

с естественными граничными условиями

$$r = R_j : \quad \Phi = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_0. \quad (3)$$

(R_j в бисферической системе координат определяет радиус j -го шара $j = 1, 2$).

Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} нормален к поверхности проводников и определяется в окрестности j -го шара выражением

$$r = R_j : \quad \mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{E}_n^{(j)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n_j} \mathbf{n}_j \quad (j = 1, 2).$$

Величина силы взаимодействия шаров легко вычисляется в виде [1]

$$\mathbf{F} \mathbf{n}_z = \frac{\varepsilon}{8\pi} \oint_{S_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \mathbf{n}_z \mathbf{n}_j dS_j, \quad (4)$$

где \mathbf{n}_z — орт оси OZ , проходящей через центры шаров; \mathbf{n}_j — нормаль к элементу поверхности dS_j .

Потенциал Φ в пространстве вне шаров представим в виде суммы потенциала внешнего однородного электростатического поля Φ_0 и потенциала Ψ , создаваемого зарядами, индуцированными на поверхности шаров ($\Phi = \Psi + \Phi_0$), каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Psi = 0, \quad (1a)$$

$$\Delta \Psi_0 = 0. \quad (1b)$$

Решение уравнения (1b), удовлетворяющее условию (3), в сферической системе координат (с началом координат, лежащим на оси); (рис. 1) имеет простой вид

$$\Phi_0 = -E_0 r. \quad (5)$$

2. Аналитическое решение уравнения (1a) целесообразно искать в бисферических координатах μ, η, φ , которые связаны с декартовыми посредством известных соотношений [9,10],

$$x = \frac{a \sin(\eta) \cos(\eta)}{\cosh(\mu) - \cos(\eta)},$$

$$y = \frac{a \sin(\eta) \sin(\varphi)}{\cosh(\mu) - \cos(\eta)}, \quad z = \frac{a \sinh(\mu)}{\cosh(\mu) - \cos(\eta)},$$

$$-\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < \eta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (6)$$

Поверхности первого S_1 и второго S_2 шаров в бисферических координатах задаются уравнениями [9]

$$\mu = \mu_1, \quad \mu = -\mu_2,$$

$$\mu_1 = \ln \left(\frac{D_1 + a}{R_1} \right), \quad \mu_2 = \ln \left(\frac{D_2 + a}{R_2} \right), \quad (7)$$

где a определяется выражением

$$a = (D_1^2 - R_1^2)^{1/2} = (D_2^2 - R_2^2)^{1/2}, \quad (8)$$

D_1 и D_2 — расстояния от начала координат до центров 1-го и 2-го шаров соответственно, определяемые соотношениями

$$D_1 = \frac{1}{2h} (h^2 + R_1^2 - R_2^2), \quad D_2 = \frac{1}{2h} (h^2 + R_2^2 - R_1^2), \quad (9)$$

h — расстояние между центрами шаров,

$$h = R_1 + R_2 + s = D_1 + D_2, \quad (10)$$

s — расстояние между ближайшими точками шаров на оси симметрии (рис. 1).

Учитывая (6), можно получить выражение для элемента площади каждого шара и для косинуса полярного угла Θ . Для второго шара эти выражения будут иметь следующий вид:

$$dS_2 = \frac{a^2 \sin(\eta) d\eta d\varphi}{(\cosh(\mu_2) - \cos(\eta))^2},$$

$$\cos(\Theta) = \frac{1 - \cosh(\mu_2) \cos(\eta)}{\cosh(\mu_2) - \cos(\eta)}. \quad (11)$$

Потенциал электрического поля Ψ , создаваемый распределением индуцированных зарядов на поверхности шаров, удовлетворяет уравнению (1a), которое запишем в бисферических координатах [9],

$$\Delta \Psi = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{a \sin(\eta)}{\cosh(\mu) - \cos(\eta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{a \sin(\eta)}{\cosh(\mu) - \cos(\eta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin(\eta) (\cosh(\mu) - \cos(\eta))} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) с учетом граничных условий (2), (3) легко выписывается

$$\Psi = \sqrt{\cosh(\mu) - \cos(\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \exp \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] \times P_n(\cos(\eta)) + B_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] \right) \times P_n(\cos(\eta)), \quad (13)$$

A_n и B_n — константы.

