01;05;07

Нетепловые механические напряжения и оптическое разрушение, вызванные в прозрачном диэлектрике лазерным излучением

© В.Н. Стрекалов

Московский государственный технологический университет „СТАНКИН“,
101471 Москва, Россия
e-mail: stvn@stankin.ru

(Поступило в Редакцию 4 апреля 2001 г.)

Изучается проблема оптического разрушения чистых прозрачных диэлектриков в лазерных полях. Сформулирована задача теории упругости о механических напряжениях, возникающих в кристалле в случае действия на решетку произвольных сферически симметричных сил с заданной объемной плотностью. Найдено математически точное общее решение этой задачи. Исследованы специфические особенности граничных условий, возникающие в данной задаче. Дано подробное описание модели объемных сил, действующих на решетку со стороны горячих неравновесных электронов. В целом подтверждены предварительные результаты работы [1], полученные ранее с помощью приближенного решения задачи. Оценки показывают, что предложенный механизм механического разрушения диэлектриков светом действительно важен. Обсуждаются пути и перспективы дальнейшего изучения этого нетеплового, безынерционного механизма оптического разрушения, имеющего чисто механическую природу.

Введение

Оптическое разрушение чистых прозрачных диэлектриков сфокусированным лазерным излучением исследуется на протяжении многих лет. Эти исследования нашли отражение в десятках обзоров и многих сотнях оригинальных публикаций. Одна из последних работ по этой тематике (там имеется краткий обзор литературы) посвящена предварительным результатам описания нового нетеплового механизма оптического разрушения [1].

Краткое описание механизма разрушения [1] сводится к следующему. В фокальной области интенсивное лазерное излучение вызывает бурную ионизацию вещества. В результате возникает пространственно неоднородное облако горячих неравновесных электронов. Облако „раздувает“ кристалл, приводя к его разрушению.

Более последовательное описание разрушения должно учитывать потоки импульса и энергии, переносимые электронами из центральных областей фокального пятна к периферии. Рассеиваясь на примесях или иных несовершенствах решетки, такие потоки создают объемную плотность сил, деформирующих решетку. Деформации связаны с появлением тензора механических напряжений. Если напряжения превышают предельно допустимые напряжения, то образец разрушается (это естественный критерий механического разрушения диэлектрика в лазерном поле). Данный процесс включает образование первичной трещины, представляющей собой макронеоднородность кристалла. Рассеяние электронов на трещине должно рассматриваться как включение механизма обратной связи, делающего дальнейшие этапы процесса разрушения лавиноподобным.

В данной работе будет дано подробное математическое описание процессов до образования первичной трещины.

Надо отметить, что процессы разрушения различны в зависимости от экспериментальных условий и, в частности, от условий фокусировки излучения. Если для фокусирования лазерного излучения используется короткофокусная линза, то распределение параметров электронного облака и связанных с ним потоков импульса и энергии можно считать сферически симметричным. Именно такой случай будет изучаться ниже. Для длиннофокусных линз более пригодна модель цилиндрической симметрии. Было бы крайне интересно сопоставить теоретические различия сферической и цилиндрической моделей с различиями в соответствующих, специально поставленных экспериментах. Различия, в частности, могут касаться формы первичной трещины.

При использовании сферически симметричной модели необходимо ввести тензор радиальных напряжений $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$ и два совпадающих тангенциальных тензора $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$. Проведенное ниже исследование показывает, что при некоторых значениях расстояний r от центра фокального пятна $\sigma_{rr} > 0$ (т.е. возникает растяжение решетки) в других областях имеется радиальное сжатие ($\sigma_{rr} < 0$). В условиях нашей задачи напряжения $\sigma_{\theta\theta}(r)$ всегда оказываются положительными и вызывают растяжение сферически симметричных слоев образца. Знак $\sigma_{\theta\theta}(r)$ весьма существен для разрушения кристаллических образцов, так как предельные напряжения растяжения примерно на порядок меньше напряжений сжатия.

