

01;03

К вопросу о термофоретическом движении нагретой сферической капли в вязкой жидкости

© Н.В. Малай

Белгородский государственный университет,
308015 Белгород, Россия
e-mail: malay@bsu.edu.ru

(Поступило в Редакцию 12 октября 2001 г. В окончательной редакции 22 апреля 2002 г.)

Получены выражения для силы и скорости термофоретического движения сферической капли в вязкой жидкости при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда.

Постановка задачи

Термофоретическое движение капли возникает во внешнем заданном поле градиента температуры относительно неподвижной жидкости. Под действием термокапиллярной силы и силы вязкого сопротивления среды капля приобретает постоянную скорость — скорость термофореза. Это движение в общем случае связано с возникновением касательных напряжений на поверхности капли за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения σ с температурой T (эффект Марангони [1,2]) и с тепловым скольжением окружающей среды вдоль поверхности частицы K_{ts} . В работе [3] коэффициент теплового скольжения определен для ряда жидкостей (например, для капель ртути, движущихся в воде $K_{ts}^e = K_{ts}^i = 0.13$; для капель ртути, движущихся в глицерине $K_{ts}^e = K_{ts}^i = 2.5 \cdot 10^{-5}$). Здесь и далее индексы e и i будем относить соответственно к вязкой жидкости и частице; индексом ∞ обозначены параметры жидкости вдали от капли, а индексом s — значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, равной T_s . Заметим, что до настоящего времени пока удалось рассчитать с разумной степенью точности коэффициент теплового скольжения для газов [4]. Это связано с отсутствием строгой математической теории неоднородных жидкостей.

Рассматривается установившееся движение нагретой капли вязкой несжимаемой жидкости в другой, не смешивающейся с ней вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Под нагретой частицей понимают частицу, средняя температура поверхности которой по величине значительно превышает температуру окружающей среды. Нагрев поверхности капли может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы; поглощением электромагнитного излучения и т.д. Нагретая поверхность капли оказывает значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды и тем самым существенно может повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности. На бесконечности жидкость покоится и имеется заданный постоянный градиент температуры. Предполагается, что плотности,

теплопроводности, теплоемкости жидкостей вне и внутри капли постоянны, коэффициент вязкости капли по величине больше коэффициента вязкости внешней жидкости, коэффициент поверхностного натяжения — произвольная функция температуры, движение капли достаточно медленное (малые числа Пекле и Рейнольдса) и она сохраняет сферическую форму (искажение сферической формы будет рассмотрено ниже).

В отличие от изученного ранее [1–8] в работе рассматривается термофоретическое движение сферической капли при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. В уравнении гидродинамики принимается во внимание зависимость вязкости от температуры, представленная в виде экспоненциально-степенного ряда, а в уравнении теплопроводности учитываются конвективные члены.

В [9,10] для гидродинамической задачи, а в [11] для тепловой показано, что вдали от сферы инерционные и конвективные члены становятся одного порядка с членами молекулярного переноса, поэтому обычный метод разложения по малому параметру дает известную погрешность, так как уже во втором приближении не позволяет строго удовлетворить граничным условиям на бесконечности и получить точное единое решение, однородно справедливое для всей области течения.

В работе [12] показано, что нагрев поверхности капли и учет движения среды существенно влияют на ее силу сопротивления. Целью данной работы является изучение влияния движения среды на величину силы и скорости термофореза нагретой капли при произвольных перепадах температуры в ее окрестности в заданном внешнем поле градиента температуры.

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости сильно зависит от температуры [13]. Для учета зависимости вязкости от температуры воспользуемся формулой (1), которая позволяет описывать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [13])

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right)^n \right] \exp \left\{ -A \left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right) \right\}. \quad (1)$$

Таблица 1.

Глицерин: $A = 17.29$, $F_1 = -1.228$, $F_2 = 7.022$, $T_\infty = 303$ K			
T , °C	μ_{cal} , Pa · s	μ_{exp} , Pa · s	$\frac{ \mu_{\text{exp}} - \mu_{\text{cal}} }{\mu_{\text{exp}}} 100\%$
30	0.600000	0.600	0.00
40	0.327979	0.330	0.61
50	0.182001	0.180	1.11
60	0.102619	0.102	0.60
70	0.058797	0.059	0.34
80	0.034212	0.035	2.25
90	0.020189	0.021	3.86

Примечание. μ_{cal} — динамическая вязкость, рассчитанная по формуле (1); μ_{exp} — экспериментальное значение.

Таблица 2.

Вода: $A = 5.779$, $F_1 = -2.318$, $F_2 = 9.118$, $T_\infty = 273$ K			
T , °C	μ_{cal} , Pa · s	μ_{exp} , Pa · s	$\frac{ \mu_{\text{exp}} - \mu_{\text{cal}} }{\mu_{\text{exp}}} 100\%$
0	0.0017525	0.0017525	0.00
10	0.0013151	0.0012992	1.22
20	0.0010089	0.0010015	0.74
30	0.0007943	0.0007971	0.35
40	0.0006433	0.0006513	1.22
50	0.0005359	0.0005441	1.51
60	0.0004581	0.0004630	1.06
70	0.0004002	0.0004005	0.07
80	0.0003556	0.0003509	1.35
90	0.0003199	0.0003113	2.76

Известно, что вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [13]. Анализ имеющихся полуэмпирических формул показал, что выражение (1) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью. Без учета коэффициентов F_n относительная погрешность может составить до 40%. Для иллюстрации в табл. 1, 2 приведены значения F_n для двух жидкостей: глицерина и воды. Относительная погрешность не превышает 3%. Коэффициенты F_n рассчитывались с помощью математического пакета Maple V.

