

01;03

## Равновесная форма и устойчивость заряженной капли, обдуваемой потоком газа в электростатическом поле

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 12 ноября 2001 г.)

На основе анализа условия баланса давлений на поверхности заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, движущейся вдоль однородного электростатического поля, найдено, что в линейном по амплитуде деформации приближении ее равновесная форма в зависимости от величины заряда, напряженности поля и скорости движения может быть как вытянутым, так и сплюснутым сфероидом. Получено аналитическое выражение критических условий реализации неустойчивости поверхности такой капли в виде функциональной зависимости между зарядом, напряженностью поля и скоростью движения капли. Найденный критерий неустойчивости при экстраполяции на большие значения числа Рейнольдса позволяет согласовать величины зарядов капель, напряженностей электростатического поля и скоростей движения капель относительно среды, фиксируемые в грозовых облаках, с ранее предлагавшейся моделью инициирования разряда молнии с коронного разряда в окрестности крупных заряженных водяных капель или градин.

1. Явление неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному или индуцированному заряду представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, технологии и научном приборостроении (см., например, [1,2] и указанную там литературу). Но большая часть исследований по этому вопросу связана с интересом к элементарным процессам внутри грозового облака. Так, согласно существующим качественным представлениям, зарождение разряда линейной молнии связано с зажиганием коронного разряда в окрестности крупной капли или обводненной градины (с реализацией неустойчивости заряженной поверхности капли воды) [3,4]. Тем не менее такие представления не находят подтверждения в натурных измерениях в грозовых облаках. Максимальные величины измеряемых собственных зарядов капель и внутриоблачных электрических полей много меньше [5] необходимых для реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному и индуцированному зарядам [6]. По всей видимости, при построении физической модели инициирования разряда молнии упускается какой-то важный фактор, например аэродинамическое давление в окрестности падающей капли, которое, согласно [7,8], приводит к снижению критических условий реализации неустойчивости свободной поверхности капли. Важным представляется и вопрос о равновесной форме заряженной капли, движущейся во внешнем электростатическом поле, поскольку аналитическое исследование устойчивости поверхности капли без знания ее формы нереально.

2. В связи со сказанным найдем равновесную форму капли идеальной несжимаемой жидкости с зарядом  $Q$ , обдуваемой ламинарным потоком газа плотностью  $\rho$  и скоростью  $U$ , направленным коллинеарно внешнему однородному электростатическому полю:  $U E_0$ . Примем,

что скорость потока  $U$  много меньше скорости звука в газе и будем моделировать газ идеальной несжимаемой жидкостью.

Сферическая форма и радиус  $R$  изолированной капли идеальной несжимаемой жидкости при  $Q = 0$ ,  $E_0 = 0$ ,  $U = 0$  легко находятся из условия баланса давлений на ее поверхности

$$\frac{2\sigma}{R} = \Delta p,$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\Delta p$  — перепад постоянных давлений в капле и среде.

Пусть теперь  $Q \neq 0$ ,  $E_0 \neq 0$ ,  $U \neq 0$ . Тогда равновесная форма капли будет уже несферической. Новую равновесную форму капли представим в виде

$$r(\Theta) = R + h(\Theta) \equiv R + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu). \quad (1)$$

Здесь  $P_n(\mu)$  — полиномы Лежандра  $n$ -го порядка,  $a_n$  — амплитуды отдельных мод,  $\mu \equiv \cos(\Theta)$ ,  $h(\Theta)$  — виртуальное искажение сферической поверхности капли. Будем искать возмущение сферической поверхности  $h(\Theta)$  (амплитуды возмущенных мод  $a_n$ ) опять же из условия баланса давлений на равновесной поверхности капли

$$p_\sigma = \Delta p + p_E + p_U, \quad (2)$$

определяя слагаемые, стоящие в правой части (2), на исходной сферической поверхности, а лапласовское давление  $p_\sigma$ , стоящее в левой части (2), на виртуально возмущенной сферической поверхности. Согласно сказанному,  $p_E$  — электростатическое давление поля собственного и поляризационного зарядов на поверхность сферической капли,  $p_\sigma$  — аэродинамическое давление на поверхность сферической капли со стороны обдувающего ее ламинарного потока газа.