Развивая и уточняя работу [1], дадим последовательную формулировку физической задачи, позволяющей определить относительные смещения и тензоры напряжений. Запишем и решим уравнение, определяющее относительные смещения и механические напряжения. При этом будут использоваться элементы теории упругости [2]. Покажем, что можно отказаться от приближенных вычислений, использованных в работе [1], и решить задачу точно в достаточно общем виде. Обсудим модель объемной плотности сил $\mathbf{F}(r)$, действующих на решетку со стороны электронной подсистемы в приближении сферически симметричной задачи и получим формулы, позволяющие провести численные оценки возникающих механических напряжений.

Решение будет получено для случая рассеяния электронов на остаточных примесях чистого прозрачного диэлектрика, однако, результаты будут пригодны и для других типов рассеяния и моделей сил $\mathbf{F}(r)$, обладающих сферической симметрией.

Уравнение упругости и его решение

Рассматривая однородную упругую среду в сферической системе координат, можно ввести относительные смещения точек среды $u = u(r)$, тензоры деформаций $u_{rr} = u_{rr}(r)$, $u_{\theta\theta} = u_{\theta\theta}(r)$ и $u_{\varphi\varphi} = u_{\varphi\varphi}(r)$, причем в силу симметрии $u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi}$, а также тензоры механических напряжений $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$ и $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$. Если на среду действуют силы, обладающие сферической симметрией и имеющие объемную плотность $F(r)$, то функция $u = u(r)$ должна подчиняться уравнению теории упругости (детали см. в [2])

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2u(r)\right]\right\} = -AF(r), \tag{1}$$

где введен постоянный множитель

$$A = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}, \tag{2}$$

зависящий от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона σ. Напомним, что коэффициент σ обычно изменяется в пределах $0 < \sigma < 0.5$.

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (1) не является уравнением Лапласа и, в отличие от последнего содержит произведение $r^2u(r)$. Поэтому возможно появление особенностей решения в точке $r = 0$. Точка $r = 0$ требует специального математического исследования, хотя для физических результатов она не представляет специфического интереса, так как минимальные значения физически оправданных координат r определяются постоянной кристаллической решетки, дебаевским радиусом экранирования, длиной свободного пробега электронов и, возможно, другими факторами.

Дважды интегрируя уравнение (1), находим его решение

$$u(r) = C_1r + \frac{C}{r^2} - \frac{A}{r^2}\int\left\{r^2\int F(r)dr\right\}dr. \tag{3}$$

Величины C_1 и C_2 — произвольные константы интегрирования. Важно напомнить, что при вычислении интегралов в (3) к ним можно добавлять дополнительные постоянные S_1 и S_2, значения которых выбираются нами из соображений удобства (легко заметить, что S_1 и S_2 просто добавляются к C_1 и C_2 и не влияют на вид решения). Замечание о постоянных S_1 и S_2 потребовалось для того, чтобы преобразовать решение (3). Для проведения этого преобразования учтем, что, согласно свойствам интегралов,

$$\int f(x)dx = \int_0^x f(x)dx + \text{const}, \tag{4}$$

причем величина const определяется нижним пределом интеграла (4).

Учитывая это свойство и вводя новые обозначения c_1 и c_2 для комбинаций постоянных C_1, C_2, S_1, S_2, запишем решение (3) в виде

$$u(r) = c_1r + \frac{c_1}{r} - \frac{A}{r^2}\int_0^r\left\{r^2\int_0^r F(r)dr\right\}dr. \tag{5}$$

Введение определенных интегралов позволяет в дальнейшем проводить численные расчеты определяемых величин и существенно помогает исследованию поведения решения вблизи нуля.

Теперь проинтегрируем внешний интеграл в (5) по частям. Найдем

$$\int_0^r\left\{r^2\int_0^r F(r)dr\right\}dr = \frac{r^3}{3}\int_0^r F(r)dr - \frac{1}{3}\int_0^r r^3F(r)dr. \tag{6}$$

Оказывается, что сделанное преобразование чрезвычайно упрощает математическое решение задачи, позволяя получить точный ответ для произвольной функции $F(r)$.

