

01;03

## Капиллярный распад взвешенной нитевидной капли вязкой магнитной жидкости в продольном магнитном поле

© В.М. Коровин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт механики  
119899 Москва, Россия  
e-mail: korovin@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 10 июля 2001 г. В окончательной редакции 25 марта 2002 г.)

Выведено дифференциальное уравнение, описывающее осесимметричное движение двух несмешивающихся магнитных жидкостей одинаковых плотностей и вязкости, учитывающее явным образом вклад капиллярных сил, локализованных на границе раздела жидкостей, которая имеет вид слабдеформированной цилиндрической поверхности. С привлечением этого уравнения получено дисперсионное соотношение задачи о капиллярной неустойчивости осесимметричной капли большого удлинения, находящейся в однородном продольном магнитном поле. Проведен анализ влияния магнитных сил на предельные (случаи больших и малых чисел Онезорге) режимы капиллярного распада капли.

### Введение

Из многочисленных экспериментов известно — (см., например, библиографию в [1–3]), что свободные поверхности магнитных жидкостей, а также поверхности раздела несмешивающихся магнитных и немагнитных жидкостей, как правило, реагируют на присутствие внешних магнитных полей, причем такого рода эффекты в существенной степени зависят от ориентации поля по отношению к рассматриваемой поверхности. Так, первоначально плоские свободные поверхности магнитных жидкостей при наличии достаточно сильных ортогональных полей оказываются неустойчивыми, ввиду чего образуются периодические поверхностные структуры различных типов [1–6]. Напротив, тангенциальные поля оказывают стабилизирующее воздействие на вызываемый какими-либо сторонними причинами рост начальных волновых возмущений свободных поверхностей. Стабилизирующий эффект тангенциальных магнитных полей наблюдался в различных экспериментах: при образовании вязких пальцев в пористых средах [1], при капиллярном распаде цилиндрического слоя [1,2] и тонкой цилиндрической струи магнитной жидкости [7], при развитии рэлей-тейлоровской неустойчивости [8]. Особой спецификой реагирования на включение и увеличение напряженности магнитного поля (проявляющейся в формировании сложных лабиринтных структур) обладают системы, состоящие из соприкасающихся тонких слоев магнитных и немагнитных жидкостей, заключенных между твердыми стенками [1–3].

Применительно к немагнитным сильно вязким жидкостям Тейлором [9] впервые экспериментально был реализован и исследован капиллярный распад тонкой цилиндрической капли большого удлинения, получаемой путем деформирования первоначально сферической капли при ее обтекании специальным образом организованным внешним потоком жидкости, имеющей одинаковую с каплей плотность. Этот способ формирования ните-

образных капель впоследствии широко использовался в подобных экспериментах [10–12]. Описание экспериментальной аппаратуры более позднего времени приведено в [13].

Теоретически задача с капиллярной неустойчивости цилиндрической нити покоящейся вязкой немагнитной жидкости, окруженной воздухом, впервые была изучена Рэлеем [14]. Примером подобной системы служил, в частности, природный объект — один из видов свежей паутины. Полученное в этой работе дисперсионное соотношение и его анализ, проведенный применительно к режиму развития возмущений при преобладающем влиянии вязких сил по сравнению с силами инерции, позволили объяснить явление распада тонкой цилиндрической нити на отдельные, регулярно расположенные капли (см. рис. 37 в книге [15]). На этом рисунке видны также находящиеся в промежутках между крупными каплями более мелкие капли (сателлиты), формирующиеся за счет нелинейных гидродинамических эффектов.

В общем случае, когда жидкая нить окружена вязкой жидкостью, стандартный способ вывода дисперсионного соотношения приводит к его записи в виде равенства нулю определителя четвертого порядка, элементы которого выражаются через функцию Бесселя [16]. Ввиду громоздкости дисперсионного соотношения аналитические выражения его корней долгое время были известны лишь для исследованного Рэлеем случая [16–18], а также для режима развития капиллярной неустойчивости тонкого цилиндра невязкой жидкости, когда в окружающей его вязкой жидкости силы вязкости преобладают над силами инерции [16,18]. Сравнительно недавно была аналитически получена новая формула, применимая в случае, когда вязкости граничащих между собой жидкостей одинаковы [19]. В этой работе на базе квазистационарного уравнения Стокса, содержащего локализованные на поверхности раздела силы поверхностного натяжения, с использованием метода интегрального преобразования Ханкеля найдена зависимость  $\sigma = \sigma(k)$ , позволяющая

проследить влияние волнового числа  $k$  на эволюцию во времени гармоник вида  $\exp(\sigma t) \sin kz$ ,  $\exp(\sigma t) \cos kz$ .

В данной работе проведено обобщение используемого в [19] дифференциального уравнения движения на случай несмешивающихся магнитных жидкостей, находящихся в магнитном поле. В рамках уравнений феррогидродинамики (с привлечением полученного уравнения) исследовано влияние объемных магнитных сил на капиллярный распад нитевидной капли, находящейся в продольном магнитном поле.

## Постановка задачи

Пусть в безграничном объеме магнитной жидкости находится состоящая из другой магнитной жидкости тонкая осесимметричная капля, длина которой (измеряемая в осевом направлении) в десятки раз превосходит характерный диаметр. В многочисленных экспериментах с немагнитными жидкостями капли такой формы создавались с помощью специальных устройств, принцип действия которых был предложен Тейлором [9,13]. При исследовании влияния продольного магнитного поля на капиллярный распад капли подобной конфигурации пренебрежем эффектами, вызываемыми осевыми составляющими магнитных сил вблизи концов капли, и будем моделировать рассматриваемую каплю прямолинейной цилиндрической нитью радиуса  $a$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \vartheta, z$ , так чтобы в состоянии гидростатического равновесия жидкостей поверхность их раздела описывалась уравнением  $r = a$ . Предполагается, что по своим реологическим свойствам обе жидкости являются ньютоновскими и что они имеют одинаковую плотность  $\rho$  и одинаковый коэффициент динамической вязкости  $\eta$ , а их абсолютные магнитные проницаемости  $\mu_1$  (в области  $r < a$ ) и  $\mu_2$  (в области  $r > a$ ) зависят лишь от модуля вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ , причем  $\mu_1(H) \neq \mu_2(H)$ . В отличие от задачи о капиллярной неустойчивости струи невязкой магнитной жидкости в воздухе [1] для рассматриваемой конфигурации жидкостей наряду со случаем  $\mu_1 > \mu_2$  возможен также случай  $\mu_1 < \mu_2$ . При наличии продольного однородного магнитного поля  $\mathbf{H} = (0, 0, H_0)$  индукция  $\mathbf{B}_{j0} = \mu_j \mathbf{H}_0$  и намагниченность  $\mathbf{M}_{j0} = \chi_j \mathbf{H}_0$  в каждой из сред однородны, а плотность объемной магнитной силы  $\mathbf{F}_{m0}^{(j)} = \mu_0 M_{j0} \text{grad } H_0 \equiv 0$ . Здесь и всюду далее  $j = 1, 2$ ;  $\chi_j = \mu_j / \mu_0 - 1$  — магнитная восприимчивость;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$  — магнитная постоянная.