Выражение для полного потенциала Φ с учетом (5), (12) запишем в форме

$$\Phi = \sqrt{\cosh(\mu) - \cos(\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \exp \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] + B_n \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu \right] \right) P_n(\cos(\eta)) - E_0 z. \quad (14)$$

Представим величину z в этой формуле в виде разложения по полиномам Лежандра. Согласно [6],

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh(\mu) - \cos(\eta)}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)|\mu|\right] \times P_n(\cos(\eta)). \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по μ и учитывая (7), получим выражение для z [6]

$$|z| = \sqrt{2a} \sqrt{\cosh(\mu) - \cos(\eta)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \times \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)|\mu|\right] P_n(\cos(\eta)). \quad (16)$$

Используя граничные условия (3) и подставляя в (14) выражение (16), найдем константы разложения в выражении для потенциала индуцированного поля

$$A_n = \frac{\sqrt{2a}(2n+1)E_0(\exp[(2n+1)\mu_2] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1},$$

$$B_n = -\frac{\sqrt{2a}(2n+1)E_0(\exp[(2n+1)\mu_2] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1}. \quad (17)$$

3. Чтобы найти величину силы взаимодействия шаров, учтем, что напряженность электрического поля в точке A , расположенной на поверхности второго шара (рис. 1), равна сумме напряженностей электрических полей первого и второго шара

$$E_A = E_A^{(1)} + E_A^{(2)},$$

причем напряженность поля каждого шара в отдельности определяется нормальной производной от потенциала Φ .

Оператор нормальной производной к поверхности второго шара в бисферических координатах легко выписывается [9]

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv -\frac{1}{a} \sqrt{\cosh(\mu_2) - \cos(\eta)} \frac{\partial}{\partial \mu}. \quad (18)$$

Тогда выражение для напряженности электрического поля второго шара в точке A имеет вид

$$\mu = -\mu_2 : E_A^{(2)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = \frac{1}{a} (\cosh(\mu_2) - \cos(\eta))^{3/2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2a}(2n+1)E_0(\exp[(2n+1)\mu_1] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1} \times P_n(\cos(\eta)) \exp\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\mu_2\right], \quad (19)$$

для первого шара

$$\mu = \mu_1 : E_A^{(1)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = -\frac{1}{a} (\cosh(\mu_1) - \cos(\eta))^{3/2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2a}(2n+1)E_0(\exp[(2n+1)\mu_2] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1} \times P_n(\cos(\eta)) \exp\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\mu_1\right]. \quad (20)$$

Для упрощения (19) и (20) введем следующие обозначения:

$$Y_n = \sqrt{2}(2n+1) \exp\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\mu_2\right] \times \frac{(2n+1)(\exp[(2n+1)\mu_1] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1}, \quad (21)$$

$$Z_n = \sqrt{2}(2n+1) \exp\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\mu_1\right] \times \frac{(2n+1)(\exp[(2n+1)\mu_2] + 1)}{\exp[(2n+1)(\mu_1 + \mu_2)] - 1}. \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (19) и (20), найдем

$$\mu = -\mu_2 : E_A^{(2)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = E_0(\cosh(\mu_2) - \cos(\eta))^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n P_n(\cos(\eta)), \quad (23)$$

$$\mu = \mu_1 : E_A^{(1)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = E_0(\cosh(\mu_1) - \cos(\eta))^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n P_n(\cos(\eta)). \quad (24)$$

Учитывая, что $\cos(\pi) = -1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, окончательно получим выражение для напряженности электрического поля, создаваемого вторым шаром в точке A ,

$$\mu = -\mu_2; \eta = \pi : E_A^{(2)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = E_0(\cosh(\mu_2) - \cos(\eta))^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Y_n, \quad (25)$$

аналогично для первого шара

$$\mu = -\mu_1; \eta = \pi : E_A^{(1)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) = E_0(\cosh(\mu_1) - \cos(\eta))^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Z_n. \quad (26)$$

Чтобы описать взаимодействие шаров, достаточно найти силу, действующую на один из шаров, тогда сила,

действующая на второй шар, определяется из третьего закона Ньютона. Для случая, когда внешнее электрическое поле направлено вдоль оси z , выражение (4) преобразуется к виду

$$F = \frac{\varepsilon}{8\pi} \oint_{S_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \cos(\Theta) dS_j. \quad (27)$$

Тогда соотношение для силы, действующей на второй шар, будет иметь вид

$$\mu = -\mu_2: \quad F^{(2)} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_{S_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \cos(\Theta) dS_2. \quad (28)$$

Из (11), (25) и (28) найдем

$$F^{(2)} = \frac{\varepsilon}{4} a^2 E_0^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^2 \int_0^{\pi} P_n^2(\cos(\eta)) (\sin(\eta)) d\eta - \cosh(\mu_2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(Y_n P_n(\cos(\Theta)) \right)^2 \cos(\eta) \sin(\eta) d\eta \right]. \quad (29)$$

