

01;05

Сравнение различных методов расчета энергий пиннинга плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 4 декабря 2001 г.)

Проведен расчет энергий пиннинга плоских (ламинарных) вихрей в трехмерной джозефсоновской среде, основанный на модели непрерывного вихря для двух видов функции $V(\varphi)$: $V = 1 - \cos \varphi$ и $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$.

Предложен алгоритм точного численного решения системы разностных уравнений для нахождения формы и энергии вихря в его устойчивом и неустойчивом состояниях. Значения магнитной и джозефсоновской энергий вихря оказываются различными. Магнитная и джозефсоновская компоненты энергии пиннинга близки по величине и имеют разные знаки, так что суммарная энергия пиннинга на порядок меньше ее составляющих. Проведен теоретический анализ, подтвердивший эти закономерности.

Предложен метод аналитического расчета в модели непрерывного вихря, сохраняющий разностные члены в выражении для энергии. При расчете по этому методу магнитная энергия отличается по величине от джозефсоновской энергии, а магнитная компонента энергии пиннинга противоположна по знаку джозефсоновской.

Проведен сравнительный анализ возможностей расчета энергий на основе приближенных подходов в модели непрерывного вихря при сохранении разностных членов и их замене на производные, показавший, что модель непрерывного вихря не дает правильных значений джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга. Точные значения этих величин в десятки и сотни раз больше значений, полученных на базе модели непрерывного вихря. Несмотря на это, вследствие различия знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга точные значения суммарной энергии пиннинга несущественно отличаются от результатов применения модели непрерывного вихря.

Введение

Исследования высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), проведенные в последние годы, показали, что очень важную роль в происходящих процессах играют возникающие в образце вихревые структуры. В частности, пиннингом и взаимодействием вихрей друг с другом определяются процессы, происходящие при помещении образца ВТСП во внешнее магнитное поле. Движение вихрей ведет к неджоулевому выделению энергии в образце. Решение принципиальной для физики и техники проблемы повышения величин критических токов и полей требует понимания деталей поведения вихрей, их строения, взаимодействия, механизмов и величины возможного пиннинга.

В работе [1] рассмотрены плоские (ламинарные) вихри в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде, представляющей собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт. Энергия токовой конфигурации рассматриваемого типа на l m длины определяется выражением

$$E = \varepsilon_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 + I(1 - \cos \varphi_k) \right], \quad (1)$$

где φ_k — скачки фазы на контактах, I — так называемый параметр пиннинга, ε_0 — нормировочная константа. Далее везде считаем энергию, выраженными в единицах ε_0 .

Первый член в (1) описывает магнитную энергию вихря, а второй — энергию джозефсоновских контактов.

Равновесные состояния вихря, соответствующие экстремуму его энергии, описываются следующей системой разностных уравнений, получаемых из условия $\frac{\partial E}{\partial \varphi_m} = 0$:

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m. \quad (2)$$

Система уравнений, аналогичная (2), описывает также вихри в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте [2,3].

Нелинейная система (2) описывает поведение одного из типов солитонов, что определило большой интерес к этому уравнению со стороны физиков и математиков, в результате чего было получено множество интересных результатов. Эта система была впервые получена Френкелем и Конторовой для описания поведения краевых дислокаций в кристалле [4]. Вследствие дискретности система дает возможность анализировать поведение солитонов с учетом их пиннинга, который определяется конечной величиной энергии, необходимой для смещения центра вихря из одной ячейки в другую.

Точное аналитическое решение нелинейной системы конечно-разностных уравнений (2) найти не удастся. При малых значениях параметра I ($I < 1$) распределение становится квазинепрерывным и система (2) преобразуется в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = I \sin \varphi. \quad (3)$$

Значения джозефсоновской и магнитной энергий вихря E_J и E_H , полученные из квазинепрерывного подхода при стремлении параметра I к нулю, действительно, приближаются к их точным значениям. Однако требует серьезного анализа вопрос, могут ли значения энергии пиннинга быть получены из такого приближенного рассмотрения. Дело в том, что джозефсоновская и магнитная компоненты энергии пиннинга, равные разностям соответствующих энергий при разных положениях вихря, имеют существенно больший порядок малости по I и могут находиться за пределами погрешности приближения. Как будет показано далее, компоненты энергии пиннинга пропорциональны $\exp(-1/I)$, что подтверждает обоснованность сомнений.