Сформулируем в линейной постановке задачу об осесимметричном движении жидкостей, когда форма поверхности раздела представляется уравнением  $r = r_s(z, t)$ . Положим  $r_s(z, t) = a + \xi(z, t)$ , где  $\xi(z, t)$  — малое возмущение исходного радиуса нити ( $|\xi(z, t)| \ll a$ ), а  $t$  — время. Деформирование поверхности раздела вызывает возмущение магнитного поля  $\mathbf{H}_j - \mathbf{H}_0 = \text{grad } \varphi_j(r, z, t)$ , а также

индукции  $\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_{j0} = \mathbf{b}_j(r, z, t)$  и намагниченности  $\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_{j0} = \mathbf{m}_j(r, z, t)$  и порождает объемные магнитные силы плотности  $\mathbf{f}_m^{(j)}(r, z, t)$ , оказывающие влияние на динамику жидкостей. С точностью до малых первого порядка имеем

$$\begin{aligned} H_j - H_0 &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, & M_j - M_{j0} &= m_{jz}, \\ \mathbf{m}_j &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b}_j - \text{grad } \varphi_j, \\ \mathbf{b}_j &= \mu_j(H_0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \mathbf{e}_r + \mu_{tj}(H_0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{f}_m^{(j)} &= \mu_0 M_{j0} \text{grad } \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$  — векторы базиса, соответствующие координатным линиям  $r$  и  $z$ ;  $\mu_{tj} = d\mathbf{B}_j/dH_j$  — дифференциальная магнитная проницаемость.

С учетом (1) из уравнения магнитостатики  $\text{div } \mathbf{B}_j = 0$  следует, что возмущения потенциала магнитного поля в каждой из соприкасающихся между собой магнитных жидкостей описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \beta_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad \beta_j = \sqrt{\frac{\mu_{tj}(H_0)}{\mu_j(H_0)}}. \quad (2)$$

В линейном приближении условия непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля и нормальной составляющей индукции на поверхности раздела жидкостей (при  $r = a$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2, & \quad \mu_{r1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \mu_{r2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = (M_{10} - M_{20}) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ \mu_{rj} &= \frac{\mu_j(H_0)}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от приведенной выше формулировки магнитостатической задачи (2), (3) при постановке гидродинамической задачи откажемся от обычного подхода. Этот подход требует раздельного построения решений уравнений гидродинамики в каждой из областей, где параметры движения и состояния среды изменяются непрерывно, и последующий шивки этих решений с помощью кинематических и динамических условий на поверхности раздела. Условия предписывают, в частности, непрерывность нормальной и касательной составляющих вектора скорости  $\mathbf{u}(r, z, t) = (u_r, 0, u_z)$  при переходе через поверхность раздела и непрерывность касательной составляющей плотности поверхностных сил  $\mathbf{p}_{nr}$ . Напомним, что в рамках обычного подхода при записи динамического условия, связывающего нормальные составляющие поверхностных сил  $p_{nn}$  на противоположных сторонах поверхности раздела несмешивающихся жидкостей, учитывается скачок, вызываемый эффектом поверхностного натяжения. Следует отметить, что при равенстве коэффициентов динамической вязкости

обеих жидкостей из уравнения неразрывности и условий непрерывности  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}_{nr}$  следует непрерывность  $\partial u_r/\partial r$ ,  $\partial u_r/\partial z$ ,  $\partial u_z/\partial r$ ,  $\partial u_z/\partial z$  при переходе через поверхность раздела жидкостей.

Сформулируем гидродинамические уравнения, считая обе несмешивающиеся жидкости единой средой, в которой при переходе через поверхность раздела  $r = a + \xi(z, t)$  давление  $p(r, \vartheta, z, t)$  испытывает скачок, определяемый коэффициентом поверхностного натяжения  $\alpha$  и средней кривизной  $K$  поверхности раздела. С этой целью введем в рассмотрение произвольный индивидуальный (т.е. состоящий из одних и тех же частиц рассматриваемой среды) объем  $V(t)$ , произвольным образом разделенный на две части куском рассматриваемой поверхности раздела.

В рамках обычных предположений о непрерывности векторного поля  $\mathbf{u}$  и его производных по координатам, следуя процедуре вывода [20] уравнения неразрывности, опирающейся на закон сохранения массы любого индивидуального объема, в случае несжимаемых жидкостей приходим, естественно, к условию соленоидальности поля скоростей

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

При формулировке дифференциального уравнения движения будем исходить из интегральной формы записи (П9) закона сохранения количества движения рассматриваемого индивидуального объема. При этом в линейной постановке, естественно, не учитываются (ввиду малости) конвективная производная скорости по времени — член  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  в левой части (П9), а также магнитный скачок давления, фигурирующий в правой части (П9).

Отметим, что в рассматриваемом приближении элемент слабдеформированной  $((\partial \xi/\partial z)^2 \ll 1)$  поверхности раздела жидкостей записывается в виде  $d\sigma = a d\vartheta dz$ , в то время как средняя кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{\xi}{a^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right).$$

При записи вектора нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности раздела пренебрежем его отклонением от направленного к оси симметрии поверхности радиального направления и положим  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ . При этом фигурирующий в правой части (П9) интеграл по куску поверхности раздела, лежащему внутри рассматриваемого индивидуального объема, легко преобразуется в интеграл по индивидуальному объему

$$\int_s \mathbf{K} n d\sigma = \int_V \mathbf{e}_r \delta(r-a) \left( \frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \right) dv, \quad (5)$$

где  $\delta(r-a)$  — дельта-функция Дирака от аргумента  $(r-a)$ , а  $dv = r dr d\vartheta dz$ .

Учитывая (5) и формулы (1) для возмущения магнитной силы  $\mathbf{f}_m$

$$\mathbf{f}_m = \begin{cases} \mathbf{f}_m^{(1)} & \text{при } r < r_s, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty, \\ \mathbf{f}_m^{(2)} & \text{при } r > r_s, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty, \end{cases}$$

перепишем (П9) в виде

$$\int_V \left[ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} p - \eta \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} - \mathbf{f}_m + \mathbf{e}_r \alpha \delta(r-a) \left( \frac{1}{a} - \frac{\xi}{a^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \right] dv = 0.$$

Напомним, что это интегральное равенство выполняется (в рамках линейной постановки задачи) для произвольного индивидуального объема. Оно выполняется, естественно, при обращении в нуль подынтегрального выражения. Оставляя в стороне вопрос о строгом математическом обосновании законности перехода от интегрального равенства к дифференциальному уравнению, получаемому приравниванием нулю подынтегрального выражения, далее будем использовать следующее уравнение движения:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ & + \mu_0 M_{10} [1 - \Theta(r-a)] \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ & + \mu_0 M_{20} \Theta(r-a) \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ & - \mathbf{e}_r \alpha \delta(r-a) \left( \frac{1}{a} - \frac{\xi}{a^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\Theta(r-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a \\ 1 & \text{при } r > a \end{cases}$$

— функция Хевисайда.

