

01;05

Наномашины: общий подход к индуцированию направленного движения на атомном уровне

© В.Л. Попов

Падерборнский университет,
33098 Падерборн, ФРГ
Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
634021 Томск, Россия
e-mail: popov@phys.upb.de

(Поступило в Редакцию 18 сентября 2001 г. В окончательной редакции 17 мая 2002 г.)

Рассмотрено движение тел в периодическом потенциальном рельефе со слабым затуханием. Показано, что в присутствии внешних периодических воздействий разного типа возможно спонтанное направленное движение тел со скоростью, однозначно определяемой частотой периодического воздействия и пространственным периодом потенциала. Излагаемые принципы индуцирования направленного движения со строго контролируемой скоростью могут быть использованы для создания способов манипулирования отдельными молекулами или молекулярными кластерами на кристаллических поверхностях; „наномашин“ — объектов, способных к самопроизвольному движению не только в отсутствие внешней силы, но и при действии силы, противоположной направлению движения (и тем самым способных транспортировать другие объекты); приводных устройств, обеспечивающих строго контролируемую скорость движения; регулируемых трибологических систем путем целенаправленного профилирования поверхностей трения и наложения ультразвукового воздействия. Показано, что зависимость средней скорости движения системы от средней приложенной силы (макроскопически воспринимаемая как „закон трения системы“) в присутствии периодических внешних возмущений содержит плато постоянной скорости при нулевой скорости и наборе эквидистантных дискретных скоростей. Задача создания полностью управляемых наномашин может быть сформулирована как задача управления шириной и положением этих плато.

Введение

Тенденция к миниатюризации механических систем и стремительное развитие нанотехнологий ставят вопрос о теоретических пределах миниатюризации. Принципиальной проблемой развития микромеханических систем любого уровня является преобразование различных видов энергии в энергию направленного движения системы. Какими могут быть минимальные размеры механизмов, позволяющих такое преобразование? На каких физических принципах они могут быть основаны? При ответе на эти вопросы мы исходим из того, что объекты атомарных размеров, находящиеся на твердой поверхности, испытывают действие периодического кристаллического потенциала „подложки“. Мы показываем, что этот естественный для атомарного мира периодический фон может быть в сочетании как минимум с двумя независимыми внешними периодическими воздействиями использован для генерации направленного движения в желаемом направлении с контролируемой скоростью. Минимальные размеры системы определяются при этом только возможностью практической реализации названных двух периодических воздействий. Теоретически говоря, минимальная „наномашина“ может состоять всего из одного тела при условии, что возможно реализовать периодические воздействия на него в тангенциальном (по отноше-

нию к поверхности твердой „подложки“) и нормальном направлениях.¹

Большинство обсуждающихся в литературе способов генерации направленного движения молекулярных объектов основаны на взаимодействии двигаемого объекта с неоднородной, обычно периодически структурированной „подложкой“ [1–4]. Последняя может быть либо асимметричной, либо симметричной. В первом случае направление движения фиксируется взаимодействием „подложки“ и объекта по принципу „храповик-собачка“ (см., например, [2,3]). Во втором случае направление движения изначально не фиксировано и определяется динамически. Пример такой динамической управляемой машины был предложен в [5]. В настоящей работе мы показываем, что наномашина, описанная в [5], представляет собой частный случай более широкого класса систем, имеющих различное устройство, но одинаковые принципы управления. Следует отметить, что принципы индуцирования направленного движения за счет периодических (ненаправленных в среднем) воздействий давно известны и широко используются в технике для вибротранспортировки, вибросепарации, вибропогружения и уплотнения сыпучих сред. Обзор

¹ В случае электрически заряженного объекта такое воздействие можно было бы реализовать, например, посредством электромагнитного излучения, содержащего как тангенциальную, так и нормальную по отношению к плоскости „подложки“ компоненты электрического поля.

математических методов решения задач о вибрационном перемещении и технических приложений эффекта вибрационного перемещения может быть найден в [6]. Вместе с тем вибрационное перемещение на микроуровне имеет ряд особенностей, непосредственно связанных с наличием периодического атомарного потенциала и отсутствующих в макроскопических системах (например, описанные ниже „плато постоянной скорости“).

Объектом нашего рассмотрения будут тело или группа тел, находящиеся в пространственно периодическом потенциале. Для конкретности можно представлять себе молекулу или молекулярную группу, адсорбированную на кристаллической поверхности. Физическая природа объектов и периодического потенциала, так же как и его период, не имеют при этом существенного значения для излагаемой теории: все описанные эффекты могут быть реализованы в системах произвольного масштаба. Предполагается, что на тело (тела) могут действовать внешние силы, содержащие как постоянные, так и периодические составляющие. Основным вопросом, решаемым в работе, является следующий: какова зависимость средней скорости движения тела, находящегося в периодическом потенциале, от средней силы, действующей на него? Мы показываем, что под действием внешних периодических сил эта зависимость может приобретать необычный вид, а именно движение может происходить в определенном направлении даже в отсутствие макроскопической силы или при наличии силы, действующей в направлении, противоположном движению. Таким образом, тело с помощью периодических (ненаправленных) воздействий может быть приведено в движение и может при этом транспортировать „груз“. Именно эти необычные свойства рассматриваемых систем позволяют нам говорить о них как о „наномашинах“.

Физическая система заслуживает названия „машины“ только при условии, что она управляема, т.е. может быть приведена в движение в требуемом направлении с регулируемой скоростью и заторможена. Возможно ли с помощью периодических воздействий достигнуть такой управляемости? Мы даем положительный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим одномерное движение тела в периодическом потенциале со слабым затуханием. Уравнение движения тела в таком потенциале имеет вид

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - N \sin(2\pi x/a), \quad (1)$$

где x — координата тела, m — его масса, F — действующая на тело сила, η — коэффициент затухания, N — амплитуда периодической силы, a — длина волны периодического потенциала.

Названная модель была предложена в 1929 г. Томлинсоном как модель сухого трения [7]. Несмотря на простоту, она описывает многие существенные черты сухого трения и с различными вариациями интенсивно эксплуатировалась в последнее время в физике трения (см., например, [8–11]). На этом основании мы будем

именовать рассматриваемые нами системы как „трибологические“, а зависимость средней скорости движения тела от средней приложенной силы характеризовать как „закон трения“. Соответственно теорию наномашин можно рассматривать как раздел молекулярной трибологии.

Обратим внимание на следующую аналогию: уравнение вида (1), переписанное в других обозначениях,

$$\left(\frac{\hbar C}{2e}\right)\ddot{\varphi} = -j\left(\frac{\hbar}{2eR}\right)\dot{\varphi} - j_0 \sin \varphi \quad (2)$$

описывает динамику одиночного джозефсоновского контакта [12]. В (2) \hbar — постоянная Планка; φ — разность фаз между контактирующими сверхпроводниками; C , R — соответственно емкость и омическое сопротивление контакта; e — элементарный заряд; j_0 — максимальный ток контакта.

Математическая эквивалентность двух задач означает, что в трибологических системах, микроскопическая модель которых описывается уравнением (1), должны наблюдаться те же эффекты, что и в джозефсоновских контактах. Один из таких эффектов состоит в модификации вольт-амперной характеристики джозефсоновского контакта при воздействии на него внешнего периодического возмущения, состоящей в появлении плато, на которых напряжение строго постоянно (на этом эффекте основан современный квантовый эталон напряжения). Аналогом этого эффекта в трибологической интерпретации является возникновение плато постоянной средней скорости движения тела в определенном интервале действующих на него сил.² Эти плато играют в дальнейшем рассмотрении наномашин определяющую роль.