Целью настоящей работы является анализ возможностей применения различных приближенных подходов на базе уравнения (3) для расчета величин энергий, и сопоставление результатов, полученных в разной степени приближения, друг с другом, а также с точным решением исходной задачи.

Дискретность рассматриваемой задачи с математической точки зрения определяется тремя моментами: а) дискретность суммирования в выражении (1) для энергий; б) существование разностных членов в суммируемых выражениях, например, $(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$ в (1); в) нахождение формы вихря из системы конечно-разностных уравнений (2).

Отказ от всех трех пунктов, т.е. переход в (1) от суммы к интегралу, замена конечных разностей в (1) на производные, а системы конечно-разностных уравнений (2) — на дифференциальное уравнение (3) означал бы полный отказ от учета дискретности. В этом случае джозефсоновская и магнитная энергии E_J и E_H оказываются равны друг другу, а обе компоненты энергии пиннинга, естественно, равны нулю.

В работе [5] предложен метод расчета энергий пиннинга вихрей, учитывающий только первый из вышеприведенных пунктов (а), т.е. дискретность суммирования сохранена, но член $1/2(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$ в (1) заменен на $\frac{1}{2}(\varphi')^2$, а форма вихря ищется из дифференциального уравнения (3). В работе [3] на базе этого метода проведен расчет энергий пиннинга, соответствующих выражению (1) для энергии. Джозефсоновская и магнитная энергии E_J и E_H оказываются равными друг другу и определяются теми же выражениями, что и в непрерывном подходе, однако компоненты энергии пиннинга уже не равны нулю, но в точности равны друг другу.

В настоящей работе предлагается алгоритм точного компьютерного расчета энергий, соответствующего выполнению всех трех пунктов (а–в). Значения магнитной и джозефсоновской энергий вихря различаются. Магнитная и джозефсоновская компоненты энергии пиннинга близки по величине и имеют разные знаки, так что суммарная энергия пиннинга на порядок меньше ее составляющих. Кроме того, в настоящей работе рассматривается метод аналитического расчета, сохраняющий

первые два пункта, т.е. дискретность суммирования и разностные члены, но предполагающий нахождение формы вихря из дифференциального уравнения. Магнитная энергия E_H оказывается меньше джозефсоновской энергии E_J . Магнитная компонента энергии пиннинга противоположна по знаку джозефсоновской.

Расчет пиннинга вихрей

1. Аналитический расчет, основанный на модели непрерывного вихря, при учете дискретности суммирования и разностных членов

Пусть энергия стационарного вихря на l m его длины и высоты описывается выражением [5]

$$E = E_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 + IV(\varphi_k) \right], \quad (4)$$

где E_0 — нормировочная константа. Далее везде будем считать энергии выраженными в единицах E_0 .

Равновесные состояния вихря, соответствующие экстремуму его энергии, описываются системой уравнений в конечных разностях

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = IV'(\varphi_m). \quad (5)$$

Для нахождения энергии пиннинга вихрей при $I \ll 1$, используя в согласии с подходом, предложенным в [5], разложение δ -функций в ряд Фурье

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx), \quad (6)$$

представим выражение (4) в виде

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varphi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x+\alpha)) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) dx \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(x)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n(x-\alpha)) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где α — координата центра вихря относительно края ячейки. Например, если центр вихря находится на границе двух ячеек, то $\alpha = 0$, если же он в центре ячейки, то $\alpha = 0.5$.

Если функция $f(x)$ четная, то выражение (7) принимает вид

$$E = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n\alpha) \text{Re} \int_0^{\infty} f(\varphi(x)) \exp(i2\pi nx) dx. \quad (8)$$

В качестве $\varphi(x)$ в (8) используется решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = IV'(\varphi), \quad (9)$$

заменяющего собой дискретное уравнение (5). При граничных условиях $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2\pi$, $\varphi' \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, соответствующих уединенному вихрю, из уравнения (9) получим

$$(\varphi')^2 = 2IV(\varphi), \quad (10)$$

откуда и находится решение.