На поверхности раздела жидкостей (в линейном приближении при  $r = a$ ) решение системы уравнений (4), (6) должно удовлетворять кинематическому условию, физически означающему, что поверхность раздела состоит из одних и тех же жидких частиц

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r. \quad (7)$$

Физический смысл имеют, естественно, лишь ограниченные при  $r = 0$  функции  $\mathbf{u}$ ,  $p$ , причем  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

С целью упрощения дальнейших выкладок преобразуем уравнение движения (6). В гидродинамике важной кинематической характеристикой поля скоростей является вектор вихря скорости  $\omega_c = (1/2) \operatorname{rot} \mathbf{u}$ . В рассматриваемом случае лишь азимутальная составляющая вектора

вихря отлична от нуля, вследствие чего в каждой из плоскостей  $z = \text{const}$  вихревые линии представляют семейство концентрических окружностей. Применив к уравнению (6) оператор  $\text{rot}$ , получаем

$$\frac{\partial \omega_c}{\partial t} - \nu \Delta \omega_c = \mathbf{e}_\vartheta \frac{\delta(r-a)}{2\rho} \left[ \alpha \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right) + \mu_0 \left( M_{10} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - M_{20} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) \right], \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (8)$$

Векторное уравнение подобного типа хорошо известно в теоретической физике. Из правой части (8) видно, что при неустановившемся движении жидкостей локализованные на поверхности раздела капиллярные силы и скачок, испытываемый осевой составляющей плотности магнитных сил  $\mathbf{f}_m$  при переходе через поверхность раздела, генерируют вихри в жидких частицах, образующих поверхность раздела. В соответствии с (8) распространение вихрей в жидкостях по обе стороны от поверхности раздела осуществляется путем диффузии, причем коэффициент диффузии равен кинематическому коэффициенту вязкости жидкостей  $\nu$ . Уравнение (8) позволяет легко оценить характерное время диффузии  $\tau_d$  вихрей поперек жидкой цилиндрической нити с характерным радиусом  $a$ . В самом деле, приравнявая по порядку величины члены, стоящие в левой части (8), получаем  $\tau_d = a^2/\nu$ , так что с уменьшением коэффициента вязкости величина  $\tau_d$  растет. В предельном случае невязких жидкостей (при  $\nu = 0$ ) из уравнения (8) находим

$$\omega_c = \mathbf{e}_\vartheta \frac{\delta(r-a)}{2\rho} \int_0^t \left[ \alpha \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right) + \mu_0 \left( M_{10} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - M_{20} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) \right] dt,$$

т. е. вихри не покидают места своего рождения.

После введения (с помощью уравнения неразрывности (4)) функции тока  $\psi(r, z, t)$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

имеем

$$\omega_c = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{2r} L\psi, \quad \Delta \omega_c = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{2r} LL\psi, \\ L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

С учетом этих выражений уравнение (8) записывается следующим образом:

$$\left( L - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) L\psi = \frac{r\delta(r-a)}{\eta} \times \left[ \mu_0 \left( M_{20} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - M_{10} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) - \alpha \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right) \right]. \quad (9)$$

Кинематическое условие (7) приводится к виду

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{при} \quad r = a. \quad (10)$$

Таким образом, функции  $\xi(z, t)$ ,  $\varphi_j(r, z, t)$ ,  $\psi(r, z, t)$  определяются из решения задачи (2), (3), (9), (10).

## Дисперсионное соотношение и его анализ

С целью исследования характера временной эволюции поверхности раздела жидкостей изучим поведение при возрастании времени частных решений (гармоник) рассматриваемой линейной задачи, имеющих вид

$$\xi_k \exp[i(kz - \omega t)], \quad \Phi_k^{(j)}(r) \exp[i(kz - \omega t)], \\ \Psi_k(r) \exp[i(kz - \omega t)], \quad i = \sqrt{-1}. \quad (11)$$

Здесь  $\xi_k$ ,  $\Phi_k^{(j)}(r)$ ,  $\Psi_k(r)$  — преобразование Фурье искоемых функций  $\xi(z, t)$ ,  $\varphi_j(r, z, t)$ ,  $\Psi(r, z, t)$  (рассматриваемых в начальный момент времени) по переменной  $z$ .

В выражениях (11) выбор экспоненциального множителя  $\exp(-i\omega t)$  и связанное с ним разделение переменных обусловлены тем обстоятельством, что коэффициенты линейной однородной системы уравнений в частных производных (2), (9) не зависят от времени. Ввиду этого рассматриваемая задача в случае выполнения накладываемой уравнениями и краевыми условиями связи между  $\omega$  и  $k$  (дисперсионное соотношение) допускает частные решения вида (11) при любом значении волнового числа  $k$ . При этом с помощью дисперсионного соотношения можно указать диапазоны волновых чисел растущих и затухающих с ростом времени гармоник, найти волновое число наиболее быстро растущей гармоники и получить также другую представляющую интерес информацию.

При подстановке выражений (11) в (2), (3), (9), (10) получаем

$$\frac{d^2 \Phi_k^{(j)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_k^{(j)}}{dr} - (\beta_j k)^2 \Phi_k^{(j)} = 0, \quad (12)$$

при  $r = a$

$$\Phi_k^{(1)} = \Phi_k^{(2)},$$

$$\mu_{r1} \frac{d\Phi_k^{(1)}}{dr} - \mu_{r2} \frac{d\Phi_k^{(2)}}{dr} = ik\xi_k (M_{10} - M_{20}), \quad (13)$$

$$L_1 L_2 \Psi_k = \frac{r\delta(r-a)}{\eta} \left[ \mu_0 k^2 (M_{10} \Phi_k^{(1)} - M_{20} \Phi_k^{(2)}) - i\alpha \xi_k k \left( \frac{1}{a^2} - k^2 \right) \right], \quad (14)$$

при  $r = a$

$$\omega \alpha \xi_k + k \Psi_k = 0, \quad (15)$$

где

$$L_1 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2, \quad L_2 = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - m^2,$$

$$m = \sqrt{k^2 - i \frac{\omega}{v}}, \quad \operatorname{Re} m > 0.$$

Решение задачи магнитостатистики (12), (13), имеющие ограниченные при  $r = 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  производные, записывается следующим образом:

$$\Phi_k^{(1)} = \frac{i\xi_k}{c} (M_{10} - M_{20}) K_0(\beta_2 k a) I_0(\beta_1 k r),$$

$$\Phi_k^{(2)} = \frac{i\xi_k}{c} (M_{10} - M_{20}) I_0(\beta_1 k a) K_0(\beta_2 k r),$$

$$c = \beta_1 \mu_{r1} I_1(\beta_1 k a) K_0(\beta_2 k a) + \beta_2 \mu_{r2} I_0(\beta_1 k a) K_1(\beta_2 k a), \quad (16)$$

где  $I_l(x)$ ,  $K_l(x)$ ,  $l = 0, 1$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

В результате подстановки выражений (16) в уравнение (14) получаем

$$L_1 L_2 \Psi_k = \delta(r - a) T(r), \quad (17)$$

где

$$T(r) = \frac{i\alpha\xi_k k t}{\eta a^2} \left\{ \frac{\mu_0 k a^2}{\alpha c} (M_{10} - M_{20}) [M_{10} K_0(\beta_2 k a) I_0(\beta_1 k r) - M_{20} I_0(\beta_1 k a) K_0(\beta_2 k r)] + (k a)^2 - 1 \right\}.$$

Нетрудно указать фундаментальную систему однородного уравнения, соответствующего линейному неоднородному уравнению четвертого порядка (17),

$$\Psi_{k1} = r I_1(kr), \quad \Psi_{k2} = r K_1(kr),$$

$$\Psi_{k3} = r I_1(mr), \quad \Psi_{k4} = r K_1(mr). \quad (18)$$

С использованием (18) методом вариации постоянных (аналогично используемой в [21] процедуре построения решения неоднородного уравнения второго порядка (7.2.48), содержащего в правой части сдвинутую  $\delta$ -функцию) находим частное решение неоднородного уравнения (17), имеющее в точке  $r = a$  непрерывные производные первого и второго порядков и удовлетворяющее условиям ограниченности скорости при  $r \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\Psi_k = \frac{i\alpha}{\eta a} \frac{k\xi_k}{m^2 - k^2} (\chi^2 + \chi N \Lambda - 1) R(r), \quad (19)$$