Используя свойство ортогональности полиномов Лежандра, получим соотношения

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^2 P_n^2(\cos(\eta)) \sin(\eta) d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} Y_n^2, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(Y_n P_n(\cos(\eta)) \right)^2 \cos(\eta) \sin(\eta) d\eta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n-1} Y_n \frac{n}{2n-1} \frac{2}{2n+1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+1} Y_n \frac{n+1}{2n+3} \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (29) с учетом (30) и (31) определим выражение для силы, действующей на второй шар,

$$F^{(2)} = \frac{\varepsilon}{4} a^2 E_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \times Y_n \left[Y_n - \cosh(\mu_2) \left(Y_{n+1} \frac{n+1}{2n+3} + Y_{n-1} \frac{n}{2n-1} \right) \right]. \quad (32)$$

Учитывая (7), получим

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \mu_2) &= \exp \left[\alpha \ln \left(\frac{D_2 + a}{R_2} \right) \right] = \left(\frac{D_2 + a}{R_2} \right)^{\alpha}, \\ \exp(\alpha \mu_1) &= \exp \left[\alpha \ln \left(\frac{D_1 + a}{R_1} \right) \right] = \left(\frac{D_1 + a}{R_1} \right)^{\alpha}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя в (32) вместо $\cosh(\mu_2)$ его выражение через экспоненты (33), получим уравнение для силы $F^{(2)}$, действующей на второй шар, в следующем виде:

$$F^{(2)} = \frac{\varepsilon}{4} a^2 E_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} Y_n \left[Y_n - \frac{1}{2} \left(\frac{D_2 + a}{R_2} + \frac{R_2}{D_2 + a} \right) \left(Y_{n+1} \frac{n+1}{2n+3} + Y_{n-1} \frac{n}{2n-1} \right) \right], \quad (34)$$

$$Y_n = \sqrt{2}(2n+1) \left(\frac{D_2 + a}{R_2} \right)^{(n+1/2)} \times \left\{ \frac{(2n+1) \left[\left(\frac{D_1 + a}{R_1} \right)^{(2n+1)} + 1 \right]}{\left[\left(\frac{D_1 + a}{R_1} \right) \left(\frac{D_2 + a}{R_2} \right) \right]^{(2n+1)} - 1} \right\}. \quad (35)$$

4. Для удобства численного счета представим выражение для компоненты силы в безразмерном виде. Для этого введем безразмерные величины $\gamma = R_1/R_2$, $r = s/R_2$. В итоге получим

$$F^{(2)} = \frac{\varepsilon}{4} R_2^2 \left\{ \left[\frac{(\gamma + 1 + r)^2 - \gamma^2 + 1}{2(\gamma + 1 + r)} \right]^2 - 1 \right\} \times E_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} Y_n \left[Y_n - \frac{1}{2} \left(G + \frac{1}{G} \right) \times \left(\frac{n+1}{2n+3} Y_{n+1} + \frac{n}{2n-1} Y_{n-1} \right) \right], \quad (36)$$

$$Y_n = \sqrt{2}(2n+1) G^{(n+1/2)} \left[\frac{(2n+1)(H^{(2n+1)} + 1)}{H^{(2n+1)} G^{(2n+1)} - 1} \right]. \quad (37)$$

В результате выражение для безразмерной силы взаимодействия шаров (36) в единицах измерения $R_2^2 E_0^2 \varepsilon$ будет иметь вид

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{(\gamma + 1 + r)^2 - \gamma^2 + 1}{2(\gamma + 1 + r)} \right]^2 - 1 \right\} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} Y_n \left[Y_n - \frac{1}{2} \left(G + \frac{1}{G} \right) \times \left(\frac{n+1}{2n+3} Y_{n+1} + \frac{n}{2n-1} Y_{n-1} \right) \right]. \quad (38)$$

5. На рис. 2 в пространстве параметров r и γ изображена поверхность, описывающая зависимость безразмерной силы взаимодействия шаров от отношения их радиусов γ и безразмерного расстояния между шарами r , рассчитанная по (38) с учетом (37).

Для более детального анализа на рис. 3 приведены зависимости безразмерной силы f от безразмерного расстояния r при различных значениях отношений радиусов шаров $\gamma = R_1/R_2$. Видно, что при уменьшении расстояния между центрами шаров сила притяжения

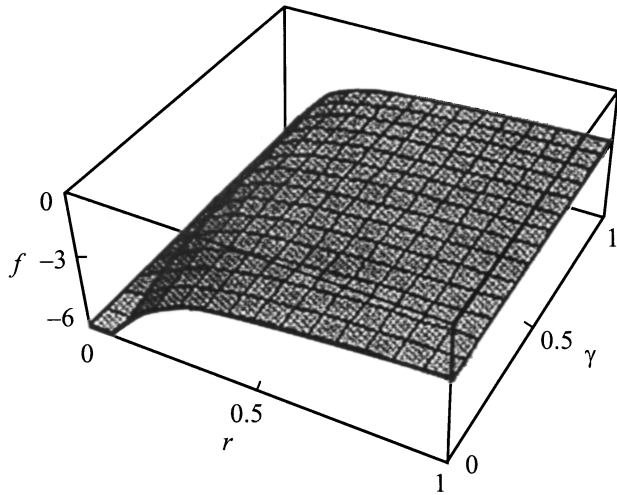


Рис. 2. Зависимость безразмерной силы, действующей на один из шаров, от отношения радиусов шаров и безразмерного расстояния между шарами.