Выберем начало неподвижной системы координат в мгновенном положении центра сферической капли радиуса R . Будем предполагать, что капля движется с постоянной скоростью \mathbf{U} в отрицательном направлении оси OZ . Распределения скорости и давления должны быть симметричными относительно оси, проходящей через центр капли и параллельной вектору скорости \mathbf{U} . В рамках сформулированных допущений в сферической системе координат уравнения и граничные условия для скорости и температуры запишутся в виде [14,15]

$$\nabla P_e = \mu_e \Delta \mathbf{U}_e + 2(\nabla \mu_e \nabla) \mathbf{U}_e + [\nabla \mu_e \text{rot } \mathbf{U}_e], \quad \text{div } \mathbf{U}_e = 0, \quad (2)$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{U}_i = \nabla P_i, \quad \text{div } \mathbf{U}_i = 0, \quad (3)$$

$$\rho_e c_e (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \quad (4)$$

$$\rho_i c_i (\mathbf{U}_i \nabla) T_i = \lambda_i \Delta T_i + q_i, \quad (5)$$

$$r = R, \quad T_e = T_i, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r},$$

$$U_r^e = U_r^i = -U \cos \Theta,$$

$$U_\Theta^e - U_\Theta^i = K_{ts}^e \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \Theta} - K_{ts}^i \frac{v_i}{RT_i} \frac{\partial T_i}{\partial \Theta} \quad (v = \mu/\rho), \quad (6)$$

$$\mu_e \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\Theta^e}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \Theta} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial \Theta} = \mu_i \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\Theta^i}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^i}{\partial \Theta} \right],$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{U}_e \rightarrow 0, \quad P_e \rightarrow P_\infty,$$

$$T_e \rightarrow T_\infty + |\nabla T| r \cos \Theta, \quad (7)$$

$$r \rightarrow 0, \quad |\mathbf{U}_i| \neq \infty, \quad P_i \neq \infty, \quad T_i \neq \infty. \quad (8)$$

Здесь $q_i(r, \Theta)$ — плотность тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме капли. В частности, если нагрев капли происходит за счет поглощения электромагнитного излучения, то степень неоднородности зависит от оптических констант материала вещества капли ($m_i = n_i + ia_i$, m_i , n_i и a_i — комплексный показатель преломления, показатель преломления и показатель поглощения вещества капли) и параметра дифракции $x_d = 2\pi R/\lambda$ (λ — длина волны). Выражение для плотности энергии излучения в капле, трансформируемой в тепло, можно представить в виде [16]

$$q_i = \frac{4\pi R n_i a_i}{n_e} I B_i,$$

где I — интенсивность падающего излучения; B_k — функция координат, рассчитываемая по теории Ми.

В [16] приведены результаты численных расчетов распределения величины B_k для капель воды. Расчеты показали, что неоднородность распределения поглощенной в капле энергии увеличивается с увеличением ее радиуса, с уменьшением коэффициента поглощения и наибольшая неоднородность поглощенной энергии имеет место в направлении распространения излучения.

В граничных условиях (6) на поверхности ($r = R$) капли учтены условие непроницаемости для нормальных компонент скорости, равенство температур, непрерывность потоков тепла, равенство касательных скоростей для внутренней и внешней среды и непрерывность касательных составляющих тензора напряжений.

На большом расстоянии от капли ($r \rightarrow \infty$) справедливы граничные условия (7), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $r \rightarrow 0$, учтена в (8).

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные ρ_e , μ_∞ , λ_e , c_e и сохраняющиеся в процессе движения сферической капли R , $|\nabla T|$, T_∞

и U . Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: $\varepsilon = R|\nabla T|/T_\infty \ll 1$, характеризующая перепад температуры на размере частицы, и числа Рейнольдса и Пекле.

Обезразмерим уравнения (2)–(5) и граничные условия (6)–(8), вводя безразмерные скорость, температуру и давление следующим образом: $\mathbf{V}_k = \mathbf{U}_k/U$, $t_k = T_k/T_\infty$, $p_k = P_k/P_\infty$ ($P_\infty = (\mu_\infty U)/R$, $k = e, i$). Здесь в качестве единицы изменения расстояния выбран радиус капли R , температуры T_∞ , давления P_∞ и скорости U , где $U \sim |\mu_\infty \nabla T|/(\rho_e T_\infty)$.

При $\varepsilon \ll 1$ решение уравнений гидродинамики и теплопереноса следует искать в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}^{(1)} + \dots,$$

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \dots, \quad t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots \quad (9)$$

Вид граничных условий (6)–(8) указывает на то, что выражение для компонент скорости V_r и V_Θ ищется в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по ее поверхности. Учитывая свойства полиномов Лежандра и Гегенбауэра, можно принять, что величина этой силы определяется первыми членами разложений, поэтому можем записать

$$V_r = G(y) \cos \Theta, \quad V_\Theta = -g(y) \sin \Theta, \quad (10)$$

где $G(y)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от обезразмеренной радиальной координаты $y = r/R$.