Физический „механизм“ возникновения плато постоянной средней скорости состоит в следующем. Если тело движется с макроскопически постоянной скоростью в присутствии периодического (в пространстве) потенциала, то его мгновенная скорость и действующая на него сила, вообще говоря, являются периодическими функциями времени с некоторой частотой, зависящей от средней скорости движения. Средние по времени значения силы и скорости при этом, очевидно, не зависят от „начальной фазы“ этих периодических функций, которая может быть произвольной. Ситуация качественно изменяется, если на периодические колебания скорости (или силы) наложить дополнительное внешнее периодическое воздействие с частотой, равной вышеупомянутой „собственной“ частоте осциллирующей скорости и силы. Ввиду нелинейности системы наложение внешнего периодического возмущения приведет к появлению в динамике системы произведений членов с равной частотой, которые при усреднении по времени не исчезают, причем среднее значение зависит от начальной фазы колебаний. Эта зависимость от начальной фазы приводит

² Наличие плато постоянной средней скорости означает, что изменение силы в определенном интервале не влияет на макроскопическую скорость движения тела.

к тому, что среднее значение силы может изменяться путем подстройки фазы при неизменной средней скорости движения. Названный эффект подстройки фазы находит выражение в упомянутом выше эффекте Джоузефсона [12].

1. Движение тела в периодическом потенциале. Стационарное внешнее воздействие

Модель Томлинсона описывает многие существенные черты сухого трения. Действительно, приложение к телу достаточно малой силы приводит только к его малому смещению из минимума потенциальной энергии, после чего дальнейшее движение прекращается. Возникающую силу противодействия мы макроскопически воспринимаем как силу трения покоя. Очевидно, что равновесие в периодическом потенциале в присутствии постоянной тангенциальной силы невозможно при превышении этой силы некоторого критического значения, воспринимаемого макроскопически как максимальная сила трения покоя, после преодоления которой начинается макроскопическое скольжение тела.³ В модели (1) критическое значение силы равно N . При полном отсутствии диссипации энергии дальнейшее движение продолжалось бы даже и в отсутствие силы. Наличие диссипации приводит к тому, что для поддержания макроскопически равномерного движения необходимо приложить некоторую силу, тем меньшую, чем меньше диссипация: при малой диссипации начавшееся движение может продолжаться и под действием силы, меньшей критической. С макроскопической точки зрения это означает, что сила трения скольжения, вообще говоря, может быть меньше силы трения покоя, что также является характерной чертой сухого трения.

Любое макроскопическое движение тела в данной модели, в том числе и равномерное движение, с микроскопической точки зрения представляет собой суперпозицию движения с постоянной скоростью и периодических осцилляций, как это показано на рис. 1, *a*. На нем схематически представлены результаты численного интегрирования уравнения (1) при некоторых конкретных параметрах модели. Тангенциальная сила F сначала медленно возрастала от нуля, а затем опять убывала. На графике отложена мгновенная скорость тела как функция мгновенной силы. Тело сначала находилось в состоянии покоя. После преодоления силой критического значения начинается движение с конечной макроскопической скоростью, которая возрастает примерно пропорционально приложенной силе. При убывании силы движение продолжается и при силах, меньших силы

³ Под „макроскопическим“ поведением тела мы понимаем здесь поведение тела на пространственном масштабе, существенно превышающем период потенциала. Напротив, шкала, определяемая периодом потенциала, рассматриваемого нами в данном контексте как микроскопическая.

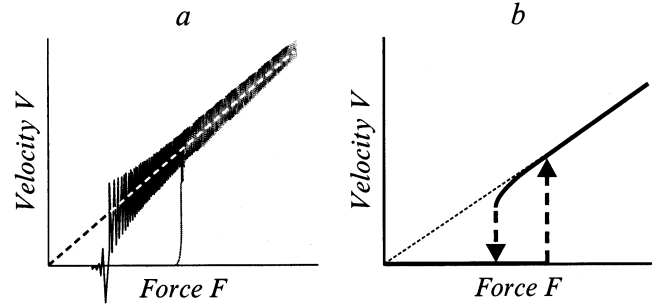


Рис. 1. *a* — зависимость мгновенной скорости от мгновенной силы: сила медленно нарастала от нуля до максимального значения, превышающего силу трения покоя и затем опять убывала до нуля; *b* — макроскопическое представление этого же процесса: макроскопический закон трения.

трения покоя. При некотором критическом значении скорости макроскопическое движение, однако, внезапно прерывается, тело совершает несколько колебаний в потенциальном минимуме и приходит в состояние покоя.

На макроскопическом уровне мы не воспринимаем микроскопических колебаний. Описанное выше состояние движения с макроскопической точки зрения представляет собой квазистационарный процесс трения. Зависимость средней скорости от приложенной силы макроскопическим наблюдателем воспринимается как макроскопический закон трения (рис. 1, *b*).

Закон трения мы находим, задав постоянную действующую силу и вычислив среднюю скорость движения. Возможна, однако, и обратная постановка вопроса: мы можем задать постоянную скорость движения тела в периодическом потенциале и исследовать необходимую для поддержания такого движения силу. После усреднения по времени силы, которая в этом случае, очевидно, будет представлять собой суперпозицию постоянной и осциллирующей составляющих, мы и в этом случае получим определенную зависимость средней скорости скольжения от средней силы, т.е. закон трения. Он, вообще говоря, не обязан совпадать с законом, полученным при постоянной заданной силе. Многочисленные расчеты показывают, однако, что оба названных выше „закона трения“ тесно связаны друг с другом, так что во многих случаях можно с одинаковым успехом использовать как первый, так и второй подходы. Ниже мы кратко остановимся на описании взаимосвязи законов трения при заданной силе и заданной скорости. Эта взаимосвязь будет многократно использоваться в дальнейшем анализе.

Рассмотрим тело, движущееся с постоянной скоростью в периодическом потенциале. Поставим вопрос о вычислении действующей на него силы. Эта сила состоит из двух составляющих: диссипативной силы, пропорциональной скорости движения, и консервативной силы, создаваемой периодическим потенциалом,

$$F = \eta v + N \sin x. \quad (3)$$

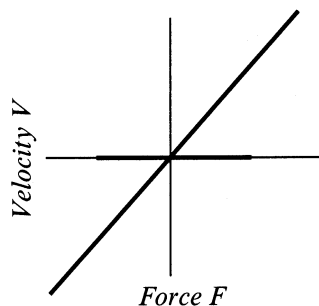


Рис. 2. Закон трения (зависимость средней скорости от средней силы) при заданной постоянной скорости.

При равномерном движении со скоростью v координата тела растет пропорционально времени $x = x_0 + vt$. Таким образом, сила, необходимая для поддержания равномерного движения, равна

$$F = \eta v_0 + N \sin(x_0 + vt). \quad (4)$$

Определим среднее по времени значение этой силы. Имеются две возможности.