Будем искать амплитуды мод  $a_n$ , которые возбуждятся в результате взаимодействия виртуального возмущения  $h(\Theta)$  с электрическим и аэродинамическим полями в окрестности электропроводной сферической капли. Для этого отметим, что [9,10]

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} [2 - n(n+1)] a_n P_n(\mu), \quad (3)$$

$$p_E = \frac{1}{8\pi} \left\{ 9E_0^2 \left[ \frac{1}{3} P_0(\mu) + \frac{2}{3} P_2(\mu) \right] + 6E_0 \frac{Q}{R^2} P_1(\mu) + \frac{Q^2}{R^4} P_0(\mu) \right\}, \quad (4)$$

$$p_U = \frac{9}{8} \rho U^2 \left[ \frac{2}{3} P_0(\mu) - \frac{2}{3} P_2(\mu) \right]. \quad (5)$$

Подставляя (3)–(5) в (2) и, приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра разного порядка, найдем амплитуды возбужденных мод. Несложно видеть из (4), (5), что могут возбудиться лишь три первые моды:  $\sim P_0(\mu)$ ,  $\sim P_1(\mu)$  и  $\sim P_2(\mu)$ . Мода  $\sim P_1(\mu)$  соответствует трансляционному движению капли и на ее форме не сказывается. Моды  $\sim P_0(\mu)$  и  $\sim P_2(\mu)$  легко рассчитываются, но в амплитуду моды  $\sim P_0(\mu)$  входит неизвестный перепад постоянных давлений  $\Delta p$ , и поэтому  $a_0$  удобнее рассчитать через  $a_2$ , используя условие постоянства объема капли несжимаемой жидкости. Для  $a_2$  получится соотношение

$$\frac{a_2}{R} = \frac{1}{3} \left( \frac{9}{16\pi} w - \frac{9}{16} We \right),$$

$$w \equiv E_0^2 R \sigma^{-1}, \quad We \equiv \rho U^2 R \sigma^{-1}. \quad (6)$$

Выражение для амплитуды  $a_0$ , рассчитанное из условия постоянства объема, оказывается квадратичным по безразмерной амплитуде основной моды ( $n = 2$ ):  $(a_0/R) \sim (a_2/R)^2$  и при расчетах в линейном по амплитуде деформации приближении учитываться не должно.

Итак, в линейном по амплитуде деформации приближении приращение получает лишь основная мода, что при  $(w/\pi) > We$  соответствует деформации капли к вытянутому сфероиду [6,9], а при  $(w/\pi) < We$  — к сплюснутому. Поскольку в настоящем рассмотрении наибольший интерес представляет анализ поведения достаточно мелких (с малыми значениями  $We$ ) заряженных капель в сильных (с большими  $w$ ) электрических полях грозových облаков, то дальнейшие рассуждения ограничим случаем  $(w/\pi) > We$ . В связи со сказанным в следующем приближении следует потребовать выполнения условия баланса давлений (2) на поверхности вытянутого сфероида.

3. Примем, что в начальный момент времени  $U = 0$ , а заряд  $Q$  и поле  $E_0$  от нуля отличны. Согласно [6], в линейном по амплитуде отклонения поверхности такой капли от сферы ее форма является вытянутой

сфероидальной с эксцентриситетом  $e$ , определяемым соотношением

$$e^2 = \frac{9}{16\pi} \frac{w}{1-W}, \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}. \quad (7)$$

Параметр  $W$  характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду и его критическое значение, при достижении которого капля становится неустойчивой, равно единице [11]. Будем теперь увеличивать скорость обдувающего каплю вдоль оси ее симметрии потока газа  $U$  и посмотрим, как скажется наличие аэродинамического обдувания ламинарным потоком на исходной сфероидальной форме капли, требуя выполнения условия баланса давлений типа (2) на поверхности вытянутого сфероида, определяемой соотношением

$$\eta(\Theta) = \frac{r(\Theta)}{a} = (1 - e^2)^{1/2} (1 - e^2 \cos^2 \Theta)^{-1/2},$$

$$e^2 = 1 - b^2/a^2,$$

$$r(\Theta) = R \left[ P_0(\mu) + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + O(e^4) \right], \quad e^2 \ll 1, \quad (8)$$

$b = R(1 - e^2)^{1/6}$  и  $a = R(1 - e^2)^{-1/3}$  — меньшая и большая полуоси сфероида, угол  $\Theta$  отсчитывается от  $\mathbf{E}_0$  (или, что то же самое, от  $\mathbf{U}$ ).