где

$$R(r) = r [K_1(\chi) I_1(kr) - K_1(ma) I_1(mr)] \quad \text{при } r \leq a,$$

$$R(r) = r [I_1(\chi) K_1(kr) - I_1(ma) K_1(mr)] \quad \text{при } r \geq a,$$

$$\Lambda = \frac{(\mu_{r1} - \mu_{r2})^2 I_0(\beta_1 \chi) K_0(\beta_2 \chi)}{\beta_1 \mu_{r1} I_1(\beta_1 \chi) K_0(\beta_2 \chi) + \beta_2 \mu_{r2} I_0(\beta_1 \chi) K_1(\beta_2 \chi)},$$

$$N = \frac{a\mu_0}{\alpha} H_0^2, \quad \chi = ka.$$

После подстановки выражений (11), (19) в кинематическое условие на поверхности раздела жидкостей (15) находим дисперсионное соотношение

$$\frac{\rho a^3}{\alpha} \omega^2 = \chi^2 (1 - \chi N \Lambda - \chi^2) \times [I_1(q) K_1(q) - I_1(\chi) K_1(\chi)], \quad (20)$$

где

$$q = \sqrt{\chi^2 - i\omega\tau_d}, \quad \operatorname{Re} q > 0.$$

Поскольку в правой части равенства (20) все величины безразмерные, то, как видно из левой части (20), в рассматриваемой задаче помимо  $\tau_d$  имеется также характерный масштаб времени  $\tau_i = \sqrt{\rho a^3 / \alpha}$ . Для выяснения физического смысла  $\tau_i$  рассмотрим дисперсионное соотношение задачи об устойчивости цилиндрической поверхности раздела покоящихся невязких жидкостей. Применительно к эксперименту можно говорить, разумеется, лишь о маловязких жидкостях, когда на инициированное капиллярными силами макроскопические движения жидкостей влияние вязких сил пренебрежимо мало по сравнению с инерционными и магнитными силами. В этом случае  $\tau_d \rightarrow \infty$ , так что выражение (20) принимает вид

$$(\omega\tau_i)^2 = \chi^2 I_1(\chi) K_1(\chi) (\chi^2 + \chi N \Lambda - 1). \quad (21)$$

Поскольку  $I_1(\chi) K_1(\chi) > 0$  при  $\chi > 0$ , то из этого выражения следует, что в отсутствие магнитного поля (при  $N = 0$ ) в случае  $\chi > 1$  частота  $\omega$  является действительной функцией безразмерного волнового числа  $\chi$ . Если же  $0 < \chi < 1$ , то  $\operatorname{Re} \omega = 0$ , тогда как на разных ветвях двузначной функции  $\omega(\chi)$  имеем  $\operatorname{Im} \omega > 0$  и  $\operatorname{Im} \omega < 0$ . Так как при проведении физического эксперимента в спектрах возмущений имеются любые волновые числа, то из выполнения условий  $\operatorname{Re} \omega = 0$ ,  $\operatorname{Im} \omega > 0$  следует, что рассматриваемая конфигурация первоначально покоящихся жидкостей неустойчива, причем неустойчивость имеет монотонный характер. Таким образом, временная эволюция нитевидной капли первоначально покоящейся идеально несжимаемой жидкости принципиально отлична от поведения сферической капли [22], совершающей под действием капиллярных сил собственные колебания.

Анализ показывает, что при  $N \neq 0$  магнитное поле лишь сужает диапазон неустойчивых волновых чисел, принципиально не изменяя характер неустойчивости гармоник. Поскольку дисперсионные соотношения (20), (21) описывают линейную стадию эволюции гармоник, то масштаб времени  $\tau_i$  также характеризует линейную стадию развития вызываемой капиллярными силами неустойчивости нитевидной капли при доминирующем влиянии сил инерции по сравнению с силами вязкости (инерционный режим капиллярного распада).

Возвращаясь к исследованию поведения жидкой нити в случае вязких феррожидкостей, отметим, что многочисленными экспериментами с немагнитными жидкостями показано существование вязкого режима капиллярного распада нити, когда в общем балансе сил вклад инерционных сил мал, а эволюция формы поверхности нити определяется в основном воздействием на жидкость капиллярных и вязких сил. Обозначим  $\tau_v$  временной масштаб линейной стадии капиллярного распада нити в вязком режиме. Несложные оценки, базирующиеся на использовании гидродинамической части рассматриваемой задачи (аналогичные проведенным в [23]), приводят к результату  $\tau_v = \eta a / \alpha$ . В терминах безразмерных критериев условие реализации вязкого режима распада записывается в виде  $Z \gg 1$ , где  $Z = \eta / \sqrt{\rho \alpha a}$  — число Онезорге. Поскольку  $\tau_i / \tau_v = Z^{-1}$ ,  $\tau_d / \tau_v = Z^{-2}$ , то при  $Z \gg 1$  имеет место следующая иерархия характерных времен:  $\tau_d \ll \tau_i \ll \tau_v$ . Если же  $Z \ll 1$ , то  $\tau_v \ll \tau_i \ll \tau_d$ ; именно этому случаю соответствует дисперсионное соотношение (21).

Переходя в (20) к безразмерной функции  $\Omega = \omega \tau_v$ , имеем

$$\varepsilon \Omega^2 = \kappa(1 - \kappa N \Lambda - \kappa^2) [I_1(q) K_1(q) - I_1(\kappa) K_1(\kappa)],$$

$$q = \sqrt{\kappa^2 - i \varepsilon \Omega}, \quad \varepsilon = Z^{-2}. \quad (22)$$

В рассматриваемом случае  $\varepsilon \ll 1$ , так что, ограничиваясь линейным членом разложения правой части (22) по степеням  $\varepsilon$ , находим корень дисперсионного соотношения, описывающий режим развития капиллярной неустойчивости капли при доминирующем влиянии вязких сил по сравнению с силами инерции

$$\omega \tau_v = i(1 - \kappa N \Lambda - \kappa^2) \{ I_1(\kappa) K_1(\kappa) + \frac{\kappa}{2} [I_1(\kappa) K_0(\kappa) - I_0(\kappa) K_1(\kappa)] \}. \quad (23)$$

Как видно из (23), при действительных  $\kappa$  главный член разложения  $\omega$  по степеням  $\varepsilon$  является чисто мнимой величиной. Численный анализ показывает, что функция, представляемая выражением в фигурных скобках, положительна при всех  $\kappa > 0$ , так что знак  $\text{Im } \omega$  совпадает со знаком выражения в круглых скобках (то же самое имеет место для одной из ветвей двузначной функции  $\omega(\kappa)$  в случае невязкой жидкости (21)). Отметим, что при учете в (23) следующего члена разложения по-прежнему  $\text{Re } \omega = 0$ . В отсутствие магнитного поля (при  $N = 0$ ), а также в случае  $\mu_{r1} = \mu_{r2}$  запись корня (23) с точностью до обозначений совпадает с выражением, полученным в [19].