1. Если скорость тождественно равна нулю $v = 0$, то среднее значение первого вклада в (4) равно нулю, а второго — $N \sin x_0$. Таким образом, средняя сила равна

$$\langle F \rangle = N \sin x_0. \quad (5)$$

В зависимости от начальной координаты она может принимать любое значение в интервале $-N < \langle F \rangle < +N$. В законе трения это соответствует наличию плато постоянной скорости, а именно скорости, равной нулю. Это плато описывает не что иное как силу трения покоя.

2. Если скорость не равна нулю, то среднее значение силы, действующей со стороны периодического потенциала, оказывается тождественно равным нулю. Диссипативная сила, напротив, дает ненулевой вклад и линейно растет со скоростью

$$\langle F \rangle = \eta v_0. \quad (6)$$

Закон трения состоит из двух ветвей и имеет представленный на рис. 2 вид.

Сравнение законов трения при заданной скорости и заданной силе показывает, что они в значительной степени совпадают. Единственное существенное отличие состоит в том, что в случае заданной силы отсутствует часть линейной ветви вблизи середины плато. В этой области движение при заданной силе является нестабильным. Отметим, что критическая скорость, при которой прекращается макроскопическое движение, при малом затухании не зависит от величины затухания [13] и равна

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{8}{\pi^3} \frac{Na}{m}}. \quad (7)$$

Эта критическая скорость по порядку величины равна скорости, приобретаемой телом при свободном „скатывании“ с потенциального максимума в минимум.

Вид закона трения при заданной силе показывает, что макроскопическое движение, соответствующее линейной ветви, может в хорошем приближении рассматриваться как свободное (в пренебрежении периодическим потенциалом) практически вплоть до точки потери устойчивости макроскопического движения.

Важным для дальнейшего рассмотрения выводом является то, что основные существенные черты закона трения могут быть получены при рассмотрении движения с заданной скоростью, что в математическом плане существенно проще, чем рассмотрение движения под действием заданной силы.

Как мы видели, макроскопический закон стационарного трения является усредненным представлением микроскопически нестационарного процесса. Очевидно, что полученный выше закон трения может применяться только в случае, если внешние силы мало изменяются в течение одного микроскопического периода движения. При нарушении этого условия макроскопический закон трения теряет силу и необходимо заново рассматривать динамику системы на микроскопическом уровне. В следующем разделе мы исследуем движение тела в периодическом потенциале, предполагая, что действующая сила (или заданная скорость) наряду с постоянной составляющей содержат также периодически осциллирующую компоненту.

2. Движение в периодическом потенциале под действием периодических сил

В общем случае будем предполагать, что как тангенциальная сила F , так и амплитуда N силы, действующей со стороны периодического потенциала, являются периодическими функциями времени. Опять возможны два комплементарных подхода: либо мы задаем периодическую силу и ставим вопрос об определении средней скорости движения, либо задаем периодически изменяющуюся скорость и определяем среднюю силу, необходимую для поддержания заданного движения. Важнейшие принципиальные особенности „законов трения“ и в этом случае одинаковы в обеих постановках. Мы начнем с математически существенно более простой задачи об определении силы при заданной периодически меняющейся скорости.

Допустим, что на движение с постоянной скоростью v_0 наложено периодическое возмущение с амплитудой v_1

$$v = v_0 + v_1 \cos \omega t. \quad (8)$$

Координата тела как функция времени равна

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t, \quad (9)$$

а сила, действующая на него, имеет вид

$$F = \eta(v_0 + v_1 \cos \omega t) + N \sin \frac{2\pi}{a} \left(x_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (10)$$

Здесь и ниже мы не выписываем „силу инерции“ $m\ddot{x}$, поскольку ее среднее значение тождественно равно нулю.

Для того чтобы подчеркнуть основные черты получаемого при этом „закона трения“, мы начнем со случая отсутствия диссипативной силы и будем искать среднее значение консервативной части силы (10), которую мы обозначим через \tilde{F} ,

$$\tilde{F} = N \sin \frac{2\pi}{a} \left(x_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (11)$$

Идею вычисления проще всего понять в случае, когда амплитуда осцилляций скорости много меньше средней скорости скольжения $v_1 \ll v_0$ (случай произвольной амплитуды осцилляций будет рассмотрен ниже). В предположении малой амплитуды осцилляций функцию (11) можно разложить по малому параметру v_1/v_0

$$\tilde{F} = N \left\{ \sin \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) + \frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t) \cdot \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \right\}. \quad (12)$$

Каково среднее по времени значение этой силы? Возможны три случая.

1. Если средняя скорость движения равна нулю $v_0 = 0$, то средняя сила равна

$$\langle F \rangle = N \sin \frac{2\pi}{a} x_0. \quad (13)$$

Она может принимать любое значение из интервала $-|N| < \langle F \rangle < |N|$ и, очевидно, соответствует силе трения покоя.

2. При отличной от нуля средней скорости движения $v_0 \neq 0$ и выполнении условия $v_0 \neq a\omega/2\pi$ среднее значение силы тождественно равно нулю

$$\langle F \rangle = 0. \quad (14)$$

3. Наконец, если скорость равна $v_0 = a\omega/2\pi$, то среднее значение первого члена в (12) равно нулю, а второе слагаемое приводит к ненулевому значению средней силы

$$\langle F \rangle = N \frac{\pi v_1}{a\omega} \sin \frac{2\pi}{a} x_0. \quad (15)$$

Величина силы зависит от начальной координаты и может принимать произвольное значение в интервале

$$- \left| N \frac{\pi v_1}{a\omega} \right| < \langle F \rangle < \left| N \frac{\pi v_1}{a\omega} \right|$$

при неизменной средней скорости движения.

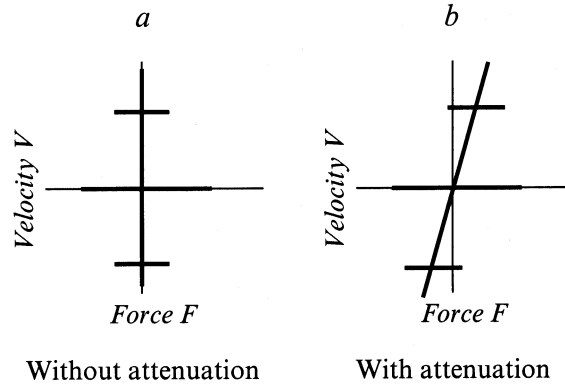


Рис. 3. Закон трения (зависимость средней скорости от средней силы) при наличии периодических осцилляций скорости. *a* — без затухания, *b* — с затуханием. Характерной чертой закона трения в присутствии периодического внешнего воздействия являются плато постоянной скорости.

Таким образом, закон трения выглядит, как схематически показано на рис. 3, *a*. Опушенная выше диссипативная сила, очевидно, приведет только к равномерной деформации графика пропорционально скорости (рис. 3, *b*). Существенной чертой закона трения в присутствии внешнего периодического воздействия является наличие плато постоянной скорости не только при нулевой, но и при конечных скоростях.

Очевидно, что если полуширина плато превышает величину ηv_0 , то плато пересекает ось ординат (как показано на рис. 3, *b*). В этом случае направленное движение возможно при нулевой средней силе или даже силе, приложенной в направлении, противоположном направлению движения. Другими словами, тело может создавать тянущую силу, например, что-нибудь транспортировать. Именно это свойство и будет использовано в конструкциях наномашин.