Уравнение искомой равновесной поверхности в отличие от (1) будем искать в виде

$$r(\Theta) = r(\Theta) + h(\Theta) \equiv r(\Theta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu). \quad (9)$$

Уравнение баланса давлений перепишем в виде

$$p_\sigma^s + \delta p_\sigma^s = \Delta p^s + p_E^s + p_U^s, \quad (10)$$

$p_\sigma^s$  и  $p_E^s$  — лапласовское и электростатическое давления под сфероидальной поверхностью, имеющие в линейном по  $e^2$  приближении вид [6]

$$p_\sigma^s = \frac{2\sigma}{R} \left[ 1 + e^2 \frac{2}{3} P_2(\mu) + O(e^4) \right],$$

$$p_E^s = \frac{1}{\varepsilon\pi} \left\{ 9E_0^2 \left[ \frac{1}{3} P_0(\mu) + \left( \frac{2}{3} + \frac{12}{35} e^2 \right) P_2(\mu) + \frac{16}{35} e^2 P_4(\mu) \right] + 6E_0 \frac{Q}{R^2} \left[ \left( 1 + \frac{2}{15} e^2 \right) P_1(\mu) + \frac{3}{5} e^2 P_3(\mu) \right] + \frac{Q^2}{R^4} \left[ P_0(\mu) + \frac{2}{3} e^2 P_2(\mu) \right] + O(e^4) \right\}.$$

Добавка  $\delta p_\sigma^s$  к лапласовскому давлению, связанная с виртуальной деформацией  $h(\Theta)$  поверхности сфероидальной капли, в линейном же по  $e^2$  приближении может

быть записана в форме [6]

$$\begin{aligned} \delta p_\sigma^s = & -\frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [4 + n(n+1)] \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} e^2 P_{n+2}(\mu) \right. \\ & + \left[ 2 \left( 1 - \frac{2}{3} e^2 \right) - \left( 1 + \frac{e^2}{3} \right) n(n+1) \right] P_n(\mu) \\ & + e^2 [4 + n(n+1)] \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2}(\mu) \\ & \left. + e^2 [4 + n(n+1)] \frac{[2n(n+1) - 1]}{(2n-1)(2n+3)} P_n(\mu) + O(e^4) \right\} a_n. \end{aligned}$$

Выражение для аэродинамического давления на поверхность вытянутого вдоль направления скорости сфероида со стороны обдувающего его ламинарного потока идеальной жидкости, согласно Приложению (формула (18)), легко выписывается в линейном по  $e^2$  приближении

$$\begin{aligned} p_U^s = & \frac{9}{8} \rho U^2 \left\{ \frac{2}{3} P_0(\mu) - \left( \frac{2}{3} - \frac{16}{35} e^2 \right) P_2(\mu) \right. \\ & \left. - \frac{16}{35} e^2 P_4(\mu) + O(e^4) \right\}. \end{aligned}$$

В выражении (10) сумма слагаемых  $p_\sigma^s$ ,  $\Delta p^s$  и  $p_E^s$  обращается в нуль на исходной сфероидальной поверхности с эксцентриситетом  $e^2$ . В итоге останется

$$\delta p_\sigma^s = p_U^s.$$

Подставим в это равенство вышевыписанные выражения для  $\delta p_\sigma^s$  и  $p_U^s$  и найдем добавки к амплитудам мод, которые установятся в результате взаимодействия аэродинамического давления и виртуальной добавки к лапласовскому давлению. Получим, что в линейном по  $e^2$  приближении от нуля отлична лишь добавка к основной моде

$$\frac{a_2}{R} = -\frac{3}{16} We,$$

что соответствует уменьшению квадрата эксцентриситета вытянутого сфероида на  $\delta e^2 = 9We/16$  [6]. Таким образом, влияние аэродинамического обтекания вытянутой сфероидальной капли ламинарным потоком вдоль оси симметрии сводится в линейном по квадрату эксцентриситета  $e^2$  приближении лишь к уменьшению квадрата эксцентриситета до

$$e_*^2 = e^2 - \frac{9}{16} We \equiv \frac{9}{16\pi} \frac{w}{1-W} - \frac{9}{16} We. \quad (11)$$

Из (11) видно, что в пространстве параметров  $W$ ,  $w$ ,  $We$  существует функционально связанное геометрическое место точек, образующих поверхность, на которых форма капли сферическая при  $W = 0$ ,  $w = 0$  и  $We = 0$ .