При построении графиков, иллюстрирующих влияние магнитного поля на капиллярную неустойчивость нитевидной капли принят линейный ( $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$ ) закон намагничивания феррожидкостей. На рис. 1 построены графики, представляющие дисперсионную зависимость (23) при фиксированных значениях  $\mu_{r1}, \mu_{r2}$  и различных  $N$ . Для заданного  $N$  и всех  $\kappa$ , лежащих правее

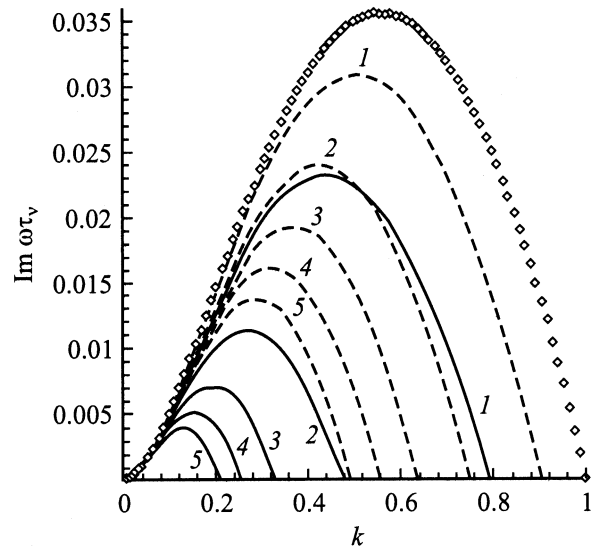
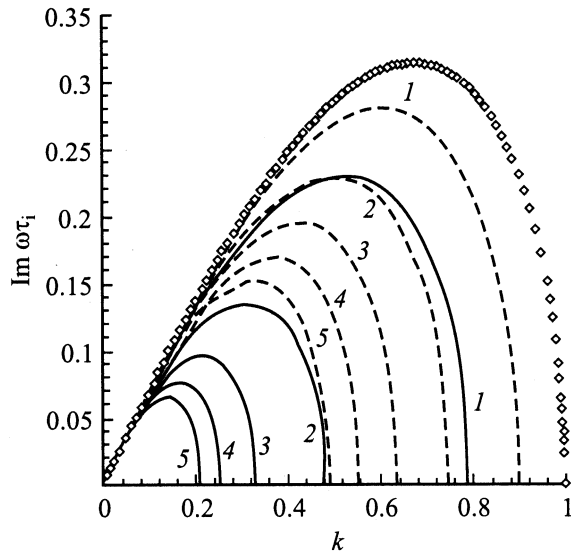


Рис. 1. Дисперсионные зависимости (23) при различных  $N$  в отсутствие магнитного поля ( $N = 0$ , ромбы) (a), при наличии поля для жидкости с  $\mu_{r1} = 5, \mu_{r2} = 1$  (сплошные кривые) (b) и при наличии поля для жидкостей с  $\mu_{r1} = 1, \mu_{r2} = 5$  (штриховые кривые) (c).  $N$ : 1 — 0.1, 2 — 0.3, 3 — 0.5, 4 — 0.7, 5 — 0.9.

точки пересечения  $\kappa_c = \kappa_c(\mu_{r1}, \mu_{r2}, N)$  соответствующей кривой с осью абсцисс, выполняется условие  $\text{Im } \omega < 0$ , а для  $\kappa$ , лежащих левее  $\kappa_c$ , имеем  $\text{Im } \omega > 0$ . Таким образом, гармоники, соответствующие безразмерным волновым числам  $\kappa > \kappa_c$ , устойчивы, а гармоники с  $\kappa < \kappa_c$  неустойчивы. Точки же  $\kappa = \kappa_c$  соответствуют пороговым значениям волнового числа. Как видно из рис. 1, при наличии скачка относительных магнитных проницаемостей жидкостей ( $\mu_{r1} - \mu_{r2} \neq 0$ ) магнитное поле стабилизирует некоторый диапазон неустойчивых в отсутствие поля гармоник (с длинами волн  $\lambda > 2\pi a$ ). При этом с увеличением как  $N$ , так и  $|\mu_{r1} - \mu_{r2}|$  увеличивается характерное время развития  $(\text{Im } \omega)^{-1}$  наиболее быстро растущей гармоники (т.е. гармоники с безразмерным волновым числом  $\kappa_*(N, \mu_{r1}, \mu_{r2})$ , реализующим при заданных  $N, \mu_{r1}, \mu_{r2}$  максимум соответствующей кривой). Следует отметить, что для одной и той же пары жидкостей и фиксированного  $N$  величина  $(\text{Im } \omega)^{-1}$  в случае  $\mu_{r1} > \mu_{r2}$  оказывается больше, чем в случае  $\mu_{r1} < \mu_{r2}$ .

Обращаясь к выражениям (21), (23), легко видеть, что при заданных  $N, \mu_{r1}, \mu_{r2}$  пороговые волновые числа  $\kappa_c$  в случаях  $Z \ll 1$  и  $Z \gg 1$  равны между собой. На рис. 2 представлены графики, соответствующие дисперсионной зависимости (21). Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что вязкость существенным образом влияет на характерные времена развития наиболее быстро растущих гармоник — в случае сильновязких жидкостей эти времена на порядок больше, чем в случае маловязких жидкостей.

Дисперсионные соотношения (20), (21) приводят к одному и тому же семейству кривых нейтральной устой-



**Рис. 2.** Дисперсионные зависимости (21) при тех же значениях параметров  $N$ ,  $\mu_{r1}$ ,  $\mu_{r2}$ , что на рис. 1.

чивости, зависящих от параметров  $\mu_{r1}$ ,  $\mu_{r2}$ ,

$$N = \frac{1 - \kappa^2}{\kappa \Lambda}. \quad (24)$$

На плоскости  $(\kappa, N)$  вдоль этих кривых выполняется условие  $\text{Im } \omega = 0$ . По своему смыслу кривые нейтральной устойчивости являются границами, разделяющими полосу ( $0 \leq \kappa \leq 1$ ,  $N \geq 0$ ) на область устойчивости (в каждой точке которой  $\text{Im } \omega < 0$ ) и область неустойчивости (где  $\text{Im } \omega > 0$ ). При построении областей устойчивости и неустойчивости (рис. 3) более естественным является использование плоскости  $(N, \kappa)$ , поскольку в условиях эксперимента  $N$  — контролируемый параметр, тогда как в спектре возмущений имеются любые волновые числа. Переход от плоскости  $(\kappa, N)$  к плоскости  $(N, \kappa)$  совершается путем обращения выписанной выше функции  $N = N(\kappa)$ .

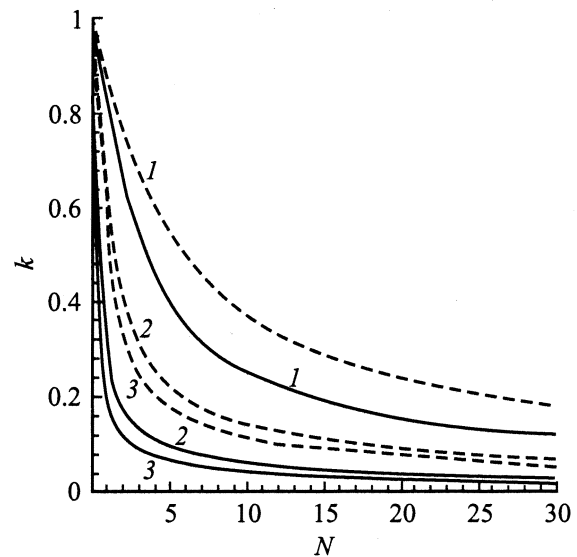
На рис. 3 области устойчивости расположены выше кривых нейтральной устойчивости, отвечающих заданным  $\mu_{r1}$ ,  $\mu_{r2}$ , а области неустойчивости — ниже этих кривых. Из рис. 3 видно, что пороговое волновое число уменьшается как с ростом  $N$ , так и с увеличением скачка магнитных проницаемостей жидкостей. Для одной и той же пары жидкостей при фиксированной напряженности магнитного поля и неизменном диаметре жидкой нити пороговое волновое число  $\kappa_{c1}$  в случае  $\mu_{r1} > \mu_{r2}$  меньше порогового волнового числа  $\kappa_{c2}$  в случае  $\mu_{r1} < \mu_{r2}$ . Вследствие этого диапазон  $\kappa_{c1} < \kappa < 1$  гармоник, стабилизируемых магнитным полем, в случае  $\mu_{r1} > \mu_{r2}$  оказывается шире диапазона  $\kappa_{c2} < \kappa < 1$  гармоник, стабилизируемых в случае  $\mu_{r1} < \mu_{r2}$ . Таким образом, при одной и той же напряженности магнитного поле оказывает более эффективное стабилизирующее воздействие на каплю феррожидкости, взвешенную в немагнитной жидкости (конфигурация I), чем на каплю немагнитной

жидкости, находящуюся в той же самой феррожидкости (конфигурация II).