При исследовании движения неравномерно нагретых капель в вязкой среде во внешнем постоянном поле градиента температуры необходимо учитывать наряду с зависимостью коэффициента динамической вязкости от температуры и зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Это связано с неоднородностью распределения плотности тепловых источников q_i в объеме капли. В работе использовался произвольный вид зависимости коэффициент поверхностного натяжения от температуры. Кроме этого, впервые предпринята попытка учесть влияние движения среды на силу и скорость термокапиллярного дрейфа нагретой капли в вязкой жидкости. Поэтому полученные в конечном итоге формулы носят наиболее общий характер и справедливы при любых перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Поля температур вне и внутри нагретой капли

При нахождении силы, действующей на неравномерно нагретую каплю, и скорости ее движения мы ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри капли. Для этого необходимо решить уравнения (4), (5) с соответствующими граничными условиями. Уравнения теплопроводности в обезразмеренном виде равны

$$\varepsilon \text{Pr}_\infty (\mathbf{V}_e \nabla) t_e = \Delta t_e, \quad (11)$$

$$\varepsilon \text{Pr}_\infty \beta (\mathbf{V}_i \nabla) t_i + Q = \Delta t_i, \quad (12)$$

$$y = 1, \quad t_i = t_e, \quad \lambda_e \frac{\partial t_e}{\partial y} = \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial y},$$

$$y \rightarrow \infty, \quad t_e \rightarrow 1 + \varepsilon y \cos \Theta, \quad (13)$$

$$y \rightarrow 0, \quad t_i < \infty.$$

Здесь $\text{Pr}_\infty = \mu_\infty c_e / \lambda_e$ — число Прандтля; $\beta = \chi_e / \chi_i$, χ — коэффициент температуропроводности; $Q = -q_i R^2 / (\lambda_i T_\infty)$. Подставляя (9) в уравнения (11), (12), получаем следующую систему уравнений до первого порядка малости включительно: нулевое приближение ($\varepsilon = 0$)

$$\Delta t_e^{(0)} = 0, \quad (14)$$

$$\Delta t_i^{(0)} = Q_0, \quad (15)$$

$$y = 1, \quad t_e^{(0)} = t_i^{(0)}, \quad \lambda_e \frac{\partial t_e^{(0)}}{\partial y} = \lambda_i \frac{\partial t_i^{(0)}}{\partial y},$$

$$y \rightarrow \infty, \quad t_e^{(0)} \rightarrow 1,$$

$$y \rightarrow 0, \quad t_i^{(0)} < \infty.$$

первое приближение ($\sim \varepsilon$)

$$\text{Pr}_\infty \left(V_r^e \frac{\partial t_e^{(0)}}{\partial y} + \frac{V_\Theta^e}{y} \frac{\partial t_e^{(0)}}{\partial \Theta} \right) = \Delta t_e^{(1)}, \quad (16)$$

$$\text{Pr}_\infty \beta \left(V_r^e \frac{\partial t_e^{(0)}}{\partial y} + \frac{V_\Theta^e}{y} \frac{\partial t_e^{(0)}}{\partial \Theta} \right) + Q_1 = \Delta t_i^{(1)}, \quad (17)$$

$$y = 1, \quad t_i^{(1)} = t_e^{(1)}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i^{(1)}}{\partial y} = \lambda_e \frac{\partial t_e^{(1)}}{\partial y},$$

$$y \rightarrow \infty, \quad t_e^{(1)} \rightarrow y \cos \Theta,$$

$$y \rightarrow 0, \quad t_i^{(1)} < \infty.$$

При получении уравнения, описывающего распределение температуры внутри капли, предполагалось, что

$$-\sum_{n=0}^{\infty} q_i(r, \Theta) \frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Q_n P_n(x),$$

где

$$Q_n = -\frac{R^2}{T_\infty} \frac{2n+1}{2\lambda_i} \int_{-1}^{+1} q_i(r, \Theta) P_n(x) dx, \quad x = \cos \Theta.$$

Найдем нулевые приближения. Общие решения уравнений (14), (15) имеют вид

$$t_e^{(0)}(y) = 1 + \frac{\gamma}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n}{y^{n+1}} P_n(x), \quad (18)$$

$$t_i^{(0)}(y) = B_0 + \frac{1}{4\pi R T_\infty \lambda_i y} \int_V q_i dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy, \quad (19)$$

где

$$\psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_\infty} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \Theta) dx.$$

В (19) интегрирование ведется по всему объему капли. Постоянные интегрирования γ , Γ_n и B_0 определяются при подстановке (18), (19) в соответствующее граничное условие. После подстановки получаем

$$\gamma = t_s - 1, \quad B_0 = 1 + \left(1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i}\right) \gamma,$$

$\Gamma_n = 0$ при $n \geq 1$, $t_s = T_s/T_\infty$, T_s — средняя температура поверхности капли, определяемая формулой (10):

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_e T_\infty} \int_V q_i dV. \quad (20)$$

В (20) интегрирование также ведется по всему объему капли.

При $\lambda_e < \lambda_i$ в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу Θ в системе капля–жидкая среда и считать, что вязкость зависит только от температуры $t_e^{(0)}(y)$, т.е. $\mu_e(t_e) = \mu_e(t_e^{(0)})$. С учетом этого выражение (1) принимает вид

$$\mu_e = \mu_\infty \exp\left\{-A \frac{\gamma}{y}\right\} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma^n}{y^n}\right]. \quad (21)$$

Формула (21) в дальнейшем используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой капли.

Найдем первые приближения. Подставляя (18), (19) в (16), (17), получаем

$$-\omega \frac{V_r^e}{y^2} = \Delta t_e^{(1)}, \quad (22)$$

$$\text{Pr}_\infty \beta \frac{V_r^i}{y^2} \left(\int_1^y \psi_0 dy - \gamma \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) + Q_1 \cos \Theta = \Delta t_i^{(1)}, \quad (23)$$

где $\omega = \text{Pr}_\infty \gamma$.