Это решение соответствует вихрю в непрерывной среде. Использование для расчета пиннинга приближенного решения, не учитывающего дискретность среды, уже является неким допущением, искажающим истинную картину, как будет показано далее. Но в [5] делается еще одно упрощение, от которого в настоящей работе предлагается отказаться. А именно, сохраняя дискретность суммирования, автор [5] предлагает в выражении (4) заменить член $1/2(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$ на $1/2(\varphi')^2$. В этом случае, как следует из (10), члены в выражении (4) равны друг другу и для расчета суммарной энергии достаточно вычислить (8) при $f = 2IV$. В настоящей работе это упрощение не делается. Сравнение с компьютерным расчетом, результаты которого приведены далее в табл. 1, 2, показывает, что это позволяет существенно повысить точность вычислений. При этом вклады в полную энергию вихря, а также в его энергию пиннинга от первого и второго членов в (4) оказываются различными.

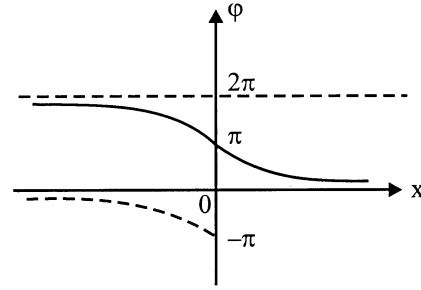
Далее будут рассмотрены два разных вида функции $V(\varphi)$: $V = 1 - \cos \varphi$ и $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$. Первый случай рассмотрен в работе [6]. Он соответствует поведению плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде [1], а также вихрей в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте [2,3]. Поэтому мы будем называть вклады в энергию от первого и второго членов в (3) соответственно магнитной и джозефсоновской энергиями.

Второй случай рассматривается, с одной стороны, как представляющий самостоятельный интерес, поскольку такой вид функции анализируется в некоторых работах. С другой стороны, представляется целесообразным проверить общность полученных результатов для разных видов функции $V(\varphi)$ и оценить влияние вида функции на значения получаемых энергий, особенно на компоненты энергии пиннинга. Функция $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$ выбрана, как приближение функции $V = 1 - \cos \varphi$ в диапазоне $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, поскольку именно в этом диапазоне изменяется φ_k в случае уединенного вихря. Обе эти функции симметричны относительно $\varphi = \pi$, имеют одинаковые корни $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ и максимумы $V = 2$ при $\varphi = \pi$. Далее будет показано, что, несмотря на схожесть функций, величины энергий вихря и, особенно энергий пиннинга, оказываются существенно различными. Тем более убедительными являются установленные закономерности, общие для обоих случаев.

Случай $V = 1 - \cos \varphi$

Решение уравнения (10) для одиночного вихря имеет вид

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{arctg}(\exp(-x\sqrt{I})). \quad (11)$$



Решение (11) уравнения (10) для уединенного вихря.

График функции (11) изображен на рисунке.

Подставляя в (8) выражение (11) и ограничиваясь членами с $n = 0, \pm 1$, получим

$$\begin{aligned} E = & \frac{2}{\sqrt{I}} \int_0^\infty f(4 \operatorname{arctg}(\exp(-\xi))) d\xi \\ & + \frac{4}{\sqrt{I}} \cos(2\pi\alpha) \operatorname{Re} \int_0^\infty f(4 \operatorname{arctg}(\exp(-\xi))) \\ & \times \exp\left(\frac{i2\pi\xi}{\sqrt{I}}\right) d\xi, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\xi = x\sqrt{I}$.

Рассмотрим джозефсоновскую энергию $E = I \sum_{k=-\infty}^\infty (1 - \cos \varphi_k)$. В этом случае

$$f_1 = I(1 - \cos(4 \operatorname{arctg}(e^{-\xi}))) = \frac{2I}{\operatorname{ch}^2 \xi}. \quad (13)$$

Учитывая четность f_1 по ξ и воспользовавшись формулой 3.985 из [7], получим

$$\begin{aligned} E_{J0} = & 4\sqrt{I} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} = 4\sqrt{I} \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\cos(b\xi) d\xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} \\ = & 4\sqrt{I} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b\pi}{2 \operatorname{sh}(b\pi/2)} = 4\sqrt{I}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E_{J1} = & 8\sqrt{I} \cos(2\pi\alpha) \int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\xi/\sqrt{I}) d\xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} \\ = & \frac{8\pi^2}{\operatorname{sh}(\pi^2/\sqrt{I})} \cos(2\pi\alpha) \\ \approx & 16\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) \cos(2\pi\alpha). \end{aligned} \quad (15)$$

Максимальное значение E_{J1} при изменении α достигается при $\alpha = 0$, т.е. когда центр вихря находится на границе двух ячеек.