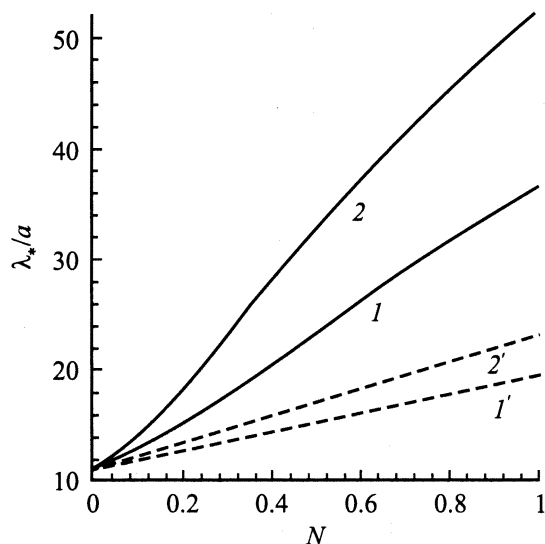
Обращаясь к (20), легко видеть, что семейство линий (24) представляет кривые нейтральной устойчивости при любом значении числа Онезурге. Ввиду этого представленные на рис. 3 области устойчивости и неустойчивости характеризуют при заданных  $N$ ,  $\kappa$ ,  $\mu_{r1}$ ,  $\mu_{r2}$  тип эволюции гармоник при произвольном соотношении между инерционными и вязкими силами в процессе капиллярного распада нити феррожидкости при наличии продольного магнитного поля.

В случае немагнитных жидкостей с неравными коэффициентами вязкости вычислявшаяся в рамках линейной теории длина волны  $\lambda_*$  гармоник, наиболее быстро растущей в режиме капиллярного распада нитевидной капли при доминирующем влиянии сил вязкости по сравнению с силами инерции, хорошо согласуется с экспериментальными данными, базирующимися на измерении диаметра капель, образующихся после распада нити [11,12,16]. При этом, разумеется, не учитывается образование сателлитов, локализованных в промежутках между регулярно расположенными крупными каплями.

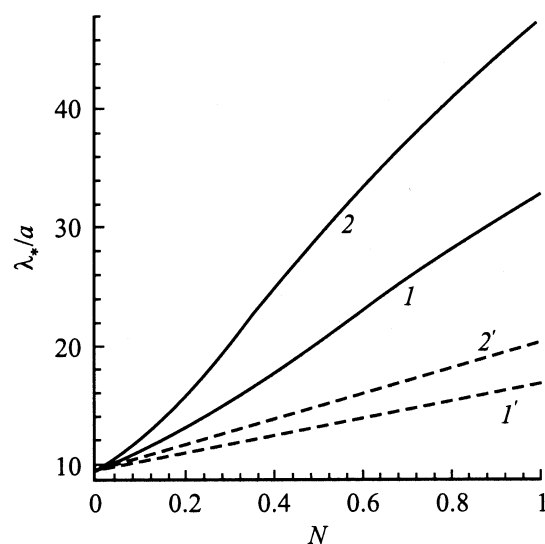
На рис. 4 представлены зависимости  $\lambda_*/a$  от  $N$ , построенные с использованием найденного при  $Z \gg 1$  выражения корня (23) дисперсионного соотношения (20), а на рис. 5 — аналогичные зависимости, построенные с использованием дисперсионного соотношения (21), соответствующего случаю  $Z \ll 1$ . Из этих графиков следует, что как в конфигурациях I, так и в конфигурациях II при фиксированном диаметре жидкой нити в каждом из случаев  $Z \gg 1$ ,  $Z \ll 1$  характерный размер капель, образующихся в результате капиллярного распада исходной нитевидной капли, увеличивается как с ростом напряженности магнитного поля, так и с увеличением скачка магнитных проницаемостей жидкостей.



**Рис. 3.** Кривые нейтральной устойчивости. Сплошные кривые  $\mu_{r2} = 1$ ,  $\mu_{r1}$ : 1 — 2, 2 — 4, 3 — 5. Штриховые кривые  $\mu_{r1} = 1$ ,  $\mu_{r2}$ : 1 — 2, 2 — 4, 3 — 5.



**Рис. 4.** Случай  $Z \gg 1$ . Зависимость длины волны наиболее быстро растущей гармоники от квадрата безразмерной напряженности магнитного поля. Сплошные кривые  $\mu_{r2} = 1, \mu_{r1}$ : 1 — 4, 2 — 5. Штриховые кривые  $\mu_{r1} = 1, \mu_{r2}$ : 1' — 4, 2' — 5.



**Рис. 5.**  $Z \ll 1$ . То же, что на рис. 4.

Легко видеть также, что как в случае  $Z \gg 1$ , так и в случае  $Z \ll 1$  при фиксированной напряженности поля в конфигурациях I образуются более крупные капли по сравнению с соответствующими конфигурациями II.

Сравнение между собой представленных на рис. 4, 5 графиков показывает, что в одинаковых конфигурациях при одинаковых  $H_0$  и  $a$  имеется заметное различие размеров капель в случаях  $Z \gg 1$  и  $Z \ll 1$ . При этом в вязком режиме капиллярного распада нити образуются более крупные капли, нежели в инерционном режиме распада. Так, в отсутствие магнитного поля  $\lambda_*/a = 11.1896$  при  $Z \gg 1$ , в то время как  $\lambda_*/a = 9.2843$  при  $Z \ll 1$ .

## Заключение

На базе интегральной формы закона сохранения количества движения конечного материального объема, состоящего из двух граничащих друг с другом несмешивающихся магнитных жидкостей, находящихся в магнитном поле, выведено дифференциальное уравнение движения жидкостей, содержащее наряду с объемными силами также и сосредоточенные на поверхности раздела капиллярные силы. С его помощью сравнительно просто получено в явном виде дисперсионное соотношение задачи о капиллярной неустойчивости взвешенной нитевидной капли вязкой феррожидкости, находящейся в продольном магнитном поле. Рассмотрен случай, когда плотность и вязкость жидкости, окружающей каплю, равны соответствующим параметрам капли, а магнитная проницаемость отличается от проницаемости капли.

Проведен анализ воздействия поля на распад нитевидной капли а) при доминирующем влиянии сил вязкости по сравнению с инерционными силами (вязкий режим распада, число Онезорге  $Z \gg 1$ ), б) при доминирующем влиянии инерционных сил по сравнению с вязкими силами (инерционный режим,  $Z \ll 1$ ). Показано, что в обоих режимах для заданной пары магнитной и немагнитной жидкостей в заданном диаметре нитевидной капли в случае капли феррожидкости, взвешенной в немагнитной жидкости (конфигурация I) магнитное поле фиксированной напряженности стабилизирует более широкий диапазон неустойчивых в отсутствие поля гармоник, чем в случае капли немагнитной жидкости, взвешенной в той же самой феррожидкости (конфигурация II). При этом в обоих режимах ( $Z \gg 1, Z \ll 1$ ) в результате капиллярного распада конфигурации I образуются более крупные капли, чем при капиллярном распада конфигурации II. При капиллярном распада обеих конфигураций с увеличением напряженности поля увеличиваются а) интервал волновых чисел гармоник, стабилизируемых полем, б) характерное время развития наиболее быстро растущей гармоники, в) характерный размер капель, образующихся после распада исходной нитевидной капли.