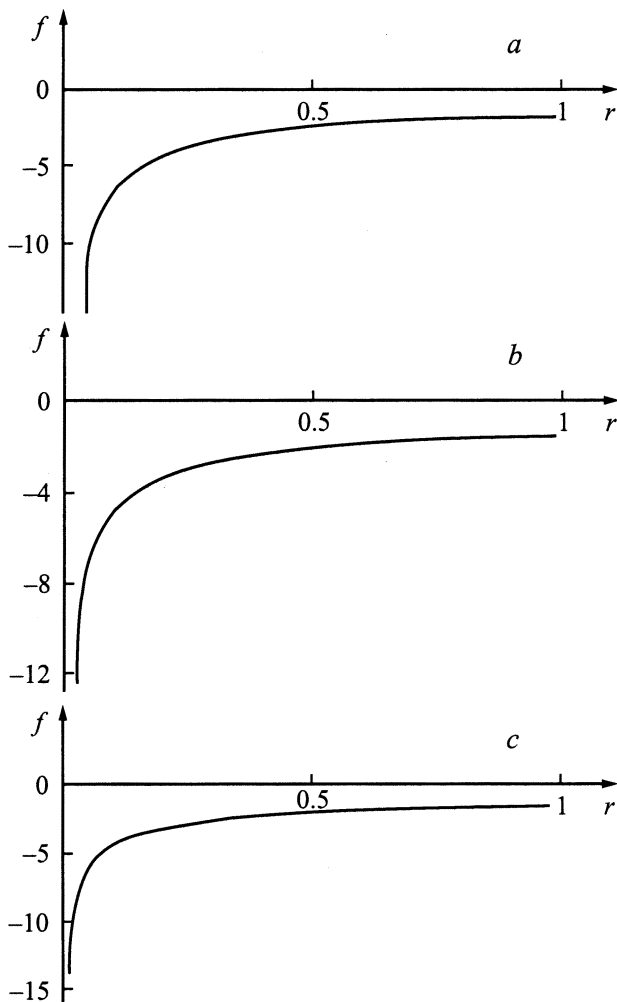


Рис. 3. Зависимости безразмерной силы f от безразмерного расстояния r при различных значениях отношений радиусов шаров. γ : $a - 0.1$, $b - 0.5$, $c - 1$.

между ними растет весьма медленно: примерно $f \sim r^{-\alpha}$, где $\alpha \approx 1$, тогда как для электростатически взаимодействующих элементарных диполей зависимость была бы гораздо более сильной $\alpha = 4$ [6].

Следует отметить, что приведенные рассуждения применимы в общих чертах и для ситуации незаземленных изолированных шаров одинаковых радиусов.

Давление электрического поля на поверхности шаров достигает максимума в точках поверхностей, лежащих на оси OZ напротив друг друга. В реальной ситуации облачных шаров при малых расстояниях между ними электростатическое давление может стать большим и возможны две ситуации: если в областях с наибольшей поверхностной плотностью индуцированного заряда давление электрического поля будет меньше лапласовского давления, то капли сольются в одну; если давление электрического поля превысит лапласовское, то может иметь место неустойчивость: капли выбросят навстречу друг другу струйки высокодисперсных сильнозаряженных дочерних капелек [2].

Заключение

Два изолированных заземленных незаряженных идеальнопроводящих шара различных радиусов во внешнем однородном электростатическом поле, коллинеарном оси симметрии, всегда притягиваются, однако зависимость силы притяжения от расстояния между центрами шаров, имеющая вид $f \sim r^{-n}$ (показатель n является функцией r), оказывается весьма слабой при малых расстояниях между шарами (при безразмерном расстоянии $r \leq 1$). В этом случае показатель n мал: $n \approx 1$, в то время как для ситуации взаимодействия двух элементарных диполей $n = 4$.

Список литературы

- [1] Davis M.H. // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1964. Vol.176. N 4. P. 499–511.
- [2] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
- [3] Мухина Е.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 2. С. 18–26.
- [4] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 8. С. 31–38.
- [5] Мазец И.Е. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 8–10.
- [6] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954.
- [7] Саранин В.А. // УФН. 1999. Т. 169. № 4. С. 453–458.
- [8] Щерба Е.А., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. I. С. 15–19.
- [9] Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: ИЛ. 712 с.
- [10] Панченков Г.М., Цабек Л.К. Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле. М: Химия, 1969. 190 с.