4. Зададимся вопросом об устойчивости заряженной капли, обдуваемой ламинарным потоком, в однородном

электростатическом поле. Согласно [12,13], неустойчивость капли по отношению к собственному или поляризованному заряду начинается с неустойчивости основной моды ( $n = 2$ ) и генерируется ею: неустойчивость мод, более высоких, чем основная ( $n > 2$ ), реализуется последовательно с ростом номера на фоне увеличивающейся амплитуды основной моды за счет увеличения поверхностной плотности заряда на вершинах вытягиваемой капли. В этой связи исследуем устойчивость сфероидальной капли с эксцентриситетом, определяемым соотношением (11), по отношению к виртуальному увеличению амплитуды основной моды вида  $\kappa_0 P_2(\mu)$  (здесь  $P_2(\mu)$  — полином Лежандра,  $\mu \equiv \cos(\Theta)$ ). Такое возмущение амплитуды основной моды в линейном приближении соответствует приращению квадрата эксцентриситета на  $\delta e^2$

$$\delta e^2 = \frac{3\kappa_0}{R} \left( 1 - \frac{7}{6} e^2 \right),$$

что приводит к приращениям давлений  $p_E^s$  и  $p_U^s$  на  $\delta p_E^s$  и  $\delta p_U^s$  соответственно [6,10]

$$\begin{aligned} \delta p_E^s = & \frac{9}{4\pi} \frac{\kappa_0}{R} \left\{ E_0^2 \left[ \frac{237}{175} e^2 P_0(\mu) + \frac{18}{35} \left( 1 + \frac{553}{90} e^2 \right) P_2(\mu) \right. \right. \\ & + \frac{24}{35} \left( 1 + \frac{1663}{880} e^2 \right) P_4(\mu) + \frac{66}{77} e^2 P_6(\mu) \left. \right] \\ & + \frac{Q^2}{R^4} \left[ \frac{8}{135} e^2 P_0(\mu) + \frac{1}{9} \left( 1 + \frac{67}{42} e^2 \right) P_2(\mu) \right. \\ & + \frac{16}{105} e^2 P_4(\mu) \left. \right] + \frac{QE_0}{R^2} \left[ \frac{2}{15} \left( 1 - \frac{193}{210} e^2 \right) P_1(\mu) \right. \\ & \left. + \frac{3}{5} \left( 1 + \frac{421}{270} e^2 \right) P_3(\mu) + \frac{43}{63} e^2 P_6(\mu) \right] + O(e^4) \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta p_U^s = & \frac{27}{4} \rho U^2 \frac{\kappa_0}{R} \left\{ -\frac{8}{175} e^2 P_0(\mu) \right. \\ & + \frac{8}{35} \left( 1 - \frac{1}{10} e^2 \right) P_2(\mu) - \frac{8}{35} \left( 1 - \frac{315}{154} e^2 \right) P_4(\mu) \\ & \left. - \frac{64}{231} e^2 P_6(\mu) + O(e^4) \right\}. \end{aligned}$$

Эти соотношения соответствуют  $\sim \delta e^2$  членам разложения выражений для  $p_E^s$  и  $p_U^s$  в ряд Тейлора.

В результате взаимодействия виртуального возмущения формы поверхности капли вида  $\kappa_0 P_2(\mu)$  с электрическими, аэродинамическими и лапласовскими силами форма капли может измениться, если исходная сфероидальная форма соответствовала передельной в смысле устойчивости по отношению к возможным деформациям. Форму новой поверхности капли будем искать из условия баланса давлений [6]

$$p_\sigma^s + \delta p_\sigma^s = \Delta p^s + p_E^s + \delta p_E^s + p_U^s + \delta p_U^s. \quad (12)$$