Сравнение вязкого и инерционного режимов капиллярного распада нитей феррожидкостей показывает, что при одинаковых условиях основное влияние вязкие силы оказывают на характерные времена развития наиболее быстро растущих гармоник (при  $Z \gg 1$  эти времена на порядок больше, чем в случае  $Z \ll 1$ ), тогда как различие характерных размеров капель, образующихся в результате распада нитей, существенно меньше.

## Приложение

Основным динамическим соотношением, постулируемым в механике сплошной среды [20], является уравнение количества движения для конечного объема сплошной среды. Согласно этому уравнению, записываемому относительно инерциальной системы отсчета, скорость



изменения во времени количества движения  $\mathbf{Q}$  любого индивидуального (т.е. состоящего из одних и тех же частиц рассматриваемой среды) объема  $V(t)$ , ограниченного поверхностью  $\Sigma(t)$ , равна главному вектору внешних сил, действующих на образующую рассматриваемый объем среду,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_V \rho \mathbf{F} dv + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma, \quad \mathbf{Q} = \int_V \rho \mathbf{u} dv. \quad (\text{П1})$$

Здесь  $\rho$  и  $\mathbf{u}$  — соответственно плотность среды и поле скоростей,  $\mathbf{F}$  — плотность массовых сил,  $\mathbf{p}_n$  — вектор напряжений (плотность поверхностных сил) на площадке  $d\sigma$  с нормалью  $\mathbf{n}$ ,  $dv$  — элемент объема. В механике сплошной среды направление  $\mathbf{n}$  всегда выбирается так, чтобы нормаль была внешней по отношению к той части среды, на которую действует поверхностная сила  $\mathbf{p}_n d\sigma$ . Если же рассматриваемый объем  $V$  помимо распределенных по  $\Sigma$  поверхностных сил подвергается также воздействию внешних сил, сосредоточенных вдоль некоторых поверхностей, лежащих внутри  $V$ , то в правую часть первого выражения (П1) необходимо добавить сумму этих внешних сил.

С целью упрощения выкладок далее используется прямоугольная декартова система координат  $x_1, x_2, x_3$  с векторами базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , в котором  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ . При этом  $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}^i n_i$ ,  $\mathbf{p}^i = p_{ki} \mathbf{e}_k$ , где  $p_{ki}$  — компоненты тензора напряжений  $P = p_{ki} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Здесь и всюду в дальнейшем во всех выражениях, содержащих пары одинаковых индексов, проводится независимое суммирование по повторяющимся индексам.

Следует особо подчеркнуть, что уравнение (П1) применимо для описания как непрерывных, так и разрывных движений сплошной среды. В тех случаях, когда в рассматриваемой области характеристики движения и состояния сплошной среды непрерывны вместе со своими производными по координатам и по времени, с использованием, в частности, формулы Гаусса–Остроградского для преобразования фигурирующего в (П1) интеграла по поверхности  $\Sigma$  в интеграл по ограничиваемому  $\Sigma$  объему  $V$  строго доказывается [20], что интегральная форма записи закона сохранения количества движения (П1) эквивалентна дифференциальному уравнению движения сплошной среды

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}^i}{\partial x_i}, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{П2})$$

Если же внутри  $V$  имеется сохраняющаяся с течением времени изолированная поверхность  $\Sigma_s$ , при переходе через которую параметры среды претерпевают разрыв, то с помощью (П1) устанавливается одно из системы конечных соотношений, связывающих между собой значения параметров среды на различных сторонах поверхности  $\Sigma_s$ .

Преобразуем уравнение (П1) применительно к случаю, когда гладкая поверхность разрыва  $\Sigma_s$  разделяет

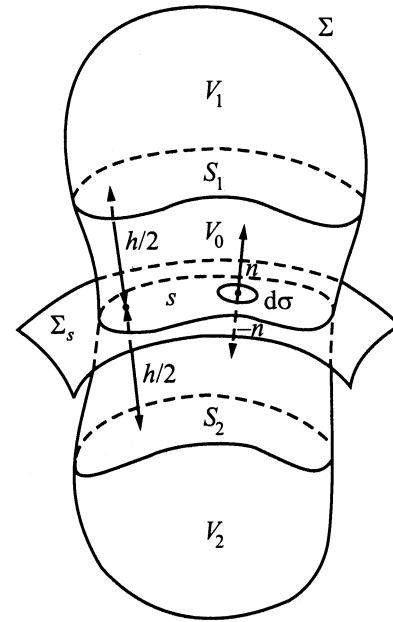


Рис. 6. К выводу интегрального равенства (П4).

рассматриваемый индивидуальный объем  $V$  на две части, в каждой из которых движение сплошной среды непрерывно. Как и при выводе условий на поверхностях разрыва [20], введем в рассмотрение некоторый вспомогательный объем  $V_0$ , связанный с куском  $s$  поверхности  $\Sigma_s$ , лежащим внутри  $V$  (рис. 6). С этой целью из каждой точки области  $s$  проведем в обе стороны от  $\Sigma_s$  отрезки нормалей достаточно малой длины  $h/2$ . Совокупности концов таких отрезков, лежащие внутри  $V$ , образуют эквидистантные  $\Sigma_s$  поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , которые совместно с примыкающей к ним боковой поверхностью  $\Sigma_l$  (являющейся частью  $\Sigma$ ), ограничивают объем  $V_0$ .

Обозначим через  $V_1, V_2$  объемы, отсекаемые поверхностями  $S_1, S_2$  от исходного объема  $V = V_0 + V_1 + V_2$ , а через  $\partial V_0, \partial V_1, \partial V_2$  — поверхности, ограничивающие  $V_0, V_1, V_2$ . Принимая во внимание, что в точках поверхности  $S_1$  направления внешних к  $\partial V_0, \partial V_1$  нормалей противоположны (то же самое выполняется на  $S_2$  для внешних нормалей к  $\partial V_0, \partial V_2$ ), и учитывая выполняющееся для внутренних напряжений на  $S_1, S_2$  равенство  $\mathbf{p}_n = -\mathbf{p}_{-n}$ , можем записать

$$\int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma = \int_{\partial V_1} \mathbf{p}_n d\sigma + \int_{\partial V_2} \mathbf{p}_n d\sigma + \int_{\partial V_0} \mathbf{p}_n d\sigma, \quad (\text{П3})$$

поскольку в правой части этого равенства интегралы по смежным между объемами  $V_0, V_1$  и  $V_0, V_2$  границам  $S_1, S_2$  взаимно сокращаются.