3. Наномашины

Под наномашинами мы будем понимать трибологические системы, закон трения которых имеет плато постоянной скорости, ширина и положение которых могут таким образом регулироваться внешними воздействиями, что система по желанию может быть приведена в движение в произвольном направлении.

Система с приведенным выше законом трения (рис. 3, *b*) еще не удовлетворяет этому определению, поскольку ее состояние покоя устойчиво. Хотя в отсутствие средней силы тело и может двигаться со скоростью, соответствующей первому плато, для приведения его в состояние движения ему необходимо дать начальный толчок.

В случае управляемой машины должна иметься возможность полностью устранить нулевое плато. Тем самым состояние покоя стало бы неустойчивым и машина

спонтанно приходила бы в движение. Направление движения в рассматриваемой нами симметричной системе определялось бы, однако, начальными флуктуациями и не являлось бы однозначно определяемым.

В случае полностью управляемой машины должна иметься также возможность изменять ширину обоих плато, соответствующих движению в противоположных направлениях, независимо друг от друга таким образом, чтобы устойчивое движение соответствовало только движению в желаемом направлении. Ниже мы покажем, что достижение такой управляемости возможно путем наложения периодических сил, действующих во взаимно перпендикулярных направлениях.

Покажем, во-первых, что изменением амплитуды внешнего периодического воздействия можно добиться исчезновения нулевого плато (а вместе с ним и силы трения покоя). Для этой цели мы возвращаемся к рассмотрению воздействия, описываемого уравнением (8), однако теперь не предполагаем малости возмущения. Среднее значение силы (11) может быть вычислено аналитически с использованием следующих разложений [12]:

$$\cos(\psi \sin \omega t) = J_0(\psi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\psi) \cos(2k\omega t), \quad (16)$$

$$\sin(\psi \cos \omega t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\psi) \cos((2k+1)\omega t), \quad (17)$$

где $J_n(\psi)$ — функция Якоби n -го порядка и

$$\psi = \frac{2\pi v_1}{a\omega}. \quad (18)$$

Это среднее значение тождественно равно нулю при всех скоростях, за исключением скоростей, удовлетворяющих условию

$$v_0 = \frac{\omega a}{2\pi} = V_0 n, \quad (19)$$

где V_0 есть скорость, соответствующая первому плато; n — целое число.

При значениях скорости, определяемых уравнением (19), среднее значение силы равно

$$\langle F \rangle = N(-1)^n J_n(v_1/V_0) \sin \frac{2\pi}{a} x_0. \quad (20)$$

При каждом из дискретных значений скорости (19) сила зависит от начальной координаты и, таким образом, может принимать произвольное значение в определенном интервале, определяемом шириной соответствующего плато,

$$-|NJ_n(v_1/V_0)| \leq \langle F \rangle \leq |NJ_n(v_1/V_0)|. \quad (21)$$

Зависимость ширины плато от амплитуды периодических осцилляций скорости представлены на рис. 4. Видно, что по мере роста амплитуды колебаний ширина плато нулевого порядка уменьшается и при некоторой

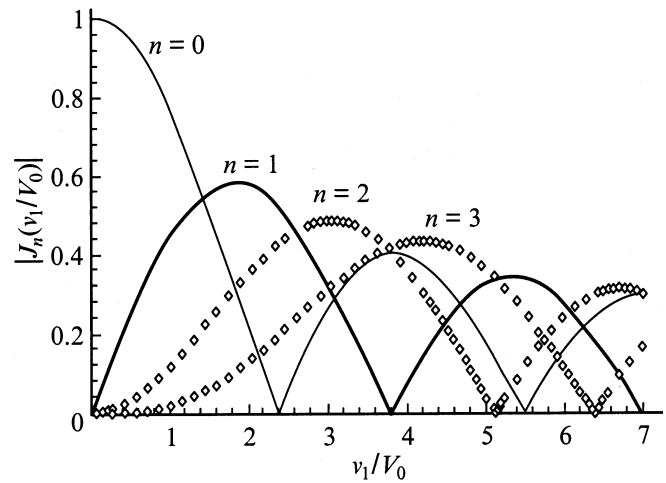


Рис. 4. Зависимость ширины плато 0-го, 1-го, 2-го, и 3-го порядков от амплитуды колебаний скорости. При увеличении амплитуды колебаний ширина плато нулевого порядка уменьшается и обращается в нуль при $v_1/V_0 = 2.4$.

амплитуде обращается в нуль. Это означает, что сила трения покоя исчезает и сколь угодно малая сила может вывести систему из состояния покоя. При этом ширина плато первого порядка еще близка к максимуму.

Численное моделирование показывает, что задание осциллирующей силы (вместо осциллирующей скорости) не изменяет существенных черт закона трения. Рассмотрим тело, на которое наряду с постоянной тянущей силой F_0 действует периодически осциллирующая сила. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = F_0 + F_1 \sin \omega t - \eta \dot{x} - N \sin(2\pi x/a). \quad (22)$$

Характерный вид зависимости средней скорости движения от средней приложенной силы иллюстрирует рис. 5, а, на котором представлен результат численного решения уравнения (22) при следующих значениях параметров: $m = 1$, $F_1 = 1.8$, $\omega = 1$, $\eta = 0.4$, $2\pi/a = 1$. И в этом случае оказывается возможным добиться исчезновения нулевого плато путем изменения амплитуды колебаний силы. На рис. 5, б представлены результаты численного решения уравнения движения (22) при тех же значениях параметров, но большей амплитуде колебаний силы: $F_1 = 2.3$. Амплитуда осциллирующей компоненты силы была выбрана таким образом, чтобы нулевое плато исчезло. При этом сила трения покоя в системе отсутствует, однако тело может с равной вероятностью начать движение в положительном или отрицательном направлении.

Легко убедиться, что плато постоянной скорости возникают и в том случае, если периодически изменяется амплитуда периодического потенциала. В реальных системах изменение амплитуды периодического потенциала может быть достигнуто, например, изменением нормального давления. Поэтому в дальнейшем для наглядности мы будем говорить об изменении амплитуды