Учтем, что исходная сфероидальная форма капли удовлетворяет уравнению (10) с эксцентриситетом, определяемым соотношением (11), и из (12) получим соотношение между добавками к давлениям

$$\delta p_{\sigma}^s = \delta p_E^s + \delta p_U^s.$$

Подставим в это соотношение вышеприведенные выражения  $\delta p_{\sigma}^s$ ,  $\delta p_E^s$ ,  $\delta p_U^s$  и, приравняв коэффициенты при равных полиномах Лежандра, найдем выражение для добавки к амплитуде основной моды

$$\frac{a_2}{R} = \frac{\kappa_0}{R} \left\{ \frac{27}{70} We \left( 1 + \frac{79}{210} e^2 \right) + W \left( 1 + \frac{87}{42} e^2 \right) + w \frac{81}{280\pi} \left( 1 + \frac{4171}{630} e^2 \right) \right\}. \quad (13)$$

Несложно видеть, что если выражение, стоящее в (13) в фигурных скобках, меньше единицы, то виртуальное возмущение будет уменьшаться со временем. Это очевидно из следующих соображений. Примем полученное выражение для добавки к основной моде за начальное виртуальное возмущение  $\kappa_1$  и повторим расчеты с начала. Новая добавка к амплитуде основной моды будет, согласно (13), уже меньше  $\kappa_1$ , т.е. возмущение будет уменьшаться. Если же выражение, стоящее в (13) в фигурных скобках, будет больше единицы, то добавка к амплитуде основной моды будет нарастать со временем, т.е. основная мода, а с ней и все остальные более высокие моды будут неустойчивыми и капля претерпит неустойчивость по схеме, описанной в [14,15].

В итоге критические условия неустойчивости заряженной капли в однородном электростатическом поле и ламинарно ее обдуваемом потоке газа имеют вид

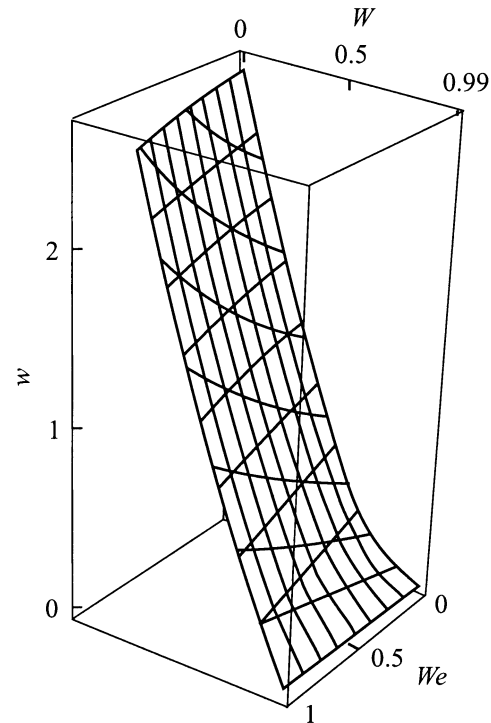
$$\frac{27}{70} We \left( 1 + \frac{79}{210} e^2 \right) + W \left( 1 + \frac{87}{42} e^2 \right) + w \frac{81}{280\pi} \left( 1 + \frac{4171}{630} e^2 \right) > 1. \quad (14)$$

При  $U = 0$  это условие сводится к условию неустойчивости заряженной капли в однородном электростатическом поле [6].

На рисунке в пространстве переменных  $We$ ,  $W$ ,  $w$  приведена поверхность, определяемая соотношениями (11), (14), разделяющая устойчивые (ниже рассчитанной поверхности) и неустойчивые (выше рассчитанной поверхности) состояния заряженных капель, ламинарно обтекаемых потоком идеальной жидкости, параллельным электростатическому полю.

5. Проверим возможность выполнения критерия (14) на основе максимальных значений зарядов капель и напряженностей электрического поля, регистрируемых в грозовых облаках.

Пусть капля имеет радиус  $R = 100 \mu\text{m}$ , тогда скорость ее падения в облаке  $U = 72 \text{ cm/s}$ , а число Рейнольдса  $Re = 9.61$  [16]. Режим обтекания воздухом такой капли



можно принимать ламинарным, и все вышеполученные результаты для нее (а также для капель меньших радиусов) применимы без всяких скидок. Собственный электрический заряд такой капли мал [5]  $Q \leq 3 \cdot 10^{-12} \text{ C}$ , и, следовательно, невелик параметр  $W$ . Малыми будут также параметры  $We$  (в силу малости скорости обтекания) и  $w$  (в силу малости радиуса капли). В итоге критерий (14) не выполнится, а значит, такая капля и все более мелкие будут устойчивы по отношению к электростатическим и аэродинамическим силам.