Из (22), (23) видим: чтобы найти $t_e^{(1)}$, $t_i^{(1)}$, необходимо сначала определить поле скорости вне и внутри капли, т.е. решить гидродинамическую задачу.

Определение силы сопротивления

Подставляя (22) в уравнения гидродинамики, учитывая (10), разделяя переменные, получаем уравнение, аналогичное [17]. В итоге имеем следующие выражения

для компонент массовой скорости и давления, удовлетворяющие крайним условиям (7), (8):

$$V_r^e(y, \Theta) = \cos \Theta (A_1 G_1 + A_2 G_2),$$

$$V_\Theta^e(y, \Theta) = -\sin \Theta (A_1 G_3 + A_2 G_4),$$

$$p_e(y, \Theta) = 1 + \eta_e \cos \Theta (A_1 G_5 + A_2 G_6), \quad (24)$$

$$V_r^i(y, \Theta) = \cos \Theta (A_3 + A_4 y^2),$$

$$V_\Theta^i(y, \Theta) = -\sin \Theta (A_3 + 2A_4 y^2),$$

$$p_i(y, \Theta) = p_{0i} + 10\eta_i \cos \Theta y^2 A_4, \quad \eta = \mu/\mu_\infty, \quad (25)$$

где

$$G_1 = -\frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)y^n}, \quad G_2 = -\frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(2)}}{(n+1)y^n}$$

$$- \frac{\alpha}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3) \ln \frac{1}{y} - 1 \right] \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+3)^2 y^n},$$

$$G_3 = G_1 + \frac{y}{2} G_1^I,$$

$$G_5 = \frac{y^2}{2} G_1^{III} + y \left(3 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_1^{II}$$

$$+ \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_1^I, \quad G_4 = G_2 + \frac{y}{2} G_2^I,$$

$$G_6 = \frac{y^2}{2} G_2^{III} + y \left(3 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_2^{II}$$

$$+ \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) G_2^I, \quad (26)$$

$s_n = AF_{n-1} - nF_n - \sum_{k=1}^n s_{n-k} F_k$, $F_0 = 1$, F_n при $n < 0$ равны нулю. В (26) G_k^I , G_k^{II} и G_k^{III} — первая, вторая и третья производные по y от соответствующих функций ($k = 1, 2$).

Значения коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$ находятся с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\Delta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)} \sum_{k=1}^n [(n+4-k)$$

$$\times \{\alpha_k^{(1)}(n+5-k) - \alpha_k^{(2)}\} + \alpha_k^{(3)}] \gamma^k \Delta_{n-k}^{(1)} \quad (n \geq 1), \quad (27)$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n+3)(n-2)} \left[-6\alpha_n^{(4)} \gamma^n + \sum_{k=1}^n \{(n+2-k)$$

$$\times [(n+3-k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}] + \alpha_k^{(3)}\} \gamma^k \Delta_{n-k}^{(2)}$$

$$+ \alpha \sum_{k=0}^n \{(2n+5-2k)\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}\} \gamma^k \Delta_{n-k-2}^{(1)} \quad (n \geq 3). \quad (28)$$

При вычислении коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$ по формулам (27), (28) необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(1)} &= -3, \quad \Delta_0^{(2)} = -1, \quad \Delta_2^{(2)} = 1, \quad \alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(4)} = 1, \\ \alpha_0^{(2)} &= 4, \quad \alpha_0^{(3)} = -4, \quad \alpha_n^{(1)} = F_n, \\ \alpha_n^{(2)} &= (4-n)F_n + AF_{n-1}, \quad \alpha_n^{(4)} = A^n/n!, \\ \alpha_n^{(3)} &= 2AF_{n-1} - 2(2+n)F_n, \\ \Delta_1^{(2)} &= -\gamma[6\alpha_1^{(4)} + 2(3\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}], \\ \alpha &= \frac{\gamma}{15} \{ -6\gamma\alpha_2^{(4)} + [3(4\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}) + \alpha_1^{(3)}]\Delta_1^{(2)} - [2(3\alpha_2^{(1)} - \alpha_2^{(2)}) + \alpha_2^{(3)}]\gamma \}. \end{aligned}$$

Подставляя (24) в (22), имеем следующее уравнение для функции $t_e^{(1)}$:

$$\Delta t_e^{(1)} = -\frac{\omega}{y^2} G(y) \cos \Theta. \quad (29)$$

Здесь $G(y) = A_1G_1 + A_2G_2$. Решение для $t_e^{(1)}$ ищем в виде

$$t_e^{(1)} = \tau_e(y) \cos \Theta. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), убеждаемся, что переменные разделяются и для $t_e^{(1)}$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\tau_e}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d\tau_e}{dy} - \frac{2}{y^2} \tau_e = -\frac{\omega}{y^2} G. \quad (31)$$

Общее решение уравнения (31), удовлетворяющее краевому условию при $y \rightarrow \infty$, имеет вид

$$t_e^{(1)}(y, \Theta) = \left\{ \frac{\Gamma}{y^2} + y + \omega \sum_{k=1}^2 A_k \tau_k \right\} \cos \Theta, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1(y) &= \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+1)(n+3)(n+4)y^n}, \\ \tau_2(y) &= -\frac{1}{y} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\Delta_1^{(2)}}{6y} \ln y - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(2)}}{(n^2-1)(n+2)y^n} - \frac{\alpha}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+3)(n+4) \ln \frac{1}{y} - (3n^2 + 16n + 19) \right] \times \frac{\Delta_n^{(1)}}{(n+1)^2(n+3)^2(n+4)^2y^n} \right\}. \end{aligned}$$