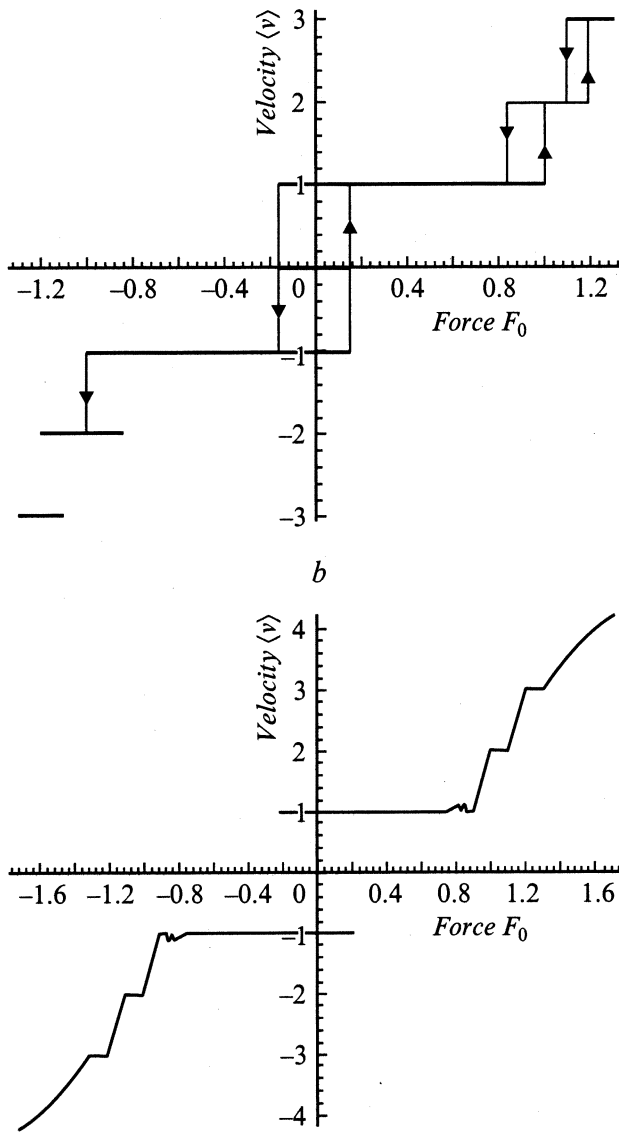


Рис. 5. Закон трения периодически осциллирующей силе, полученный путем численного решения уравнения (22) при следующих значениях параметров: $m = 1$, $\omega = 1$, $\eta = 0.4$, $2\pi/a = 1$. F : a — 1.8, b — 2.3. В случае (a) плато разного порядка частично перекрываются, так что при медленном нарастании и дальнейшем убывании силы имеется гистерезис (изменение состояния системы при этом показано тонкими линиями со стрелками). В случае (b) амплитуда колебаний выбрана таким образом, что плато нулевого порядка отсутствуют. Одновременно ширина плато разного порядка изменилась таким образом, что бистабильность осталась только в области плато первого и минус первого порядков.

колебаний как о „действии нормальной силы“. Действительный механизм изменения амплитуды потенциала не играет существенной роли. Рассмотрим движение тела с постоянной скоростью $v = v_0$ в потенциале, амплитуда которого осциллирует со временем так, что

$$N = N_0 + N_1 \cos \omega t. \quad (23)$$

Сила, действующая на тело (в пренебрежении диссипативной силой), в этом случае равна

$$F = (N_0 + N_1 \cos \omega t) \sin \frac{2\pi}{a} (x_0 + v_0 t). \quad (24)$$

При вычислении ее среднего по времени значения имеют место три случая.

1. Если средняя скорость движения равна нулю $v_0 = 0$, то средняя сила равна

$$F = N_0 \sin \frac{2\pi}{a} x_0 \quad (25)$$

Она может принимать любое значение из интервала $-|N_0| < \langle F \rangle < |N_0|$.

2. При отличной от нуля средней скорости движения $v_0 \neq 0$ и выполнении условия $v_0 \neq a\omega/2\pi$ среднее значение силы тождественно равно нулю

$$\langle F \rangle = 0. \quad (26)$$

3. Наконец, если скорость равна $v_0 = a\omega/2\pi$, то среднее значение первого члена в (24) равно нулю, второе слагаемое приводит к ненулевому значению средней силы

$$\langle F \rangle = \frac{N_1}{2} \sin \frac{2\pi}{a} x_0. \quad (27)$$

Величина силы зависит от начальной координаты и может принимать произвольное значение в интервале

$$-\left| \frac{N_1}{2} \right| < \langle F \rangle < \left| \frac{N_1}{2} \right|.$$

Покажем, что одновременной осцилляцией воздействий в тангенциальном и нормальном направлениях можно добиться асимметрии закона трения и тем самым полной управляемости системы. При этом мы опять начнем с анализа более простой ситуации: зададим осциллирующую скорость и будем вычислять среднее по времени значение силы. Действующая на тело в этом случае дается выражением

$$F = \eta(v_0 + v_1 \cos \omega t) + (N_0 + N_1 \cos(\omega t + \varphi_0)) \times \sin \frac{2\pi}{a} \left(x_0 + v_0 t + \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (28)$$

Ее среднее значение может быть вычислено с использованием тождеств (16), (17). Аналитические выражения могут быть получены для плато любого порядка. В частности, полуширина плато нулевого порядка определяется выражением

$$\Delta F = \sqrt{N_0^2 J_0^2(\psi) + N_1^2 J_1^2(\psi) \sin^2 \varphi_0}. \quad (29)$$

Легко показать, что плато нулевого порядка, а вместе с ним и сила трения покоя исчезают при выполнении условий

$$\psi = 2.4, \quad \varphi_0 = \{0 \text{ либо } \pi\}. \quad (30)$$

При этом полуширины соответственно первого и минус первого плато (рис. 6, *a*) даются выражениями

$$\Delta F_1 = |0.520 \cdot N_0 \mp 0.215 \cdot N_1|, \quad (31)$$

$$\Delta F_2 = |0.520 \cdot N_0 \pm 0.215 \cdot N_1|, \quad (32)$$

где верхний знак соответствует $\varphi_0 = 0$, а нижний — $\varphi_0 = \pi$.

С учетом диссипации происходит смещение первого и минус первого плато в противоположные стороны на равную величину, в результате чего закон трения приобретает вид, схематически показанный на рис. 6, *b*. Оптимальную машину мы получим при такой величине затухания, при которой левый край первого плато лежит точно над правым краем минус первого плато (или наоборот) (рис. 6, *b*). В этом случае тело будет двигаться в положительном направлении как в отсутствие средней внешней силы, так и при действии любой противоположно направленной силы, не превышающей по величине

$$F_0 = \left| \frac{\Delta F_2 - \Delta F_1}{2} \right|.$$

Эта сила представляет собой максимальную тянущую силу, которую может развивать данная система. Измеряя эту силу в единицах N_0 , найдем для максимальной силы тяги

$$\frac{F_0}{N_0} = \frac{1}{2} \left(\left| 0.520 + 0.215 \frac{N_1}{N_0} \right| - \left| 0.520 - 0.215 \frac{N_1}{N_0} \right| \right). \quad (33)$$

Она зависит только от безразмерной амплитуды нормальных осцилляций N_1/N_0 . Максимально возможная сила тяги $0.52N_0$ достигается при амплитуде колебаний $N_1/N_0 \approx 2.4$ и при дальнейшем росте амплитуды колебаний не изменяется. Поскольку, однако, амплитуда нормальных осцилляций, превышающая среднюю нормальную силу, является в большинстве случаев нереалистичной, то максимальная сила тяги в рассматриваемой системе реально может достигать $0.22N_0$.

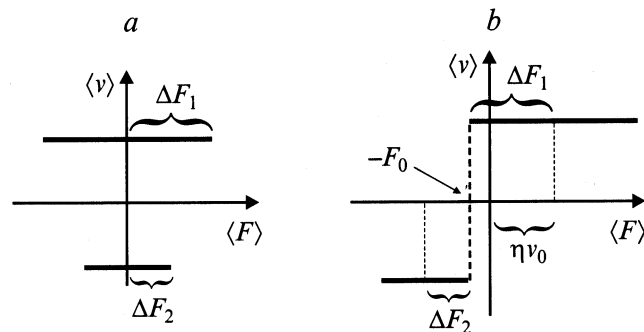


Рис. 6. Схематическое изображение плато постоянной скорости при одновременной осцилляции скорости и амплитуды потенциала. *a* — без затухания, *b* — при оптимальном затухании. В общем случае ширина плато первого и минус первого порядка (соответствующих движению в противоположные стороны) не одинакова.

