравнении уже учитывается конвективное слагаемое. Решение электрической задачи имеет вид

$$\varphi_i^{(1)} = A_1 r \cos \Theta + A_2 r^3 P_3, \quad \varphi_e^{(1)} = A_3 \frac{\cos \Theta}{r^2} + A_4 \frac{P_3}{r^4},$$

$$A_1 = W + \frac{18}{5} \frac{\lambda(\lambda-1)}{(2\lambda+1)^2} F, \quad A_2 = 4W \frac{2\lambda+1}{4\lambda+3},$$

$$W = \frac{12}{5} \beta U \frac{1-\lambda\varepsilon}{(2\lambda+1)^2},$$

$$A_3 = A_1 - \frac{6}{5} \frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{(2\lambda+1)^2} F, \quad A_4 = A_2 - \frac{9}{5} \frac{\lambda-1}{(2\lambda+1)^2} F.$$

Используя разложения (10), определяем давления и скорости

$$p_e^{(2)} = \frac{M_e}{r^3} \left(4B_1 P_2 + \frac{56}{5} B_2 \frac{P_4}{r^2} \right),$$

$$p_i^{(2)} = M_i r^2 (14B_5 + 22B_6 r^2 P_4),$$

$$V_{re}^{(1)} = \frac{2P_2}{r^2} \left(B_1 + \frac{B_3}{r^2} \right) + \frac{2P_4}{r^4} \left(2B_2 + \frac{B_4}{r^2} \right),$$

$$V_{\Theta e}^{(1)} = \frac{2 \sin \Theta \cos \Theta}{r^4} \left(B_3 + \frac{1}{3} \left(B_2 + \frac{B_4}{r^2} \right) (7P_2 - 1) \right),$$

$$V_{ri}^{(1)} = 2P_2 (B_5 r^3 + B_7 r) + 2P_4 (2B_6 r^5 + B_8 r),$$

$$V_{\Theta i}^{(1)} = -\sin \Theta \cos \Theta \left(5B_5 r^3 + 3B_7 r + \frac{7}{3} \left(B_6 r^5 + \frac{5}{4} B_8 r^3 \right) (7P_2 - 1) \right).$$

Коэффициенты B_n связаны между собой следующими соотношениями:

$$B_1 = 3FU - \frac{6}{35} FUG - \frac{3}{5} FU \frac{14\lambda+1}{2\lambda+1} - \frac{3}{70} W \frac{40\lambda^2(2\varepsilon-1) + 54\varepsilon\lambda - 130\lambda - 69}{(2\lambda+1)(4\lambda+3)},$$

$$B_2 = \frac{23}{21} FU - \frac{10}{21} W \frac{6\varepsilon\lambda + 4\lambda - 3}{4\lambda+3},$$

$$\frac{B_1+B_3}{2} = \frac{B_1+B_5}{5} = -\frac{B_1+B_7}{3} = \frac{2B_2+B_4}{17} = \frac{B_2+B_6}{3} = \frac{2B_2+B_8}{6} = -\frac{1}{7} FU.$$

С учетом первого и второго приближения имеем следующее выражение для зависимости радиуса капли от широтного угла:

$$f = 1 + \alpha A_{12} P_2 + \alpha^2 (A_{20} + A_{22} P_2 + A_{24} P_4), \quad (17)$$

где

$$A_{22} = \frac{79-94\lambda}{35(2\lambda+1)} F^2 + \frac{1}{4} \left(5+3G - \frac{6}{35} G^2 \right) FU + \frac{W}{14} \left(\frac{20\varepsilon\lambda^2 + 116\lambda^2 + 24\varepsilon\lambda + 251\lambda + 114}{(2\lambda+1)(4\lambda+3)} + \frac{3(5+G)80\varepsilon\lambda^2 - 40\lambda^2 + 54\varepsilon\lambda - 130\lambda - 69}{20(2\lambda+1)(4\lambda+3)} \right),$$

$$A_{24} = \frac{26}{35} F^2 + \frac{1}{15} \left(1 - \frac{11}{21} G \right) FU + \frac{W}{21} \left(2 \frac{3\varepsilon\lambda - 12\lambda + 16}{4\lambda+3} + \frac{9+G}{3} \frac{6\varepsilon\lambda + 4\lambda - 3}{4\lambda+3} \right),$$

$$A_{20} = -\frac{F^2}{5}, \quad G = M_i - M_e = \frac{\mu-1}{\mu+1}.$$

Здесь $A_{12} = F$; A_{20} — константа, определяемая из условия постоянства объема капли. Члены в (17), пропорциональные F^2 и FU , совпадают с данными работы [4].