Решение для $t_i^{(1)}$ ищем в виде

$$t_i^{(1)} = \tau_i(y) \cos \Theta. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (23), имеем следующее уравнение для функции $t_i^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\infty} \beta \frac{V_r^i}{y^2} \left(\int_1^y \psi_0 dy - \gamma \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) + Q_1 \cos \Theta \\ = \frac{d^2\tau_i}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d\tau_i}{dy} - \frac{2}{y^2} \tau_i. \end{aligned} \quad (34)$$

Общее решение уравнения (34), удовлетворяющее краевому условию при $y \rightarrow 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} t_i^{(1)} = \cos \Theta \left[By + \frac{C}{y^2} + \omega \frac{\beta\lambda_e}{2\lambda_i} \left(A_3 - \frac{A_4}{2} y^2 \right) + \frac{1}{3} \left\{ y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right\} + \frac{1}{3} \left\{ y \int_1^y \Omega \left(A_4 + \frac{A_3}{y^2} \right) dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \Omega (A_3 y + A_4 y^3) dy \right\} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_{\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i x dx, \\ C &= \frac{RJ}{3T_{\infty} \lambda_i} - \frac{\omega}{6} \frac{\beta\lambda_e}{\lambda_i} \left(A_3 + \frac{A_4}{2} \right), \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3, \\ J &= \frac{1}{V} \int_V q_i z dV, \quad \Omega = \text{Pr}_{\infty} \beta \int_1^y \psi_0 dy, \end{aligned}$$

$$z = r \cos \Theta, \quad \int_V q_i z dV$$

— дипольный момент плотности тепловых источников.

Постоянные интегрирования Γ, B определяются из граничных условий на поверхности (равенство температур и потоков тепла). В частности,

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \right) + \frac{RJ}{\lambda_i \delta T_{\infty}} \\ &\quad - \frac{\omega}{\delta} \left[A_1 \left(\tau_1 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \tau_1^I \right) + A_2 \left(\tau_2 - \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \tau_2^I \right) \right], \end{aligned}$$

где $\delta = 1 + 2(\lambda_e/\lambda_i)$, τ_1^I, τ_2^I — первая производная по y от функций τ_1, τ_2 .

Таким образом, в первом приближении по ε нами определены поля температур вне и внутри капли. Следовательно, можно, используя граничные условия на поверхности частицы для компонентов скоростей, найти постоянные интегрирования A_1, A_2, A_3 и A_4 , входящие в выражения (24), (25).

Приведем явный вид коэффициента A_2 , поскольку, как будет показано ниже, именно через этот коэффициент выражается общая сила, действующая на каплю,

$$A_2 = -\frac{1}{\Delta} \left(N_3 + \frac{\mu_e}{3\mu_i} N_4 \right) - \varepsilon \frac{2G_1}{3U\Delta} \left[3 \frac{\lambda_e}{\delta \lambda_i} + \frac{RJ}{\delta T_\infty \lambda_i} - \frac{\omega}{\delta} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{2\tau_1 + \tau_1^1}{G_1} \right] \times \left(K_{ts}^e \frac{v_e^s}{t_s} - K_{ts}^i \frac{v_i^s}{t_s} + \frac{R}{3\mu_i^s} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right),$$

где

$$\Delta = N_1 + \frac{\mu_e}{3\mu_i} N_2 + \frac{2}{3\mu_\infty} \rho_e R \frac{\omega}{\delta} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} [G_1 \Phi_2 - G_2 \Phi_1] \times \left(K_{ts}^e \frac{v_e^s}{t_s R} - K_{ts}^i \frac{v_i^s}{t_s R} + \frac{1}{3\mu_i^s} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right),$$

$$\Phi_k = 2\tau_k + \tau_k^1 \quad (k = 1, 2).$$

Сила, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по ее поверхности [18] и равна

$$F = \oint_s \left\{ -P_e \cos \Theta + \sigma_{rr}^e \cos \Theta - \sigma_{r\Theta}^e \sin \Theta \right\} r^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi \Big|_{y=1}. \quad (36)$$

Здесь

$$\sigma_{rr}^e = 2\mu_e \frac{\partial U_r^e}{\partial r}, \quad \sigma_{r\Theta}^e = \mu_e \left(\frac{\partial U_\Theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \Theta} - \frac{U_\Theta^e}{r} \right).$$

Подставляя в (36) выражения (24), после интегрирования получаем

$$F = 4\pi R \mu_\infty U A_2 \exp\{-A\gamma\}. \quad (37)$$

С учетом явного вида коэффициента A_2 полная сила, действующая на нагретую каплю во внешнем заданном поле градиента температуры, будет аддитивно складываться из силы вязкого сопротивления среды \mathbf{F}_μ , термофоретической силы \mathbf{F}_{th} , силы \mathbf{F}_q , пропорциональной дипольному моменту плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме капли, и силы \mathbf{F}_d , обусловленной движением среды (т.е. учета конвективных членов в уравнении теплопроводности),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \varepsilon \mathbf{F}^{(1)}, \quad \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{F}_{th} + \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_d, \quad (38)$$

где $\mathbf{F}_\mu = -6\pi R \mu_\infty U f_\mu \mathbf{n}_z$, $\mathbf{F}_{th} = -6\pi R \mu_\infty f_{th} \mathbf{n}_z$, $\mathbf{F}_q = -6\pi R \mu_\infty f_q \mathbf{J} \mathbf{n}_z$, $\mathbf{F}_d = -6\pi R \mu_\infty f_m \mathbf{n}_z$.