Проведем оценку для облачной капли с радиусом  $R = 1 \text{ mm}$ . Согласно данным наблюдений [5], ее заряд может достигать величины  $Q = 2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ . Максимальное значение измеренной напряженности электростатического поля в грозовом облаке  $E = 2000 \text{ kV/m}$  [5], но для нижеследующих оценок возьмем существенно меньшее значение  $E = 1200 \text{ kV/m}$ . Капля указанного радиуса будет падать в поле тяжести с установившейся скоростью  $U = 6.49 \text{ m/s}$  [16]. Режим обтекания капли указанного радиуса воздухом определится числом Рейнольдса  $Re = 866$  [13]. Ясно, что при столь больших значениях числа Рейнольдса режим обтекания капли будет не ламинарным, а турбулентным и, следовательно, критерий (14), полученный для условий ламинарного обтекания, будет непригоден. Тем не менее выполнение или не выполнение критерия (14) может свидетельствовать о принципиальной возможности или невозможности применения использованных модельных представлений к анализу физического механизма инициирования разряда молнии. Подстановка в (11), (14) указанных значений физических параметров показывает, что критерий реализации неустойчивости капли удовлетворяется, что указывает на важную роль аэродинамического обтекания

капли при рассмотрении вопроса об устойчивости ее заряженной поверхности.

Следует отметить одну особенность поведения капли при больших значениях скорости потока, выводящих режим обтекания капли средой за рамки ламинарного. Согласно результатам аналитического расчета [8] и данным экспериментальных наблюдений формы движущихся капель [17], по мере увеличения скорости обтекающего каплю потока (увеличения числа Рейнольдса) в капле последовательно (с ростом скорости), начиная с основной моды, возбуждается в силу неустойчивости тангенциального скачка поля скоростей на границе капли колебательная неустойчивость нижних мод капиллярных осцилляций. Первой становится неустойчивой основная мода, и величина эксцентриситета капли начинает нарастать по периодическому закону, что, согласно оценкам [18], может привести к реализации неустойчивости заряженной поверхности капли, даже если критерий [14] не выполняется.

6. Соотношения (11) и (14) могут быть с успехом использованы при интерпретации результатов экспериментальной проверки достоверности критерия устойчивости капли по отношению к собственному заряду, полученных для условий когда сильно заряженная капля подвешивается в электростатическом поле при наличии параллельного полю аэродинамического потока [19]. Так, в [19] проводили эксперименты с каплями малых радиусов  $R \leq 100 \mu\text{m}$  при значениях  $Re \leq 6$ , когда заряд капли был близок к пределу устойчивости по отношению к собственному заряду ( $W \approx 1$ ). Большая погрешность результатов эксперимента, проявившаяся в существенном (на 17%) отклонении от критерия неустойчивости сферической капли электропроводной идеальной несжимаемой жидкости по отношению к собственному заряду, полученному Рэлеем [11]  $W = 1$ , связана с тем, что при обработке результатов эксперимента не учитывались сфероидальное отклонение формы капли от сферической в соответствии с (11), а также влияние электростатического поля и аэродинамических сил на критерий устойчивости согласно (14).

7. Представляет интерес рассмотрение ситуации, когда напряженность внешнего электростатического поля  $E_0$  и скорость  $U$  ориентированы перпендикулярно друг другу. Такая ситуация реальна для грозовых облаков и часто используется в экспериментах [20–21], где заряженная капля падает в поле сил тяжести перпендикулярно направлению электрического поля между обкладками плоского конденсатора.