Учитывая преобразование (3), запишем решение (1) в виде

$$u(r) = c_1r + \frac{c_2}{r^2} - \frac{Ar}{3}I_1(r) + \frac{A}{3r^2}I_2(r), \tag{7}$$

где введены обозначения

$$I_1(r) = \int_0^r F(r)dr, \quad I_2(r) = \int_0^r r^3F(r)dr. \tag{8}$$

До сих пор никаких предположений о функции $F(r)$, кроме требования ее сферической симметрии, сделано не было. Теперь видно, что она должна быть интегрируема так, чтобы интегралы (8) имели смысл при любых r. Все „физические“ функции удовлетворяют этим требованиям.

Граничные условия

Граничные условия для рассматриваемой задачи должны отражать два очевидных физических требования. Во-первых, решение в нуле должно быть ограниченным $u(0) < 0$ либо нулевым

$$u(0) = \lim_{r\to 0} u(r) = 0. \tag{9}$$

Ограниченность решения в нуле являлось бы более слабым требованием, чем условие (9). Оно могло бы появиться в том случае, если бы условие (9) не могло быть выполнено. Действительно, при некоторых условиях удовлетворить требованию (9) нельзя и оказывается, что $u(r) = u_0 > 0$. Этот результат означал бы, что в центре фокального пятна формируется вакуумная полость, окруженная веществом, находящимся в сжатом состоянии с повышенной плотностью. Появление в фокальной области такой полости представляется интересным физическим явлением, которое заслуживает дальнейшего изучения.

Второе граничное условие определяется тем естественным допущением, что в бесконечно удаленной точке или на свободной поверхности образца радиальная составляющая механического напряжения должна обращаться в нуль

$$\sigma_{rr}(\infty) = \lim_{r\to\infty} \sigma_{rr}(r) = 0.$$

Граничные условия (9) и (10) позволяют определить неизвестные постоянные c_1 и c_2.

Изучая поведение решения (7) в пределе $r \to 0$ заметим, что

$$\lim_{r\to 0} I_1(r) = 0, \quad \lim_{r\to 0} I_2(r) = 0. \tag{11}$$

Обращение в нуль второго предела (11) означает, что предел всего решения (7) при $r \to 0$ имеет вид неопределенности типа $0/0$. Поэтому для проверки выполнения граничного условия (9) необходимо использование правила Лопиталя (это достаточно редкий случай для решения задач математической физики). Дифференцируя по отдельности знаменатель r^2 и числитель $I_2(r)$, найдем, что

$$\lim_{r\to 0} u(r) = \frac{A}{6} \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r r^3 F(r) dr = 0. \tag{12}$$

Итак, первому граничному условию можно удовлетворить только при использовании правила Лопиталя, причем положив $c_2 = 0$.

Тензоры механических напряжений и второе граничное условие

В работе [2] проведен подробный вывод формул, связывающих относительные смещения с тензорами деформаций и тензорами механических напряжений. В сферически симметричной системе

$$u_{rr}(r) = \frac{u(r)}{r}, \quad u_{\theta\theta}(r) = u_{\varphi\varphi}(r) = \frac{u(r)}{r} \tag{13}$$

и

$$\sigma_{rr}(r) = D\big[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}(r)\big], \tag{14}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = D\big[u_{\theta\theta}(r) + 2\sigma_{rr}(r)\big], \tag{15}$$

причем использовано обозначение

$$D = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}. \tag{16}$$

В условиях рассматриваемой задачи формулы (13)–(16) позволяют найти тензоры механических напряжений

$$\sigma_{rr}(r) = D\bigg[(1+\sigma)c_1 - \frac{1}{3}A(1+\sigma)I_1(r) - \frac{2A}{3r^3}(1-2\sigma)I_2(r)\bigg], \tag{17}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = D\bigg[(1+\sigma)c_1 - \frac{1}{3}A(1+\sigma)I_1 + \frac{A}{3r^3}(1-2\sigma)I_2(r)\bigg], \tag{18}$$