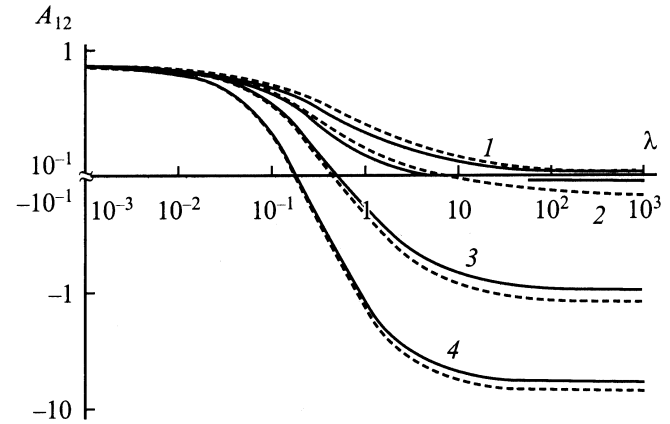


Рис. 1. Зависимость коэффициента A_{12} от относительной проводимости λ . Сплошные кривые — $\mu = 0.01$, штриховые — $\mu = 100$. $\varepsilon = 0.1$ (1), 0.5 (2), 2 (3), 10 (4).

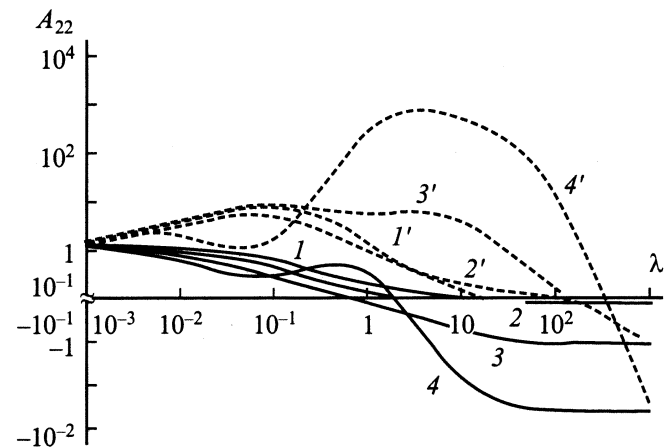


Рис. 2. Зависимость коэффициента A_{22} от λ . $\mu = 1$. Сплошные кривые — $\beta = 0.01$, штриховые — $\beta = 100$. 1–4 — то же, что и на рис. 1.

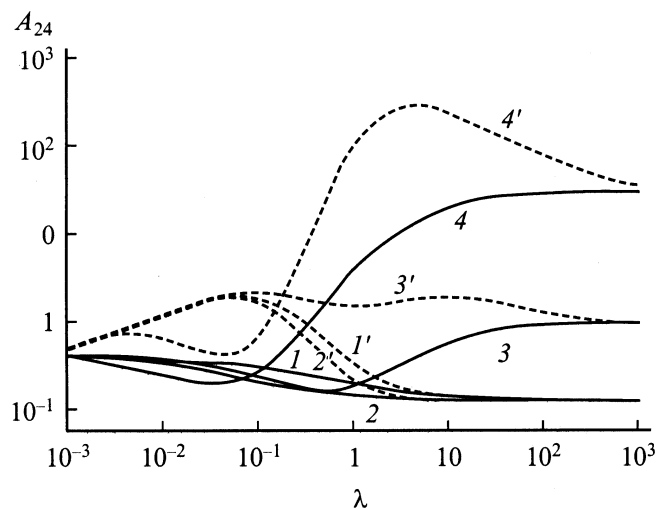


Рис. 3. Зависимость коэффициента A_{24} от λ . $\mu = 1$. Обозначения те же, что и на рис. 2.