Принимая, что влияние электрического поля на форму капли превышает влияние аэродинамических сил и капля имеет приблизительно сфероидальную форму (см. результаты экспериментов [20–21]), получим задачу об обтекании вытянутого сфероида, сориентированного осью симметрии вдоль оси  $OY$  (вдоль внешнего электростатического поля), перпендикулярной направлению потока жидкости, направленного вдоль оси  $OX$  (противоположно направлению ускорения свободного

падения). Используя известное [10,22] решение для потенциального обтекания произвольно ориентированного по отношению к потоку эллипсоида, можно найти потенциал поля скоростей  $\varphi(\mathbf{r})$  в окрестности сфероида. В отличие от выше рассмотренного случая осесимметричного обтекания сфероида теперь задача не будет обладать осевой симметрией и появится зависимость от азимутального угла, что существенно усложняет анализ по вышеиспользованной схеме, поскольку теперь аэродинамическое давление (а с ним и лапласовское) необходимо раскладывать в ряд по сферическим функциям, учитывая зависимость от азимутального угла, а не по полиномам Лежандра. Кроме того, асимптотические разложения придется проводить по двум независимым параметрам, характеризующим деформации капли в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Но из общефизических соображений очевидно, что равновесная форма капли в описанных условиях будет уже эллипсоидальной с тремя различными осями, а влияние ламинарного поперечного обтекания капли потоком газа проявится в основном в поперечном потоке и внешнему электрическому полю вытягивании капли вдоль оси  $OZ$ . Влияние потока газа на устойчивость капли по отношению к собственному и индуцированному электрическим зарядам в рассматриваемой ситуации не столь очевидно. Ясно лишь, что и сам факт обтекания капли потоком с наличием тангенциального скачка поля скоростей на поверхности капли, и деформация ее к трехосному сфероиду ведут к снижению ее устойчивости [7–8,23].

8. В заключение отметим, что аэродинамическое давление на поверхность вытянутой сфероидальной заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, движущейся относительно ламинарно ее обтекающей идеальной сжимаемой среды во внешнем электростатическом поле, параллельном вектору скорости капли, приводит к уменьшению эксцентриситета капли и способствует вследствие наличия тангенциального скачка поля скоростей на поверхности капли реализации ее неустойчивости. Таким образом, имеются основания для возобновления попыток построения физической модели инициирования разряда молнии.

Применимость проведенных рассуждений ограничена условием ламинарного обтекания капли газом и, следовательно, выполненные расчеты справедливы в условиях грозового облака для капель с  $R \leq 100 \mu\text{m}$ . Указанному диапазону размеров капель удовлетворяет подавляющее их количество в облаке, поскольку, согласно [13], основная масса облачной воды содержится в каплях радиусом от  $3 \div 4 \mu\text{m}$  до  $20 \div 30 \mu\text{m}$ .

## Приложение

Расчет аэродинамического давления на поверхность сфероида в потоке ламинарно обтекающего газа.

Пусть сфероид, равновеликий по объему сфере радиуса  $R$ , сориентирован осью симметрии вдоль оси  $OX$ , совпадающей по направлению с потоком идеальной

несжимаемой жидкости (газа) плотностью  $\rho$ , ламинарно обтекающей сфероид со скоростью  $U$ . Решение задачи о потенциальном обтекании жесткого эллипсоида ламинарным потоком идеальной несжимаемой жидкости можно найти в [10,22]. Используя полученные в этих источниках результаты для эллипсоида, выпишем выражение для потенциала скоростей  $\varphi(\mathbf{r})$  в окрестности сфероида

$$\varphi(\mathbf{r}) = -Ux \left( 1 + \frac{C(\xi)}{2 - C_0} \right),$$

$$C(\mathbf{r}) = \frac{2b^2a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \int_v^\infty \frac{dv}{(v^2 - 1)v^2}$$

$$\equiv \frac{2(1 - e^2)}{e^3} \left( \operatorname{arth} \frac{1}{v} - \frac{1}{v} \right),$$

$$v \equiv \left( \frac{a^2 + \xi}{a^2 - b^2} \right), \quad C_0 \equiv \frac{2(1 - e^2)}{e^3} (\operatorname{arth} e - e), \quad (15)$$

$\xi$  — сфероидальная координата, являющаяся положительным корнем  $\lambda \equiv \xi$  уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\rho^2}{b^2 + \lambda} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \quad (16)$$

определяет семейство софокусных сфероидов. Поверхность обтекаемого сфероида определяется соотношением  $\xi = 0$ . Уравнение (16) квадратично по  $\lambda$  и второй его корень  $\lambda \equiv \xi$ , лежащий в диапазоне  $-b^2 \geq \xi \geq -a^2$ , дает вторую сфероидальную координату, определяющую семейство двуполостных гиперболоидов, ортогональных к семейству сфероидов, определяемых координатой  $\xi$ . Орт  $\mathbf{n}_\xi$  перпендикулярен к поверхности сфероида, а орт  $\mathbf{n}_\xi$  касателен к ней.