Значения коэффициентов f_μ , f_{th} , f_q и f_m могут быть оценены из следующих выражений:

$$f_\mu = \frac{2}{3\Delta} \left[N_3 + \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} N_4 \right] \exp\{-A\gamma\},$$

$$f_{th} = \frac{4G_1}{3\Delta R} \frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s \delta} \left(K_{ts}^e \frac{v_e^s}{t_s} - K_{ts}^i \frac{v_i^s}{t_s} + \frac{R}{3\mu_i^s} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right) \exp\{-A\gamma\},$$

$$f_q = \frac{4}{9\Delta} \frac{G_1}{\lambda_i^s T_\infty \delta} \left(K_{ts}^e \frac{v_e^s}{t_s} - K_{ts}^i \frac{v_i^s}{t_s} + \frac{R}{3\mu_i^s} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right) \exp\{-A\gamma\},$$

$$f_m = -\frac{4}{9\Delta R} \frac{\omega}{\delta} \frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s} [2\tau_1 + \tau_1^1] \times \left(K_{ts}^e \frac{v_e^s}{t_s} - K_{ts}^i \frac{v_i^s}{t_s} + \frac{R}{3\mu_i^s} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right) \exp\{-A\gamma\}.$$

При оценке коэффициентов f_μ , f_{th} , f_q и f_m необходимо учитывать, что индексом s обозначены значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности капли T_s , которая определяется по формуле (20); функции $N_1, N_2, N_3, N_4, \tau_1, \tau_2, \tau_1^1, \tau_2^1, G_1$ и G_2 берутся при $y = 1$ ($N_4 = 2G_1^I + G_1^{II}$, $N_3 = -G_1^I$, $N_2 = [G_2(2G_1^I + G_1^{II}) - G_1(2G_2^I + G_2^{II})]$, $N_1 = G_1 G_2^I - G_2 G_1^I$).

Приравнивая полную силу к нулю, получаем выражение для скорости упорядоченного движения капли во внешнем заданном поле градиента температуры

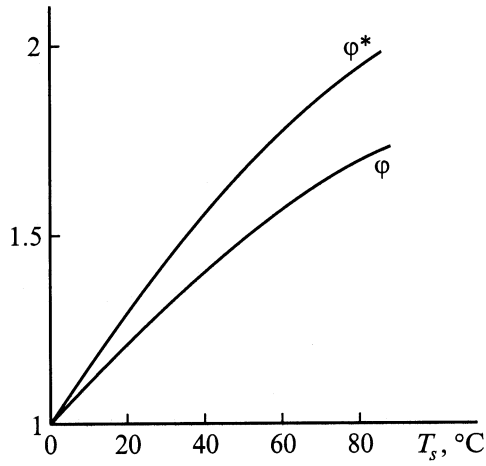
$$\mathbf{U} = -\varepsilon U^{(1)} \mathbf{n}_z, \quad U^{(1)} = U_{th} + U_q + U_d, \quad (39)$$

где $U_{th} = h_{th}$, $U_q = h_q \mathbf{J}$, $U_d = h_m$ ($h_{th} = f_{th}/f_\mu$, $h_q = f_q/f_\mu$, $h_m = f_m/f_\mu$).

В случае, когда величина нагрева поверхности капли достаточно мала, т.е. средняя температура поверхности капли незначительно отличается от температуры окружающей среды на бесконечности ($\gamma \rightarrow 0$), зависимость коэффициента вязкости от температуры можно пренебречь и тогда $G_1 = 1$, $G_1^I = -3$, $G_1^{II} = 12$, $G_2 = 1$, $G_2^I = -1$, $G_2^{II} = 2$, $N_1 = 2$, $N_2 = 6$, $N_3 = 3$, $N_4 = 6$, $\tau_1 = -1/4$, $\tau_1^1 = 3/4$, $\tau_2 = 1/2$ и $\tau_2^1 = -1/2$. Формулы (38), (39) переходят в известные в литературе выражения [1–6].

Формулы (38), (39) позволяют при известном распределении по объему нагретой капли тепловых источников учесть влияние движения среды на величину силы сопротивления, действующей на каплю, а также нагрев поверхности частицы на термокапиллярную силу и скорость при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее, а также экспоненциальный вид зависимости вязкости от температуры во внешнем постоянном поле градиента температуры. Полученные выше формулы (38), (39) носят наиболее общий характер.

Из этих формул видно, что на величину и направление силы $\mathbf{F}^{(1)}$ и скорости $\mathbf{U}^{(1)}$ оказывают влияние и направление дипольного момента плотности тепловых источников $\int q_i z dV$. Если, например, нагрев поверхности капли происходит за счет поглощения электромагнитного излучения, то дипольный момент может быть как отрицательным (большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к потоку излучения), так и положительным (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы). Это зависит от оптических свойств капли.



Зависимости функции φ , φ^* от средней температуры поверхности T_s .

Учитывая, что величина поверхностного натяжения для большинства жидкостей уменьшается с температурой, т.е. $\partial\sigma/\partial t_i < 0$, а величина же $\int_V q_i z dV$ может быть как положительной, так и отрицательной, то будет меняться и величина и направление силы $\mathbf{F}^{(1)}$ и скорости $\mathbf{U}^{(1)}$.

Кроме того, из полученных формул вытекает, что сила $\mathbf{F}^{(1)}$ и скорость $\mathbf{U}^{(1)}$ существенно зависят и от теплопроводности капли. При λ_i , стремящимся к бесконечности, $\mathbf{F}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(1)}$ при фиксированной величине дипольного момента плотности тепловых источников стремятся к нулю.