Потребуем теперь выполнения второго граничного условия. Считая, что интеграл $I_2(r)$ имеет смысл, обнаруживаем

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^3} \int_0^r r^3 F(r) dr = 0. \tag{19}$$

Тогда для выполнения второго граничного условия надо потребовать выполнения равенства

$$c_1 = \frac{1}{3} A I_1(\infty). \tag{20}$$

При выбросе постоянной (20) тангенциальные механические напряжения также обращаются в нуль на бесконечности, $\sigma_{\theta\theta}(\infty) = \sigma_{\varphi\varphi}(\infty) = 0$, что естественно с физической точки зрения и может служить доводом о корректности полученного решения.

Итак, после удовлетворения граничных условий (9) и (10) находим

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{1}{3} AD(1+\sigma)\big[I_1(\infty) - I_1(r)\big] - \frac{2AD}{3r^3}(1-2\sigma)I_2(r), \tag{21}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{3} AD(1+\sigma)\big[I_1(\infty) - I_1(r)\big] + \frac{AD}{3r^3}(1-2\sigma)I_2(r). \tag{22}$$

Формулы (21) и (22) впервые получены в общем виде для произвольной обьемной плотности сил $F(r)$.

Исследование тензора (21) показывает, что $\sigma_{rr}(r)$ может изменять знак при изменении координаты точки наблюдения r. Другими словами, в фокальном обьеме есть области сжатия и растяжения. Напротив, изучение (22) показывает, что $\sigma_{\theta\theta}(r)$ всегда является положительной величиной, т. е. тангенциальные напряжения всегда растягивают образец. Это соответствует первоначальным представлениям о механизме разрушения h-слоя [1,3]. По-видимому, именно эти растягивающие напряжения являются основной причиной начала разрушения кристалла в области фокусирования лазерного излучения. Заметим, что указанные напряжения не связаны с нагревом решетки. Они возникают безынерционно сразу же после появления облака горячих электронов и адиабатическим образом отслеживают изменения характеристик облака.

Использованный метод решения уравнения упругости позволяет провести уточнение вывода о наличии экстремальных точек, полученных при предварительном решении задачи с помощью теоремы о среднем (см. [1]). Учитывая результат (22), и формулируя условие экстремальности функции $\sigma_{\theta\theta}(r)$, т. е. условие

$$\frac{d\sigma_{\theta\theta}(r)}{dr} = 0, \tag{23}$$

можем получить соотношение, эквивалентное (23)

$$I_2(r) + \frac{\sigma}{1-\sigma}\, r^4 F(r) = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) пригодно для любой модели сил $F(r)$. Но все слагаемые этого уравнения являются неотрицательными величинами. Это означает, что единственной экстремальной точкой может служить центр фокального пятна. Мы уже отмечали, что изучение этого центра с физической точки зрения некорректно. Однако, как отмечено ранее [3], другой „опасной“ точкой является точка перегиба функции $\sigma_{\theta\theta}(r)$. Мы будем рассматривать механические напряжения именно в этой области (они несколько отличаются от формальных результатов, получающихся для $r = 0$). Возможно, что некоторое значение имеют экстремумы радиальных напряжений $\sigma_{rr}(r)$, но, скорее всего, это минимальные, а не максимальные экстремальные точки, слабо влияющие на полное механическое напряжение. Детальное исследование последнего вопроса возможно только после конкретизации модели сил $F(r)$.

Плотность объемных сил, создаваемых неравновесными электронами

В работе [1] обсуждение модели объемной плотности сил $F(r)$ по существу не проводилось. Рассмотрим этот вопрос сейчас. Можно указать два подхода к описанию этих сил.