Чтобы найти давление потока идеальной жидкости на поверхность сфероида, достаточно рассчитать касательную к сфероиду компоненту поля скоростей обтекающего потока  $V_\xi$ , поскольку нормальная компонента поля скоростей идеальной жидкости  $V_\xi$  на поверхности сфероида обращается в нуль.

Найдем касательную к поверхности сфероида компоненту поля скоростей  $V_\xi$ , беря от потенциала (15) производную по направлению  $\mathbf{n}_\xi$  и учитывая независимость сфероидальных координат  $\xi$  и  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} V_\xi &= -U \left( 1 + \frac{C(\xi)}{2 - C_0} \right) \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial x(\xi, \xi)}{\partial z} \Big|_{\xi=0} \\ &\equiv -\frac{U}{e} \left( 1 + \frac{C_0}{2 - C_0} \right) \left( \frac{\xi + a^2}{\xi} \right)^{1/2} \\ &\equiv -U \left( 1 + \frac{C_0}{2 - C_0} \right) \frac{\sin \Theta}{\sqrt{1 - (2 - e^2)e^2 \cos^2 \Theta}}, \quad (17) \end{aligned}$$

$e$  — эксцентриситет сфероида,  $h_\xi$  — коэффициент Ламэ координаты  $\xi$  [24]

$$h_\xi \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{(\xi + b^2)(\xi - \xi)}{(\xi + a^2)} \right)^{1/2}.$$

При выводе соотношения (17) было учтено, что [24]

$$\begin{aligned} x &= \mp \left( \frac{(\xi + a^2)(\xi + a^2)}{(a^2 - b^2)} \right)^{1/2}, \\ \rho &= \left( \frac{(\xi + b^2)(\xi + b^2)}{(b^2 - a^2)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а на сфероидальной поверхности при  $\xi = 0$  выполняется соотношение

$$\xi = r(\Theta) - a^2(2 - e^2),$$

где  $r(\Theta)$  определено выражением (8).

Аэродинамическое давление на поверхность сфероида с точностью до слагаемых  $\sim e^4$  определится соотношением

$$\begin{aligned} p_U^s &= \frac{1}{2} \rho V_\xi^2 = \frac{9}{8} \rho U^2 \left\{ \frac{2}{3} (P_0(\mu) - P_2(\mu)) \right. \\ &+ e^2 \frac{16}{35} (P_2(\mu) - P_4(\mu)) + e^4 \left( -\frac{8}{175} P_0(\mu) + \frac{128}{525} P_2(\mu) \right. \\ &\left. \left. + \frac{212}{1155} P_4(\mu) - \frac{64}{231} P_2(\mu) + O(e^6) \right) \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

Выражение (18) выписано с точностью  $\sim e^4$  из соображений удобства расчета добавки к давлению  $\delta p_U^s$  при исследовании устойчивости капли в разделе 4 согласно соотношению  $\delta p_U^s \approx (\partial p_U^s / \partial e^2) \delta e^2$ .

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.
- [3] Дячук В.А., Мучник В.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [4] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [5] Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [7] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.
- [8] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 26–34.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1863–1866.
- [10] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
- [11] Rayleigh Lord (J.V. Strett) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [12] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [13] Григорьев А.И., Синкевич О.А. Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [14] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.

- [15] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 12. С. 26–30.
- [16] *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 160 с.
- [17] *Гонор А.Л., Ривкинд В.Я.* // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 17. С. 86–159.
- [18] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.
- [19] *Rouilleau M., Desbois M.* // J. Atm. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
- [20] *Matthews T.B.* // J. Geophys. Res. 1967. Vol. 72. P. 3007–3013.
- [21] *Ausman E.L., Brook M.* // J. Geophys. Res. 1967. Vol. 72. P. 6131–6141.
- [22] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [23] *Григорьев А.И., Щукин С.И.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 48–51.
- [24] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.