В пределе при $\mu_i \rightarrow \infty$ полученные выше формулы могут быть использованы для оценки силы и скорости движения твердой неравномерно нагретой сферической частицы в вязкой жидкости, в которой поддерживается постоянный градиент температуры.

Для иллюстрации вклада нагрева поверхности капли в скорость ее дрейфа на рисунке приведены кривые, связывающие значения функции $\varphi = h_{th}/h_{th}|_{T_s=273\text{K}}$ со средней температурой поверхности капли T_s . Численные оценки проводились для капель ртути, взвешенных в воде при $T_\infty = 273\text{K}$, $R = 15\mu\text{m}$ ($\partial\sigma/\partial T = -2 \cdot 10^{-4}\text{N/mK}$, $\text{Pr}_\infty = 12.99$). Значение функции φ^* оценивалось по формуле (39) при малых относительных перепадах температуры ($\gamma \rightarrow 0$), но коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности капли T_s .

Чтобы оценить, какой вклад движение среды вносит в термокапиллярный дрейф капли, необходимо конкретизировать природу тепловых источников. В этом случае можно найти выражение для дипольного момента плотности тепловых источников. Для качественного анализа мы рассмотрим самый простой случай. Будем предполагать, что нагрев частицы происходит за счет поглощения электромагнитного излучения и капля поглощает излучение как черное тело. Когда частица поглощает излучение как черное тело, поглощение излучения происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$,

прилежащем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью следующей формулы:

$$q_i(r, \Theta) = \begin{cases} -\frac{I}{\delta R} \cos \Theta, & \frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \pi, R - \delta R \leq r \leq R, \\ 0, & 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (40)$$

где I — интенсивность падающего излучения, которая связана со средней относительной температурой поверхности частицы следующим соотношением:

$$t_s = 1 + \frac{R}{4\lambda_i T_\infty} I.$$

С учетом (40) интегралы, входящие в выражения для силы, действующей на нагретую каплю, и скорости ее дрейфа вычисляются непосредственно

$$\int_V q_i(r, \Theta) z dV = -\frac{2}{3} \pi R^3 I, \quad \int_V q_i(r, \Theta) dV = \pi R^2 I.$$

Соответственно формулы (38), (39) можно представить в более компактном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -6\pi R \mu_\infty U \varphi_\mu \mathbf{n}_z - \varepsilon 6\pi R \mu_\infty f_{ph} \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{U}_{ph} &= -\varepsilon h_{ph} \mathbf{n}_z, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_\mu &= \frac{2}{3\Delta_h} \left[N_3 + \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} N_4 \right] \exp\{-A\gamma\}, \quad h_{ph} = f_{ph}/\varphi_\mu, \\ f_{ph} &= \frac{4}{3\mu_i^s} \frac{G_1}{\Delta_h \delta} \frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s} \\ &\times \left[1 - \frac{R}{6\lambda_e^s T_\infty} I \left(\frac{\text{Pr}_\infty}{2} \frac{2\tau_1 + \tau_1^1}{G_1} + 1 \right) \right] \frac{\partial\sigma}{\partial t_i} \exp\{-A\gamma\}, \\ \Delta_h &= N_1 + \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} N_2 + \frac{R^2}{6\mu_\infty} \frac{\rho_e}{\mu_i^s} \frac{\text{Pr}_\infty}{\delta \lambda_i^s} I \frac{\partial\sigma}{\partial t_i} [G_1 \Phi_2 - G_2 \Phi_1]. \end{aligned}$$

При выводе формул (41) мы учли, что коэффициент теплового скольжения очень мал [3], поэтому для проведения численных оценок мы его опустили. Если не учитывать влияния движения среды ($\omega = 0$), то имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -6\pi R \mu_\infty U \varphi_\mu^* \mathbf{n}_z - \varepsilon 6\pi R \mu_\infty f_{ph}^* \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{U}_{ph}^* &= -\varepsilon h_{ph}^* \mathbf{n}_z, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^* &= \frac{2}{3\Delta_h^*} \left[N_3 + \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} N_4 \right] \exp\{-A\gamma\}, \quad h_{ph}^* = f_{ph}^*/\varphi_\mu^*, \\ f_{ph}^* &= \frac{4}{3\mu_i^s} \frac{G_1}{\Delta_h^* \delta} \frac{\lambda_e^s}{\lambda_i^s} \left[1 - \frac{R}{6\lambda_e^s T_\infty} I \right] \frac{\partial\sigma}{\partial t_i} \exp\{-A\gamma\}, \\ \Delta_h^* &= N_1 + \frac{\mu_e^s}{3\mu_i^s} N_2. \end{aligned}$$

Таблица 3.

$T_s, ^\circ\text{C}$	f_{ph}	$f_{\text{ph}}^{\text{av}}$
0	1	1
10	0.75679462	1.13172965
20	0.55865389	1.25217591
30	0.40612812	1.35890535
40	0.29192483	1.44815402
50	0.20865530	1.52363269
60	0.14791875	1.58086862
70	0.10410262	1.62387314
80	0.07247662	1.65233041
90	0.04977532	1.66842426

Таблица 4.