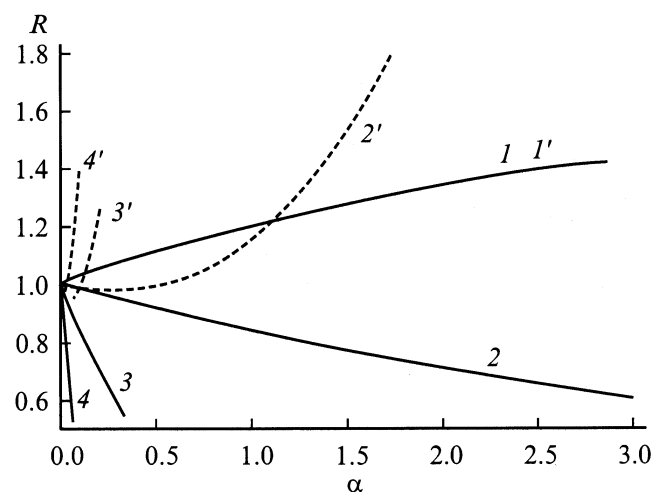


Рис. 4. Зависимость деформации капли от напряжения поля. $\lambda = 10$, $\mu = 10$. Обозначения те же, что и на рис. 2.

Вклад поверхностной конвекции заряда учитывается параметром W . На рис. 1–3 приведены зависимости коэффициентов A_{kj} соотношения (17) от относительной проводимости λ при различных значениях параметров μ, β и ε . Как видно из рис. 1, зависимость A_{12} от μ слабая и такой же характер имеет эта зависимость для A_{22} и A_{24} . Сравнение коэффициентов A_{kj} показывает, что вклад второго приближения может на порядки превышать значение линейного по α члена. Такое поведение коэффициентов обусловлено тем, что ряд (17) является фактически двухпараметрическим разложением по α и β . Здесь процедура определения коэффициентов проведена вплоть до линейного члена по β , который при некоторых значениях является основным членом разложения. Условиями неизменности сферической формы капли являются $\lambda\varepsilon = 1$ и $F = 0$, которые равносильны условию одновременного выполнения равенств $\varepsilon = 1$ и $\lambda = 1$.

Определим степень деформированности капли следующим образом:

$$R = \frac{r_1}{r_2}, \quad (18)$$

где $r_1 = f(\Theta = 0)$ и $r_2 = f(\Theta = \pi/2)$ есть размеры полуосей капли в продольном и поперечном направлении по отношению к вектору напряженности поля соответственно.

Значение $R > 1$ соответствует вытянутому сфероиду, а $R < 1$ — сплюснутому.

На рис. 4 приведены зависимости деформации капли R от напряженности поля при некоторых значениях параметров $\varepsilon, \lambda, \mu$ и β . Построение этих кривых проводилось в диапазоне $0 \leq \alpha \leq \alpha_k$, где α_k есть наибольшее α , при котором $f(\Theta)$ остается выпуклой. Под выпуклой кривой здесь понимается замкнутая кривая, которая целиком лежит по одну сторону от касательной в любой точке этой кривой. Такой выбор диапазона α обусловлен данными наблюдений, согласно которым капля устойчива, пока ее фигура эллипсоидальна, а в момент распада она принимает гантелеобразную форму [2,12]. Результатом влияния параметра β является подавление процесса сжатия капли. Как видно из рис. 4, с ростом β уменьшается степень сжатия капли, а при некоторых условиях эта трансформация заменяется растяжением капли.

Качественно такое воздействие можно объяснить конвективным переносом зарядов по поверхности капли, преимущественно направленным от экватора к полюсам. В отсутствие конвекции поверхностного заряда ($\beta = 0$) деформацию связывают с течением в капле следующим образом [2,3]. При $\lambda\varepsilon \ll 1$ скорость жидкости на межфазной поверхности, согласно выражению (15), направлена от экватора к полюсам. В то же время функция F в соотношении (16) положительна, т. е. сфероид вытянут по направлению поля. В противоположном случае $\lambda\varepsilon \gg 1$ течение направлено от полюсов к экватору, функция $F < 0$ и сфероид сплюснут. Если ($\beta > 0$), то в соответствии с соотношением (7) градиент конвективного потока зарядов направлен в сторону наибольшего изменения омического тока, который максимален у полюсов. Отсюда можно заключить, что конвекция поверхностного заряда вызывает дополнительное движение жидкости от экватора к полюсам независимо от степени деформации капли.