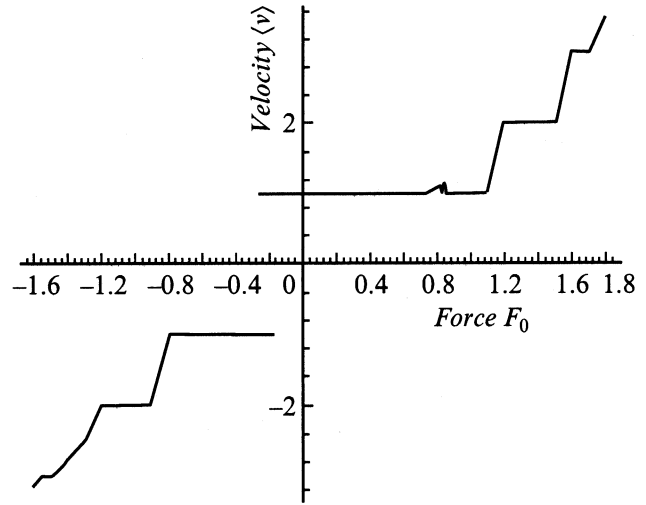


Рис. 7. Закон трения при одновременной осцилляции силы и амплитуды потенциала, полученный путем численного решения уравнения (37) при следующих значениях параметров: $m = 1$, $F_1 = 2.3$, $\omega = 1$, $N_0 = 1$, $N_1 = 0.6$, $\eta = 0.6$, $\varphi_0 = 2.5$, $2\pi/a = 1$. Параметры выбраны таким образом, что плато нулевого порядка отсутствует.

Оптимальная машина реализуется при величине коэффициента затухания

$$\eta = \frac{\Delta F_1 + \Delta F_2}{2V_0} = \pi \frac{|0.520 N_0 + 0.215 N_1| + |0.520 N_0 - 0.215 N_1|}{\omega a}. \quad (34)$$

Разработка способов управления затуханием является поэтому важной проблемой при создании и оптимизации полностью управляемых наномашин.⁴

Вычислим наконец, максимальный коэффициент полезного действия нашей „машины“, определяемый как отношение полезной мощности $F_0 v_0$ к полной диссипируемой в системе мощности. Средняя мощность сил трения при параметрах, определяемых уравнением (30), равна

$$\langle vF \rangle = -v_0 [0.520 N_0 + 0.215 N_1]. \quad (35)$$

Для коэффициента полезного действия получаем

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2} \left(\left| 0.520 + 0.215 \frac{N_1}{N_0} \right| - \left| 0.520 - 0.215 \frac{N_1}{N_0} \right| \right)}{\left[0.520 + 0.215 \frac{N_1}{N_0} \right]}. \quad (36)$$

Коэффициент полезного действия сначала растет с увеличением амплитуды колебаний, достигает при $N_1/N_0 \approx 2.4$ максимума, равного $1/2$, и в дальнейшем

⁴ Принципиальная возможность управления диссипативными силами видна из следующего примера: представим себе, что „наномашинка“ реализована на поверхности полупроводника с инвертированным слоем. Приложением к слою постоянного напряжения можно изменять его проводимость, а тем самым и диссипативные силы, испытываемые адсорбированными атомами.

убывает. При максимальной реалистичной амплитуде нормальных колебаний порядка N_0 коэффициент полезного действия достигает 0.3.

Основные принципиальные черты закона трения сохраняются и в случае, если задается периодическая сила и вычисляется средняя скорость. На рис. 7 представлены результаты численного решения уравнения

$$m\ddot{x} = F_0 + F_1 \sin \omega t - \eta \dot{x} - (N_0 + N_1 \sin(\omega t + \varphi_0)) \cdot \sin(2\pi x/a), \quad (37)$$

описывающего движение под действием осциллирующих нормальной и тангенциальной сил. Амплитуда осцилляций и сдвиг фаз были выбраны таким образом, чтобы нулевое плато исчезло. При этом первое и минус первое плато несимметричны, так что телов отсутствие средней внешней силы (или при малых отрицательных силах) способно совершать устойчивое макроскопическое движение только в положительном направлении. Изменением сдвига фаз при неизменных прочих параметрах можно поменять „ролями“ эти два плато так, что самопроизвольное движение будет происходить только в отрицательном направлении.

4. Наномашины, состоящие из многих тел

Для применения изложенных выше идей к конструированию наномашин важно подчеркнуть, что рассмотренные способы периодического воздействия на систему не являются единственным способом добиться „закона трения“ с управляемыми плато постоянной скорости. В сущности осцилляция любых параметров, влияющих на взаимодействие с периодическим потенциалом, приводит к появлению плато постоянной скорости на зависимости средняя скорость–средняя сила и поэтому потенциально может использоваться для получения систем, создающих силу тяги. Приллюстрируем сказанное на примере наномашин, впервые предложенной в [5].

Рассмотрим систему трех тел в периодическом потенциале (рис. 8). Тела взаимодействуют друг с другом посредством пружин, равновесная длина которых может изменяться с помощью каких-либо внешних воздействий.⁵ Уравнения движения входящих в группу тел имеют вид

$$m\ddot{x}_1 + \eta\dot{x}_1 + N_0 \sin x_1 = k(x_2 - x_1 - l_1),$$

$$m\ddot{x}_2 + \eta\dot{x}_2 + N_0 \sin x_2 = k(x_3 - x_2 - l_2) - k(x_2 - x_1 - l_1), \quad (38)$$

$$m\ddot{x}_3 + \eta\dot{x}_3 + N_0 \sin x_3 = k(x_3 - x_2 - l_2),$$

$$l_1 = l_0 + \delta l \sin(\omega t), \quad l_2 = l_0 + \delta l \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (39)$$

⁵ В случае микросистем это может быть достигнуто, например, применением электро- или магнитно-стрикционных материалов; в случае молекулярных объектов роль активных пружин могут играть хромофоры–молекулы, изменяющие равновесную длину под действием излучения определенной длины волны.

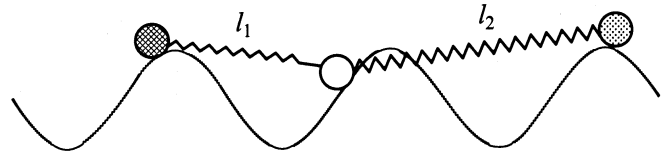


Рис. 8. Наномашина, состоящая из трех тел. Тела связаны друг с другом активными элементами, равновесная длина которых может управляться внешними воздействиями.