Преобразовав с помощью формулы Гаусса–Остроградского первые два интеграла в правой части этого равенства в интегралы по объемам  $V_1, V_2$ , перейдем затем к пределу при  $h \rightarrow 0$ . При этом площадь боковой поверхности  $\Sigma_l$  объема  $V_0$  стремится к нулю. Ввиду ограниченности  $\mathbf{p}_n$  последний интеграл в правой части

(П3) в пределе перейдет в интеграл по разным сторонам области  $s$  с взаимно противоположными направлениями нормалей, так что с учетом очевидного равенства  $\lim_{h \rightarrow 0} V_0 = 0$  получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}^i}{\partial x_i} dv + \int_s [\mathbf{p}_n] d\sigma, \quad [\mathbf{p}_n] = \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{-n}.$$

В результате уравнение (П1) преобразуется к следующему виду:

$$\int_V \left\{ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{F} \right] - \frac{\partial \mathbf{p}^i}{\partial x_i} \right\} dv = \int_s [\mathbf{p}_n] d\sigma. \quad (\text{П4})$$

Пусть далее  $\Sigma_s$  представляет поверхность раздела между двумя несмешивающимися ньютоновскими магнитными жидкостями, свойства которых (плотность  $\rho$ , коэффициент динамической вязкости  $\eta$ , абсолютная магнитная проницаемость  $\mu$ ) различны по разные стороны от  $\Sigma_s$ . Для несжимаемой ньютоновской жидкости

$$p_{ki} = -p\delta_{ki} + \pi_{ki}, \quad \pi_{ki} = \eta \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right),$$

$$\delta_{ki} = 1 \quad \text{при } k = i, \quad \delta_{ki} = 0 \quad \text{при } k \neq i,$$

где  $p$  — давление,  $\pi_{ki}$  — вязкий тензор напряжения.

При этом

$$\frac{\partial \mathbf{p}^i}{\partial x_i} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}, \quad \Delta = \nabla^2. \quad (\text{П5})$$

Предполагается, что жидкости помещены в магнитное поле  $\mathbf{H}$ , создаваемое внешними источниками. В соответствии с законами магнитостатики нормальная к  $\Sigma_s$  составляющая вектора напряженности магнитного поля, а также касательная составляющая вектора индукции  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  и вектор намагниченности  $\mathbf{M} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{H}$  при переходе через  $\Sigma_s$  претерпевает разрывы; здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м — магнитная постоянная.

Помимо массовой силы тяжести с плотностью  $\mathbf{g}$  ( $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения) на магнитную жидкость, находящуюся в градиентном магнитном поле, действует также объемная магнитная сила. Пренебрегая дипольным взаимодействием коллоидных частиц, имеем [1] следующее выражение для объемной плотности магнитной силы  $\mathbf{F}_m = \mu_0 M \nabla H$ . В результате фигурирующая в (П4) суммарная плотность внешней объемной силы  $\rho \mathbf{F}$  представляется выражением

$$\rho \mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \mu_0 M \nabla H. \quad (\text{П6})$$

Из каждой точки  $O$  гладкой поверхности раздела  $\Sigma_s$  в противоположных направлениях выходят векторы нормалей  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$ . Эти векторы определяют ориентацию элементарных площадок  $d\sigma_+$  и  $d\sigma_-$  с центром в точке  $O$ , локально представляющих разные стороны поверхности  $\Sigma_s$ . Условимся далее отмечать индексами 1 и 2

давление, намагниченность, а также значения компонент вязкого тензора напряжений в точке соответственно на площадках  $d\sigma_+$  и  $d\sigma_-$ . При совместном движении несмешивающихся феррожидкостей в каждой точке поверхности раздела выполняется динамическое условие [2], выражающее баланс поверхностных сил, действующих на противоположные стороны границы раздела (и являющееся обобщением динамического условия, используемого в гидродинамике [22])

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)n_k - (\pi_{ki}^{(1)} - \pi_{ki}^{(2)})n_i \\ = \left\{ 2\alpha K + \frac{\mu_0}{2} \left[ (M_i^{(2)}n_i)^2 - (M_i^{(1)}n_i)^2 \right] \right\} n_k, \\ K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности  $\Sigma_s$  в рассматриваемой точке.

Из физических соображений следует, что в каждой точке  $\Sigma_s$  величины  $R_1, R_2$  имеют одинаковый знак, выбираемый из условия, что в отсутствие магнитного поля гидродинамическое давление на элементарных площадках  $d\sigma_+, d\sigma_-$  с нормальными  $\mathbf{n}$  и  $-\mathbf{n}$  к неплоской поверхности раздела  $\Sigma_s$  больше с той стороны  $\Sigma_s$ , которая вогнута.

По сравнению со случаем немагнитных жидкостей ( $\mathbf{M}^{(1)} = 0, \mathbf{M}^{(2)} = 0$ ) наряду с поверхностным давлением  $2\alpha K$ , всецело обусловленным капиллярными силами [22], в правую часть (П7) входит магнитный скачок давления, возникающий при наличии скачка нормальной составляющей вектора намагниченности и не зависящий от кривизны поверхности раздела. При этом в случае двух покоящихся феррожидкостей, имеющих плоскую поверхность раздела, большее давление испытывает та из площадок  $d\sigma_+, d\sigma_-$ , к которой примыкает феррожидкость с меньшей величиной  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ . Например, давление внутри феррожидкости у плоской границы с атмосферой меньше атмосферного на величину  $\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})/2$ .

В более компактной векторной форме динамическое условие (П7) записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{-n} = \left\{ 2\alpha K + \frac{\mu_0}{2} [(\mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{n})^2 - (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n})^2] \right\} \mathbf{n}. \quad (\text{П8})$$

При подставке (П5), (П6), (П8) в (П4) получаем

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{g} \right] + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{u} - \mu_0 M \nabla H \right\} dv \\ = \int_s \left\{ 2\alpha K + \frac{\mu_0}{2} [(\mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{n})^2 - (\mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{n})^2] \right\} \mathbf{n} d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{П9})$$

В основном тексте используется запись этого интегрального равенства в цилиндрической системе координат.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01057).

## Список литературы

- [1] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [2] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [3] Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 386 с.
- [4] Коровин В.М., Кубасов А.А. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 1. С. 23–30.
- [5] Luo W., Du T., Huang J. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. N 20. P. 4134–4137.
- [6] Yang H.C., Jang I.J., Horng H.E. et al. // JMMM. 1999. Vol. 201. July I. P. 313–316.
- [7] Баитовой В.Г., Краков М.С. // ПМТФ. 1978. № 4. С. 147–153.
- [8] Korovin V.M., Kubasov A.A. // JMMM. 1999. Vol. 202. N 2–3. P. 547–553.
- [9] Taylor G.I. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1934. Vol. 146. N 858. P. 501–523.
- [10] Rumscheidt F.D., Mason S.G. // J. Colloid. Sci. 1962. Vol. 17. N 3. P. 260–269.
- [11] Lee W.-K., Yu K.-L., Flumerfelt R.W. // Int. J. Multiphase Flow. 1981. Vol. 7. N 4. P. 385–400.
- [12] Stone H.A., Bentley B.J., Leal L.G. // J. Fluid. Mech. 1986. Vol. 173. P. 131–158.
- [13] Bentley B.J., Leal L.G. // J. Fluid. Mech. 1986. Vol. 167. P. 219–240.
- [14] Lord Rayleigh // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. P. 145–154.
- [15] Бойс Ч. Мыльные пузыри. Петроград: Научное книгоиздательство, 1919. 192 с.
- [16] Tomotika S. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1935. Vol. 150. N 870. P. 322–337.
- [17] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 654 p.
- [18] Lee W.-K., Flumerfelt R.W. // Int. J. Multiphase Flow. 1981. Vol. 7. N 4. P. 363–383.
- [19] Stone H.A., Brenner M.P. // J. Fluid. Mech. 1996. Vol. 318. P. 373–374.
- [20] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. 1983. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [21] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 930 с.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [23] Коровин В.М. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 12. С. 16–25.