В области параметров $0.01 \leq \mu \leq 100$, $0.02 \leq \varepsilon \leq 50$, $10^{-3} \leq \lambda \leq 10^3$, $\beta \leq 1000$ и $\alpha \leq \alpha_{jk}$ вычисленные значения деформации капли не выходят за пределы интервала $0.5 \leq R \leq 2$.

Эксперимент

Экспериментальное исследование деформации капель проводилось в прямоугольной ячейке с основанием 4×4 см и регулируемой высотой до 2 см. Боковые стенки выполнены из стекла, на металлические основания подавалось постоянное напряжение в пределах

Таблица 1. Свойства жидкостей

Жидкость	$\rho_{e,i}$, g/cm ³	$\mu_{e,i}$, р	$\varepsilon_{e,i}$	$\lambda_{e,i}$, $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$
ПФМС	1.1	11.9	2.69	$1.43 \cdot 10^{-12}$
КМ	0.97	14	5.1	$2.1 \cdot 10^{-10}$
ВМ	0.87	0.73	1.9	$6.0 \cdot 10^{-12}$
ТМ	0.88	0.67	2.36	$9.46 \cdot 10^{-12}$
Вода	1.0	0.01	81	10^{-6}

Таблица 2. Межфазное натяжение, дун/см

Жидкость	Жидкость			
	1	2	3	4
ПФМС	×	1.2	0.14	0.16
КМ		×	0.6	0.72
ВМ			×	—
ТМ				×

0–10 kV. Капля исследуемой жидкости вводилась в жидкость ячейки с помощью стеклянного капилляра диаметром 0.01–0.005 см. Пара несмешивающихся жидкостей подбирались из следующего набора: органические и минеральные масла, кремнийорганический полимер полиметилфенилсилоксан (ПФМС) и вода. В эксперименте измерялись плотность, вязкость, диэлектрическая проницаемость, проводимость и межфазное натяжение исследуемой пары жидкостей. Увеличенное изображение капли фотографировалось с помощью длиннофокусной оптической системы при освещении импульсным источником света длительностью ~ 1 мс. Определение размеров капли проводилось на фотоотпечатках с результирующим увеличением 50–100. Погрешность плотности $\rho_{i,e}$, $\mu_{i,e}$, $\varepsilon_{i,e}$ и потенциала (напряженности) не превышала 1%, а проводимости — 15%. Межфазное натяжение измерялось методом висящей капли или капиллярного поднятия с точностью $\sim 5\%$. Свойства жидкостей приведены в табл. 1. Межфазные натяжения некоторых пар жидкостей приведены в табл. 2. За исключением системы веретенное–касторовое масло все остальные жидкости практически взаимно нерастворимы. Натяжение систем вода–ПФМС (вода–КМ) составляет 38 дун/см (18 дун/см).

На рис. 5, 6 приведены зависимости деформации капли от напряженности поля. В каждой паре жидкостей первая обозначает каплю: касторовое масло (КМ) в ПФМС, вода в ПФМС, ПФМС в КМ. Точки обозначают экспериментальные данные, соответствующие кривые — результаты вычислений по соотношению (18). Согласно линейному по α приближению (16), инверсия жидкостей в паре капля–среда приводит к обращению деформации вытянутость–сплюснутость, если произведение $\lambda\varepsilon$ значительно отличается от единицы, как, например, для пары ПФМС–КМ (рис. 5, кривые 1 и 3). Оказывается, что это справедливо, если параметр β расположен

вдали от критических значений. На рис. 6 приведены зависимости R от α для капель ПФМС в КМ с исходным радиусом r_0 равным 0.03, 0.02 и 0.009 см (кривые 2–4 соответственно). Видно, что с уменьшением радиуса уменьшается степень сжатия капли. Этот эффект более выражен у пары ПФМС–веретенное масло (ВМ) с радиусом капель 0.005 см. В пределах экспериментальной ошибки системы ПФМС в ВМ и ВМ в ПФМС показывают только деформацию растяжения (рис. 6, кривые 5 и 6). Аналогичное поведение демонстрируют в сходных условиях пары жидкостей ПФМС–турбинное масло (ТМ), ВМ–КМ.