Первый, наиболее последовательный подход, связан с получением и решением неравновесных квантовых кинетических уравнений, учитывающих все существенные для задачи эффекты. Это уравнения типа [4,5], учитывающие взаимодействие электронов с интенсивным светом и центрами рассеяния (с фононами или примесями). Уравнения типа [4,5] следует дополнить аналогичными уравнениями для других подсистем кристалла — фононной подсистемы или примесной. Перечисленные кинетические уравнения должны учитывать пространственную неоднородность всех функций распределения. Тогда можно записать интеграл столкновений типа

$$\mathbf{J}_{scatt} = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{p} \rangle, \tag{25}$$

который и определит искомую силу $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Имеющийся аппарат квантовой статистики позволяет записать выражение (25) в явном виде. Однако математическое решение задачи, позволяющей найти конкретный вид $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — это еще более сложная проблема, чем решение уравнений [4,5]. Поэтому приходится искать другой, менее строгий метод определения $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Второй подход предполагает [1], что каким-то образом уже найдено квазистационарное распределение концентрации горячих электронов $n_e = n_e(r)$ и распределение их „температур“ $T_e = T_e(r)$. Поскольку в идеальном кристалле блоховские электроны не взаимодействуют с решеткой, то нужно учесть наличие несовершеств решетки (пусть это будут равномерно распределенные по кристаллу остаточные примеси). Рассеиваясь на несовершенствах решетки, электроны будут передавать ей некоторый импульс. Этот импульс, рассчитанный для единицы объема и единицы времени, определит искомую величину $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Математическое оформление сказанного приводит нас к формуле

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{p}_r f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) w(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \tag{26}$$

где $\mathbf{p}_r$ — импульс, переданный за один квантовомеханический акт рассеяния решетки, $w(\mathbf{p})$ — вероятность рассеяния неравновесного электрона на данном несовершенстве решетки в единицу времени. Функция распределения неравновесных электронов $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ считается нормированной на их концентрацию.

Для наших целей достаточно рассмотреть сферически симметричное распределение электронов и учесть, что импульс $\mathbf{p}_r$ передает решетке только одна треть всех электронов, движущихся в радиальном направлении. Тогда вместо (26) получаем выражение

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3}\frac{\mathbf{r}}{r}\int |\mathbf{p}| f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) w(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \tag{27}$$

Учитывая связь вероятности рассеяния с полным сечением рассеяния $\sigma_i N_i$ (здесь σ_i — сечение рассеяния электрона на одном несовершенстве решетки),

$$w(\mathbf{p}) = \frac{\sigma_i N_i}{V}\, v = \frac{\sigma_i N_i}{mV}\, p, \tag{28}$$

где N_i — полное число рассеивающих центров, V — объем кристалла, так что $N_i/V = n_i$ — концентрация центров, m — масса электрона, найдем

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{2}{3}\frac{\mathbf{r}}{r}\sigma_i n_i \int \frac{p^2}{2m} f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\mathbf{p}. \tag{29}$$

Мы учли, что сечение σ_i слабо зависит от импульса электрона.

Интеграл в (29) представляет собой среднюю кинетическую энергию электрона

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{3}{2} T_e(r) n_e(r) \tag{30}$$

(напомним, что „температура“ T_e измеряется в энергетических единицах).

С учетом проведенных преобразований формула для радиальной составляющей объемной плотности сил (других составляющих нет) принимает окончательный вид

$$F(r) = \sigma_i n_i n_e(r) T_e(r). \tag{31}$$

Именно такая плотность сил была использована в работе [1], хотя там эта величина вводилась несколько иначе — через эффективное давление электронного газа на несовершенства решетки с сечением рассеяния σ_i.

Оценки и выводы

Для проведения оценок и выяснения вопроса, действительно ли механические напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ могут вызвать разрушение образца в условиях воздействия сфокусированного лазерного излучения, возьмем набор параметров, использовавшийся в [1], и рассмотрим естественный критерий разрушения $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{\max}$ (где $\sigma_{\max}$ — предельно допустимое напряжение растяжения). Будем считать [1], что

$$n_e(r) = n_{e0} \exp\left\{-\frac{r^2}{a^2}\right\} \tag{32}$$

и

$$T_e(r) = T_{e0} \exp\left\{-\frac{r^2}{a^2}\right\}, \tag{33}$$

где n_{e0} и T_{e0} — значения, характерные для центра фокального пятна, величина a — параметр гауссовского распределения интенсивности лазерного излучения по фокальному пятну.