$T_s, ^\circ\text{C}$	h_{ph}	$h_{\text{ph}}^{\text{av}}$
0	1	1
10	1.04610555	1.1018381
20	1.06591031	1.1918477
30	1.06609551	1.2690664
40	1.04899473	1.3307655
50	1.01989975	1.3807801
60	0.97702898	1.4155379
70	0.92304912	1.4387383
80	0.85740504	1.4502438
90	0.78130662	1.4518747

Из сравнения формул (41) и (42) видим, что в (42) отсутствует выражение, учитывающее влияние движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности). Конвективный член зависит от средней температуры поверхности капли и числа Прандтля, т.е. пропорционален произведению числа Прандтля на относительный перепад температуры между поверхностью капли и областью вдали от нее. Поэтому если мы рассматриваем движение капли при значительных относительных перепадах температуры, учитывая, что в жидкости числа Прандтля могут принимать также большие значения, то учет конвективных членов в уравнении теплопроводности (учет влияния движения среды) может существенно сказаться на качественной картине ее термокапиллярного дрейфа. В газе учет движения среды не может качественно повлиять на саму картину дрейфа капли, поскольку в газах число Прандтля порядка единицы. В случае малых относительных перепадов температуры ($\gamma \rightarrow 0$) влияние движения среды необходимо учитывать, если рассматривается термокапиллярный дрейф капли в вязких жидкостях с большими числами Прандтля.

Аналогично можно получить формулы и в случае движения твердой частицы сферической формы.

Для иллюстрации вклада движения среды в силу и скорость термокапиллярного дрейфа нагретой капли в табл. 3, 4 приведены числовые значения функций

$f_{\text{ph}} = f_{\text{ph}}/f_{\text{ph}}|_{T_s=273\text{K}}$ и $h_{\text{ph}} = h_{\text{ph}}/h_{\text{ph}}|_{T_s=273\text{K}}$ с интенсивностью падающего излучения. Численные оценки проводились для капле ртуть, взвешенных в воде при $T_\infty = 273\text{K}$. Значения $f_{\text{ph}}^{\text{av}}$ и $h_{\text{ph}}^{\text{av}}$ оценивались по формулам (41) при малых относительных перепадах температуры ($\gamma \rightarrow 0$), но коэффициенты молекулярного переноса брались при средней температуре поверхности капли T_s .

Искажение формы поверхности

Форма поверхности капли заранее неизвестна и должна быть определена из решения, поэтому граничные условия (5)–(7) для рассматриваемой задачи поставлены на неизвестной границе. Поскольку мы ограничиваемся поправками первого порядка малости, то можем записать

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon\sigma^{(1)}, \quad (43)$$

где σ_0 — нулевой член в разложении функции $\sigma(x)$ по полиномам Лежандра $P_n(x)$, $x = \cos \Theta$.

Форму поверхности капли ищем в виде [14]

$$r = R[1 + \varepsilon\xi]. \quad (44)$$

Разложим искомые величины $\sigma(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$ в ряды по полиномам Лежандра

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(\cos \Theta), \quad \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n P_n(\cos \Theta). \quad (45)$$

Из условия неизменности объема капли следует, что $\xi_0 = 0$. Учитывая, что начало системы координат помещено в центр масс нагретой частицы,

$$\int_0^\pi \xi \sin^2 \Theta d\Theta = 0, \quad (46)$$

следовательно,

$$\xi_1 \equiv 0. \quad (47)$$

При решении задачи мы не учитывали граничное условие для нормальных компонент тензора напряжений. С точностью до членов, пропорциональных ε , граничное условие для нормальных напряжений на поверхности капли можно записать в виде [17]

$$\sigma_n^{e(1)} - \sigma_n^{i(1)} = \sigma_0 H^{(1)} + 2 \frac{\sigma^{(1)}}{R}. \quad (48)$$

Здесь

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} + \varepsilon H^{(1)},$$

R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности капли; H — средняя кривизна поверхности, которая в осесимметричном случае равна [17]

$$H^{(1)} = -\frac{2}{R} \xi - \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \right). \quad (49)$$

Воспользовавшись (45), (47), получим выражение (49) в виде

$$H^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n-1)}{R} \xi_n P_n(\cos \Theta). \quad (50)$$

Таким образом, учитывая (50), из (48) видим, что в рассматриваемом приближении неравномерно нагретая капля при своем движении сохраняет сферическую форму.

Список литературы

- [1] Гупало Ю.И., Редников А.Е., Рязанцев Ю.С. // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 433–442.
- [2] Яламов Ю.И., Санасарян А.С. // ИФЖ. 1975. Т. 28. № 6. С. 1061–1064.
- [3] Mollob G.S., Meison A. // J. Coll. and Interface Sci. 1973. Vol. 44. N 2. P. 339–346.
- [4] Городцов В.А. // ПМТФ. 1975. № 6. С. 32–37.
- [5] Найденов В.И. // ПММ. 1971. Т. 38. Вып. 1. С. 162–166.
- [6] Яламов Ю.И., Санасарян В.С. // ЖТФ. 1975. Т. 45. С. 2052–2157.
- [7] Головин А.М., Фоминых В.В. // МЖГ. 1983. № 1. С. 38–42.
- [8] Попов О.А. // Автореф. канд. дис. М., 1986.
- [9] Oseen C.W. // Ark. Math. Astron. Fys. 1910. Bd 6. N 29.
- [10] Praudman L., Pearson J.B. // J. Fluid Mech. 1957. Vol. 2. N 3. P. 237–262.
- [11] Acrivos A., Taylor T.D. // J. Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 4. P. 387–394.
- [12] Малай Н.В. // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 4. С. 728–738.
- [13] Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
- [14] Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
- [15] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
- [16] Волковицкий О.А., Седунов Ю.С., Семенов Л.П. Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 311 с.
- [17] Малай Н.В., Амапов М.А., Щукин Е.Р. // Дифференциальные уравнения (качественная теория): Межвуз. сб. науч. тр. Рязань, 1995. С. 102–112.
- [18] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.