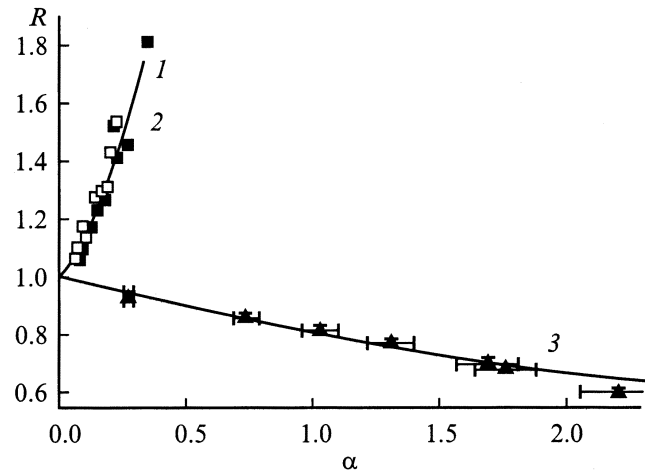


Рис. 5. То же, что на рис. 4. Кривые — результаты расчета. 1 ■ — КМ в ПФМС, $r_0 = 0.15$ мм, $\varepsilon = 1.9$, $\mu = 1.18$, $\lambda = 6.7 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 0.36$; 2 □ — вода в ПФМС, $r_0 = 0.5$ – 0.8 мм, $\varepsilon = 30$, $\mu = 8.4 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 10^{-6}$, $\beta = 10^{-3}$; 3 ▲ — ПФМС в КМ, $r_0 = 0.25$ мм, $\varepsilon = 0.527$, $\mu = 0.85$, $\lambda = 150$, $\beta = 56.5$.

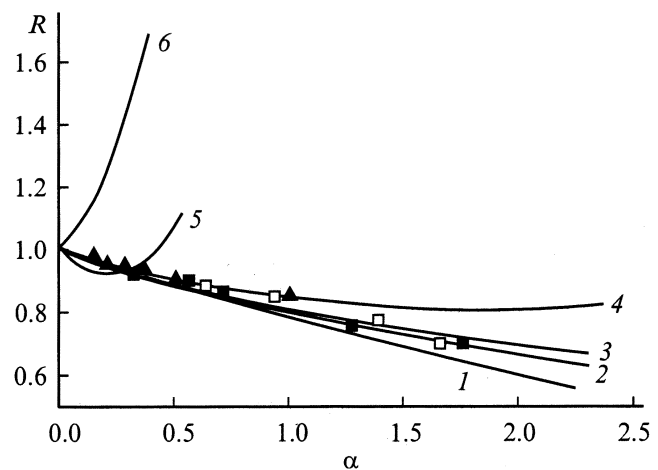


Рис. 6. То же, что на рис. 4, 5. Кривые 1–4 — ПФМС в КМ, $\varepsilon = 0.527$, $\mu = 0.85$, $\lambda = 150$. 1 — $\beta = 0$; 2 — ■, $r_0 = 0.3$ мм, $\beta = 47.8$; 3 — □, $r_0 = 0.2$ мм, $\beta = 71.7$; 4 — ▲, $r_0 = 0.9$ мм, $\beta = 159$; 5 — ПФМС в КМ, $r_0 = 0.05$ мм, $\varepsilon = 1.3$, $\mu = 16.3$, $\lambda = 4.3$, $\beta = 28$; 6 — ВМ в ПФМС, $r_0 = 0.05$ мм, $\varepsilon = 0.74$, $\mu = 0.061$, $\lambda = 0.23$, $\beta = 8.8$.

Расчеты формы проводились в предположении малости ее деформации формально при $\alpha < 1$. В то же время некоторые теоретические кривые, построенные до α_k , и экспериментальные точки простираются в область $\alpha > 1$ (рис. 4–6). Такое положение имеет место когда $F < 1$, $U < 1$, $\beta \ll 1$. В этом случае в разложение радиуса капли параметр α входит только в комбинациях αF и αU . Вследствие этого радиус сходимости по α степенного ряда для f может быть больше единицы.