Учитывая в формуле (22) выражения (32) и (33) и вводя величину $b = a/\sqrt{2}$, найдем

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{Bb}{6(1-\sigma)} \left\{ \sqrt{\pi}(1-\sigma)\left[1 - \Phi\left(\frac{r}{b}\right)\right] + \frac{b^3}{r^3}(1-\sigma)\left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right) \exp\left\{-\frac{r^2}{b^2}\right\}\right]\right\}. \tag{34}$$

В рамках использованной модели результат (34) получен без каких-либо дополнительных математических приближений и в этом смысле является точным.

Оценим величину тангенциального механического напряжения (34), используя тот же набор параметров, что и ранее [1], т.е. беря $\sigma_i = 10^{-14}\,\mathrm{cm}^2$, $n_i - 10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $\sigma = 0.25$, $n_{e0} = 3 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $T_{e0} = 0.5eV = 8 \cdot 10 - 13\,\mathrm{erg}$, $a = 0.1\,\mathrm{c}$. Тогда в точке перегиба $r_0 = 0.8a$, $\sigma_{\theta\theta} \approx 1.1 \cdot 10^9\,\mathrm{din/cm}^2$, что примерно на 60% больше, чем в [1]. Учитывая, как сильно отличаются использованные методы расчетов, следует считать такое соответствие результатов вполне удовлетворительным.

Найденная величина превышает типичные предельно допустимое значение напряжения растяжения. Поэтому можно считать, что предложенный механизм действительно является возможной причиной оптического разрушения чистых прозрачных диэлектриков.

Итак, в данной работе приходим к следующим выводам.

1. Сформулирована и математически точно решена задача о возникновении упругих напряжений в сферически симметричной фокальной области чистого прозрачного диэлектрика, на который воздействует интенсивное лазерное излучение.

2. Уточнена и дополнена схема построения модели объемной плотности сил, действующих на кристаллическую решетку со стороны пространственно неоднородного ансамбля неравновесных электронов, нагретых лазерным излучением до высоких „температур“. Эти силы никак не связаны с нагревом решетки или с возникновением в решетке тепловых напряжений.

3. С достаточной точностью подтверждены предварительные оценки, сделанные в работе [1], которые показывают, что предложенный механизм разрушения действительно обеспечивает оптическое разрушение прозрачных диэлектриков.

4. Подтверждена правомочность использования „естественного“ критерия оптического разрушения, имеющего вид $\sigma_{\theta\theta} \geq \sigma_{\max}$.

5. Остались неизученными вопросы о роли рассеяния электронов на фононах, а также на поверхности образца. Важным представляется вопрос о решении задачи в цилиндрической системе координат и сопоставлении полученных результатов с данными специальных экспериментов по фокусированию излучения коротко- и длиннофокусными линзами.

6. Замечено, что рассмотренный механизм является безынерционным. Объемные силы $F(r)$ появляются одновременно с генерацией электронного облака, и потому можно ожидать, что данный механизм разрушения будет работать и при воздействии лазерных импульсов фемтосекундного диапазона длительностей.

Список литературы

[1] *Стрекалов В.Н.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 24. С. 19.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теория упругости. М.: Наука, 1965. С. 202.

[3] *Стрекалов В.Н.* Автореф. канд. дис. Долгопрудный: МФТИ, 1975; Тр. МФТИ. РиЭ. 1975. Вып. 9. С. 3.

[4] *Эпштейн Э.М.* // ФТТ. 1969. Т. 11. С. 2732.

[5] *Стрекалов В.Н.* // ФТТ. 1973. Т. 15. С. 1373.