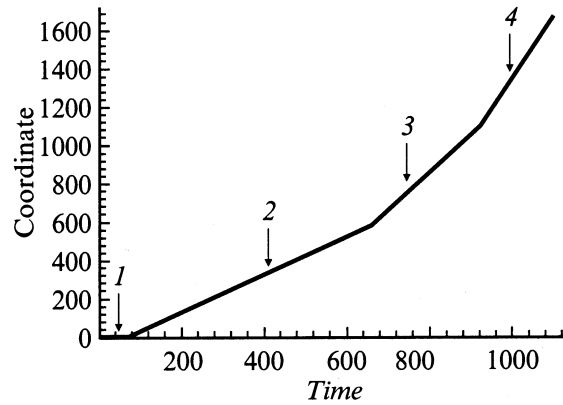


Рис. 9. Зависимость координаты среднего тела от времени для трехчастичной машины, полученная путем численного решения уравнений (38), (39) при следующих значениях параметров: $m = 1$, $\omega = 1$, $F_0 = 0$, $\varphi_0 = \pi$, $l_0 = 3\pi$, $\delta l = \pi$, $\eta = 0.4$. Сила медленно нарастала от нуля до максимального значения. 1 — плато $n = 0$, 2 — плато $n = 1$, 3 — плато $n = 2$, 4 — плато $n = 3$.

Зависимость средняя скорость–средняя сила и в этом случае имеет ярко выраженные плато постоянной скорости. На рис. 9 представлены результаты численного эксперимента, в котором средняя действующая на группу сила медленно нарастала от нуля. Представлена только зависимость координаты среднего тела от времени. При достаточно малой силе воздействия группа остается в состоянии покоя: система находится на нулевом плато. Как только тянущая сила преодолевает некоторое пороговое значение, группа начинает макроскопическое движение. Она движется, однако, с неизменной, не зависящей от силы макроскопической скоростью, отвечающей первому плато. При еще большей силе система перепрыгивает на второе плато и некоторое время движется с новой (дискретной) скоростью и т. д.

На рис. 10 представлена зависимость координат каждого из трех тел от времени. Видно, что движение каждой из частиц с хорошей точностью может быть представлено в виде суперпозиции движения с постоянной скоростью и наложенного на него периодического гармонического движения, причем центр тяжести всех трех тел испытывает намного более слабые колебания, чем каждое из них в отдельности. Для качественного анализа ситуации представляется поэтому допустимым исходить из модели, в которой частицы движутся таким

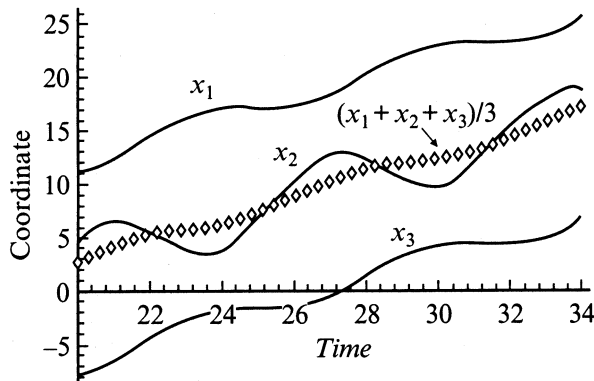


Рис. 10. Зависимость координат частиц и центра тяжести машины, состоящей из трех тел. В первом приближении можно считать, что центр тяжести движется с постоянной скоростью.

образом, чтобы их центр тяжести совершал равномерное поступательное движение. Это предположение может быть физически обосновано тем, что, как мы увидим в дальнейшем, оптимальное функционирование машины происходит при сравнительно больших амплитудах колебаний молекул, что позволяет в первом приближении рассматривать периодический потенциал как „возмущение“ в движении группы тел. В названном приближении движение частиц определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - l_0 + v_0 t - \frac{2}{3} \Delta l \sin \omega t - \frac{1}{3} \Delta l \sin(\omega t + \varphi_0), \\ x_2 &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{3} \Delta l \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{3} \Delta l \sin \omega t, \\ x_3 &= x_0 + l_0 + v_0 t + \frac{2}{3} \Delta l \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{3} \Delta l \sin \omega t. \end{aligned} \quad (40)$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - l_0 + v_0 t - \frac{\Delta l}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \varphi_0} \sin(\omega t + \varphi_1), \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\sin \varphi_0}{2 + \cos \varphi_0}, \\ x_2 &= x_0 + v_0 t + \frac{\Delta l}{3} \sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)} \sin(\omega t - \varphi_2), \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\sin \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}, \\ x_3 &= x_0 + l_0 + v_0 t + \frac{\Delta l}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \varphi_0} \sin(\omega t + \varphi_3), \\ \operatorname{tg} \varphi_3 &= \frac{2 \sin \varphi_0}{1 + 2 \cos \varphi_0}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для среднего значения суммы сил, действующих на частицы (на нулевом плато $n = 0$, $v_0 = 0$), имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{F}{N_0} \right\rangle &= \sin k_0 x_0 \left[2 \cos k_0 l_0 J_0 \left(\frac{k_0 \Delta l}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \varphi_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_0 \left(\frac{k_0 \Delta l}{3} \sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)} \right) \right], \end{aligned} \quad (42)$$

где $k_0 = 2\pi/a$.

Для стабильной работы машины необходимо, чтобы ширина плато нулевого порядка обратилась в нуль. Если выполнено условие

$$\cos k_0 l_0 = 0, \quad l_0 = a(1/4 + n/2), \quad (43)$$

то первое слагаемое в (42) обращается в нуль тождественно (при любых значениях параметров Δl и φ_0), а условие обращения в нуль ширины плато нулевого порядка сводится к обращению в нуль второго слагаемого в (42)

$$J_0 \left(\frac{k_0 \Delta l}{3} \sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)} \right) = 0, \quad (44)$$

откуда

$$\frac{k_0 \Delta l}{3} \sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)} = 2.4. \quad (45)$$

Мы видим, что стабильное функционирование машины описанной конструкции возможно только при

$$\Delta l > 0.573 a, \quad (46)$$

где a — период потенциала.

Обращение в нуль ширины плато нулевого порядка может иметь место и в случае нарушения условия (43). В этом случае, однако, оказываются жестко фиксированными сдвиг фазы φ_0 и амплитуда изменения длины связей Δl . Действительно, в нуль должны обратиться обе функции Якоби в (42), что означает одновременное выполнение условий

$$\frac{k_0 \Delta l}{3} \sqrt{5 + 4 \cos \varphi_0} = 2.4, \quad (47)$$

$$\frac{k_0 \Delta l}{3} \sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)} = 2.4 \quad (48)$$

и возможно только при

$$\cos \varphi_0 = -0.5 \quad (49)$$

и

$$k_0 \Delta l = 2.4\sqrt{3}, \quad \Delta l \approx 0.66 a. \quad (50)$$

Равновесная длина связей при этом остается произвольной и может быть выбрана из соображений обеспечения максимальной силы тяги.

Отметим, что как аналитический расчет, так и многочисленные численные эксперименты указывают на то, что рассмотренная машина, состоящая из трех тел, при строго гармоническом воздействии сохраняет симметричность при любом сдвиге фаз между осциллирующими длин обеих связей. Тем самым не удается добиться стабильного движения машины в желаемом направлении. Симметрия нарушается, если использовать не гармоническое воздействие, а, например, воздействие в форме импульсов, как показано на рис. 11, *a*. В этом случае изменением сдвига фаз удается управлять направлением движения машины (рис. 11, *b*).