На рис. 5 приведены погрешности экспериментальных точек для одной из кривых. Ошибка измерения R не превышает 1%, параметр α вычисляется с точностью $\sim 7\%$ по измеренным значениям E_e, r_0, T . В области умеренных деформаций согласование экспериментальных и теоретических данных удовлетворительное. Однако при $R \sim 1$, так же как в [2], наблюдается систематическое превышение экспериментальных деформаций над расчетными значениями.

Расчетные кривые на графиках построены до критического значения α_k , соответствующего предельной выпуклой форме капли. Соответствующие экспериментальные величины α_k совпадали с расчетными в пределах экспериментальной ошибки для рассмотренных пар жидкостей. В общем случае определение α_k необходимо проводить в рамках задачи устойчивости стационарного решения и следует принимать в расчет различные механизмы нарушения устойчивости капель [12–17]. Используемая здесь гипотеза устойчивости выпуклых форм подразумевает распад критического сфероида по направлению развития перетяжки. В частности, сплюснутая капля в критическом поле начинает наиболее интенсивно сжиматься по линии, соединяющей полюса, преобразуясь в тороидальное тело. Наблюдения, находясь в полном согласии с данными работы [2], показывают, что финишной фигурой является не тор, а колоколообразная фигура, которая и распадается в результате сложных движений.

Если капля вытянута, то следует ожидать ее распада на две части по шейке, возникающей на экваторе сфероида. Такой распад, сопровождающийся появлением капель-спутников, наблюдался в рассмотренных экспериментах.

При некоторых условиях этой трансформации предшествует эмиссия струек (или отдельных капель) с полюсов для вытянутой капли, а для сплюснутого сфероида — кольцевой веерной струйки из экваториальной области. Например, в использованной схеме расчета распад капли воды в воздухе ($\lambda = 0$, $\varepsilon = 81$, $\mu \gg 1$, $\beta \gg 1$) на две части происходит при $\alpha_k = 0.329$, $R = 1.74$. Однако в меньшем поле при $\alpha_k = 0.21$ наблюдается эмиссия капелек с полюсов, обусловленная возбуждением высших гармоник капиллярных возмущений в областях наибольшей напряженности поля [10,18]. В то же время в системах вода–ПФМС, вода–КМ эмиссии капель нет, а наблюдается деление на две примерно равные части. Такой же распад наблюдался в [2] для капли воды в среде с вязкостью на порядок выше.

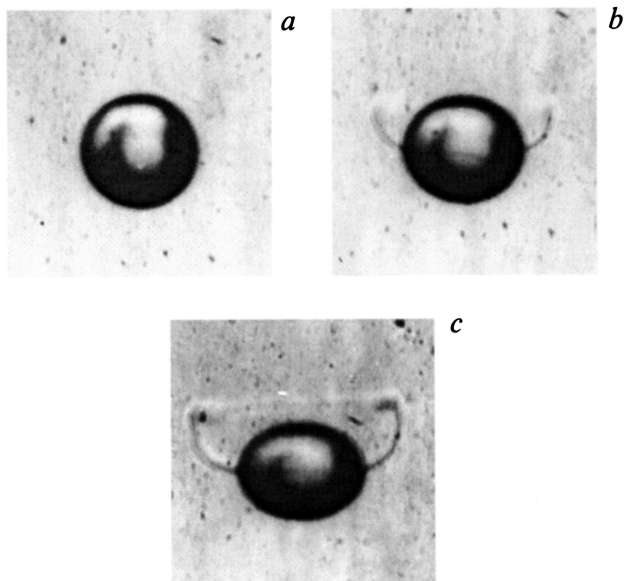


Рис. 7. Форма капли ПФМС в касторовом масле. Вектор напряженности поля параллелен плоскости фотографии и направлен по вертикали. $E_0, \text{V/m}$: $a — 0$; $b — 2.5 \cdot 10^5$; $c — 3.5 \cdot 10^5$.