Общей чертой рассмотренных в разделах 3, 4, наномашин является наличие как минимум двух независимых

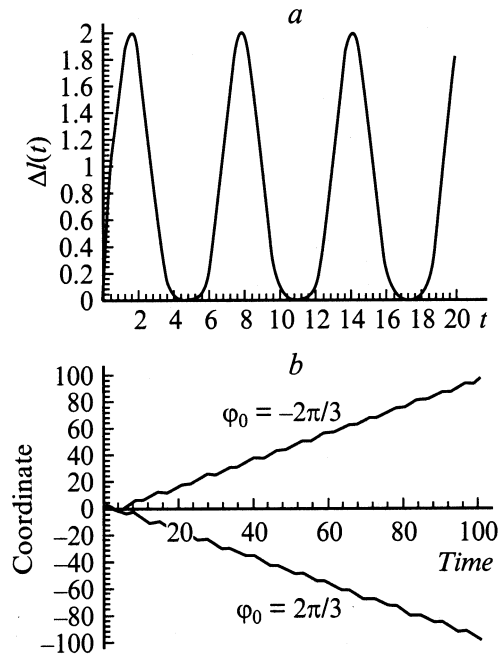


Рис. 11. Зависимость равновесных длин связи в модели (38), (39) от времени и движение машины (показана зависимость координаты среднего тела от времени) при двух различных значениях сдвига фаз между осцилляциями длин связей. Изменение сдвига фаз приводит к изменению направления движения машины. Численные параметры системы те же, что и в подписи к рис. 9.

периодических воздействий. Очевидно, что это есть общее требование, следующее из соображений симметрии. Действительно, наложение только одного периодического воздействия, хотя и приводит к появлению плато постоянной скорости, но не нарушает симметрии системы по отношению к движению в положительном и отрицательном направлениях. Наличие второго воздействия с фиксированным сдвигом фаз по отношению к первому разрушает эту симметрию и делает возможным движение в определенном направлении.

5. Области применения и перспективы

Очевидная область применения изложенных идей — манипулирование движением молекул или молекулярных групп на кристаллических поверхностях либо движением нанообъектов на профилированной твердой поверхности. Одной из основных проблем, которые должны быть решены при практической реализации наномашин, является разработка микроактуаторов, позволяющих создавать периодические воздействия требуемой частоты и амплитуды.

В случае микросистем это могут быть электро- и магнитно-стрикционные элементы. Например, если одна из связей трехчастичной машины, описанной в разделе 4, сделана на основе электрострикционного, а вторая — на основе магнитно-стрикционного материала, то одновременным воздействием электрического и магнитного

полей можно независимо управлять каждой из связей, что достаточно для приведения машины в движение в требуемом направлении.

В случае молекулярных кластеров роль активных элементов могут играть хромофоры — молекулы, изменяющие свою геометрическую форму под действием света определенной длины волны. Использование двух различных хромофоров позволяет независимо управлять длиной каждой из связей.

Второй важной областью применения эффекта возникновения плато постоянной скорости является высокоточное управление скоростью приводных механизмов в различного рода мехатронных системах [14]. „Квантованные“ значения скорости, согласно (19), зависят только от частоты внешнего периодического воздействия и длины волны потенциального рельефа. Они, таким образом, могут устанавливаться с высокой точностью и легко контролироваться путем изменения частоты.

Примером системы, в которой описанный эффект может быть реализован экспериментально, является контакт двух пластин, на которых искусственным образом нанесен периодический (относительно трансляций или ротаций) микрорельеф. В качестве периодического воздействия может быть использован ультразвук.

Полученные результаты позволяют извлечь существенные уроки и в более широком трибологическом контексте. Очевидно, что обычно используемое описание сил сухого трения путем задания коэффициентов трения покоя и скольжения является удовлетворительным только для описания квазистационарных процессов. Закон трения, полученный путем квазистатических измерений, неприменим в ситуациях, в которых мы имеем дело с высокочастотными воздействиями (как, например, в двигателях бегущей волны [15]). Существенно более информативным было бы измерение силы трения между телами под действием суперпозиции постоянной и осциллирующей силы как функции амплитуды и частоты периодического воздействия. Такие измерения позволили бы получать непосредственную информацию о характерных пространственных и временных шкалах, „ответственных“ за процессы трения в рассматриваемой системе, и могли бы стать своего рода „спектроскопией“ трибологических систем.

Очевидно, что дальнейшее исследование искусственных (профилированных) трибологических систем с активными элементами может привести в будущем к созданию управляемых трибологических систем.

Заключение

В настоящей работе изложены общие принципы генерирования направленного движения объектов, находящихся в периодических потенциалах под действием периодических внешних воздействий. Эти принципы по своей природе являются масштабно инвариантными и могут быть реализованы на произвольном масштабном уровне. Мы показали, что периодическая осцилляция

приложенных внешних сил или параметров взаимодействия тела с периодическим внешним потенциалом может приводить к спонтанному направленному движению объектов со скоростью, однозначно определяемой частотой периодического воздействия и пространственным периодом потенциала.

В качестве примеров были рассмотрены тело, на которое действуют периодические силы в тангенциальном и нормальном направлениях; групп трех тел, связанных двумя активными элементами, длина которых периодически осциллирует. Основные принципы генерации направленного движения и изложенные методы математического анализа применимы к произвольным системам, в которых какие-либо параметры, определяющие динамику системы в периодическом потенциале, осциллируют со временем. Совершенно аналогичными свойствами обладает, например, система двух тел, связанных одним активным элементом с осциллирующей длиной при дополнительном воздействии периодической силы, действующей либо в тангенциальном, либо в нормальном направлении. Количество примеров возможных „конструкций“ наномашин без труда может быть увеличено. Практическая реализация наномашин не обязана ориентироваться на предложенные выше конструкции, а должна исходить из реально осуществимых возможностей периодически изменять параметры наносистем.

Автор благодарен К.-Х. Антони и О.К. Дудко за обсуждение работы, а также немецкой Службе академических обменов за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *Drexler K.E.* Nanosystems: Molecular Mashinery, Manufacturing and Computation. New York: Wiley, 1992.
- [2] *Jülicher F., Ajdary A., Prost J.* // *Rev. Mod. Phys.* 1997. Vol. 69. P. 1269.
- [3] *Reimann P.* // *Phys. Rep.* 2002. Vol. 361. P. 57–265.
- [4] *Astumian R.D.* // *Science.* 1997. Vol. 276. P. 917.
- [5] *Porto M., Urbakh M., Klafter J.* // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. N 26. P. 6058–6061.
- [6] *Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю.* Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
- [7] *Tomlinson G.A.* // *Philos. Mag.* 1929. Vol. 7. P. 905.
- [8] *Persson B.N.J.* Sliding Friction. Physical Principles and Applications Second Edition. New York: Springer Verlag, 2000.
- [9] *Zaloz V., Urbakh M., Klafter J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81. N 6. P. 1227.
- [10] *Zaloz V., Urbakh M., Klafter J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82. N 24. P. 4823.
- [11] *Popov V.L.* // *Sol. St. Commun.* 2000. Vol. 115. P. 369–373.
- [12] *Barone A., Paterno G.* Physics and Applications of the Josephson Effect. Wiley & Sons, 1982.
- [13] *Risken H.* The Fokker Planck Equation. Second Edition. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag; 1989. 472 p.
- [14] *Popov V.L.* // *Tech. Phys. Lett.* 2001. Vol. 27 (7). P. 551–553.
- [15] *Wallaschek J.* // *Smart. Mater. Struct.* 1998. Vol. 7. P. 369–381.