На рис. 7 приведены фотографии капель в системе ПФМС–КМ. Первоначально сферическая капля падает в более легком касторовом масле (рис. 7, *a*). Под действием поля капля преобразуется в сплюснутый сфероид и при некотором значении напряженности на экваторе появляется острая кромка, из которой вытекает жидкость капли (рис. 7, *b*). Чем больше поле, тем интенсивнее истечение жидкости (рис. 7, *c*), причем в последнем случае в следе за телом образуется структура, подобная кольцевому вихрю. При проведении экспериментов не проводился специальный подбор систем с нейтральной плавучестью, поскольку в постоянном поле с ростом напряженности интенсифицируется конвекция жидкости в ячейке. По степени отклонения веерной струи от горизонтали на рис. 7, *b, c* можно заключить, что влияние конвективной составляющей в данном случае невелико по сравнению со скоростью падения в поле тяжести. Подобная трансформация капли наблюдалась в [2] для аналогичной, но значительно более вязкой системы. Однако в постоянном поле истечения жидкости не происходило, а в переменном поле наблюдалась не сплошная веерная струйка, а точечная эмиссия отдельных капелек из экваториальной области сфероида.

Заключение

Модели, не учитывающие движение заряда вдоль границы раздела жидкостей, приводят к зависимости формы капли только от проводимости, диэлектрической проницаемости и вязкости жидкостей. Экспериментальные данные для очень вязких жидкостей с суммарной вяз-

костью в сотни паз подтверждают этот результат [1,2]. В то же время в маловязких эмульсиях слабопроводящих жидкостей способность капли растягиваться или сжиматься по полю существенно зависит от ее размера. Такое несоответствие объясняется использованием в этих моделях усеченного уравнения переноса поверхностного заряда, принимающего во внимание лишь омический ток через межфазную границу. Конвективный перенос заряда инициирует дополнительные потоки жидкости, которые действуют на каплю односторонне, блокируя ее сжатие. Чем меньше капля, тем больше вероятность обнаружить растяжение капли эмульсии в сильном поле практически независимо от других параметров слабопроводящих жидкостей. Предположение о выпуклости формы сфероида вплоть до критического поля распада капли на равные части хорошо согласуется с данными наблюдений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Калужской области (проекты № 01-01-96002 и 02-01-96035).

Список литературы

- [1] *Taylor G.I.* // Proc. Roy. Soc. London. 1966. Vol. A291. P. 159–166.
- [2] *Torza S., Cox R.G., Mason S.G.* // Phyl. Trans. R. Soc. London. 1971. Vol. A269. P.295–319.
- [3] *Melcher J.R., Taylor G.I.* // Annual Review of Fluid Mechanics. Palo Alto (California), 1969. Vol. 1. P. 111–146.
- [4] *Ajaji O.O.* // Proc. Roy. Soc. London. 1978. Vol. A344. P. 499–507.
- [5] *Mestel A.J.* // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
- [6] *Gogosov V.V., Shaposhnikova G.A.* // Applied Electromagnetics in Materials. 1990. Vol. 1. P. 45–58.
- [7] *Шутов А.А., Алонцева Н.М., Шкадов В.Я.* // Труды регионального конкурса проектов в области естественных наук. Калуга: Эйдос, 2000. Вып. 1. С. 67–88. (ISBN 5-938810-006-2).
- [8] *Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.* Курс теоретической физики. Т. II. М.: Физматгиз, 1962. 820 с.
- [9] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
- [10] *Taylor G.I.* // Proc. Roy. Soc. London. 1964. Vol. A280. P. 383–397.
- [11] *Lamb H.* Hydrodynamics. art. 336. Cambridge University Press, 1932. 738 p.
- [12] *Sample S.B., Raghupathy B., Hendricks C.D.* // Intern. J. Eng. Sci. 1970. Vol. 8. P. 97–109.
- [13] *Brazier-Smith P.R.* // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. N 1. P. 1–6.
- [14] *Sabry A.A.* // Physica. 1980. Vol. 101A. P. 223–242.
- [15] *Rosenkilde C.E.* // Proc. Roy. Soc. London. 1969. Vol. A312. P. 473–494.
- [16] *Feng Z.C., Leal L.G.* // Int. J. Multiphase Flow. 1996. Vol. 22. N 1. P. 93–120.
- [17] *Cheng K.J., Cheddock J.B.* // Phys. Lett. 1984. Vol. 106a. N 1,2. P. 51–53.
- [18] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1706–1713.