Рассмотрим магнитную энергию $E_H = 0.5 \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k+1})^2$. В этом случае

$$f_2 = 8 \left(\operatorname{arctg}(e^{-(x+\alpha)\sqrt{I}}) - \operatorname{arctg}(e^{-(x+\alpha+1)\sqrt{I}}) \right)^2$$

$$= 8 \operatorname{arctg}^2 \frac{e^{-\alpha\sqrt{I}} - e^{-(\alpha+1)\sqrt{I}}}{e^{-x\sqrt{I}} - e^{-(x+2\alpha+1)\sqrt{I}}}. \quad (16)$$

При $\alpha_1 = -0.5$ функция $f_2(x)$ четная

$$f_2 = 8 \operatorname{arctg}^2 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{I}/2)}{\operatorname{ch}(x\sqrt{I})}. \quad (17)$$

Раскладывая функцию $\operatorname{arctg} x$ в ряд по x , возводя его в квадрат и почленно интегрируя, получим

$$E_{H0} = \frac{8}{\sqrt{I}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{I}/2)}{\operatorname{ch} \xi} d\xi$$

$$= \frac{16\eta}{\sqrt{I}} \left[1 - \frac{4}{9}\eta + \frac{184}{675}\eta^2 - \frac{704}{3675}\eta^3 + \dots \right], \quad (18)$$

где $\eta = \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{I}}{2}$.

Переходя от ряда по η к ряду по \sqrt{I} , получим

$$E_{H0} = 4\sqrt{I} - \frac{1}{9}I^{3/2} + \frac{7}{1350}I^{5/2} + \dots \quad (19)$$

Расчет величины E_{H1} на основе методов теории комплексной переменной, проведенный в [6], дает следующее выражение:

$$E_{H1} = -16 \exp(-\pi^2/\sqrt{I}) \cos(2\pi\alpha)(2.43766 - I/12). \quad (20)$$

Полная энергия вихря равна

$$E = E_{J0} + E_{H0} + (E_{J1} + E_{H1}) \cos 2\pi\alpha. \quad (21)$$

Будем называть энергией пиннинга E_p разность между максимальной и минимальной энергиями вихря при различных α , т.е. в положениях с центром вихря на границе двух ячеек ($\alpha = 0$) и в центре ячейки ($\alpha = 0.5$)

$$E_p = E(0) - E(0.5) = \Delta E_J + \Delta E_H. \quad (22)$$

Согласно проведенному анализу величины ΔE_J и ΔE_H определяются выражениями

$$\Delta E_J = 32\pi^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right), \quad (23)$$

$$\Delta E_H = -32 \exp\left(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}}\right) (2.43766 - I/12). \quad (24)$$

Отметим, что аналитический вид выражений (23) и (24) не допускает разложения в ряд по степеням параметра I , поэтому эти результаты не могли быть получены методом последовательных приближений.

Таблица 1. Значения магнитной и джозефсоновской энергий при $V = 1 - \cos \varphi$, найденные разными способами

I	Теория (14)		Теория (19)		Численная модель (25, 26)		Точное решение	
	E_{J0}	E_{H0}	E_{H0}	E_{J0}	E_H	E_J	E_H	E_J
0.15	1.5492	1.5428	1.5428	1.5492	1.5525	1.5393	1.5525	1.5393
0.40	2.5298	2.5022	2.5022	2.5298	2.5452	2.4860	2.5452	2.4860
0.70	3.347	3.2836	3.2837	3.347	3.3853	3.2393	3.3853	3.2393
1.00	4.000	3.894	3.894	4.000	4.073	3.806	4.073	3.806

Для проверки правильности полученных формул был проведен точный компьютерный расчет величин

$$E_J(\alpha) = I \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - \cos \varphi_k),$$

$$E_H(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 \quad (25)$$

с использованием для φ_k выражения (11), соответствующего вихрю в непрерывной среде

$$\varphi_k(\alpha) = 4 \operatorname{arctg}(\exp(-k - \alpha)\sqrt{I}) \quad (26)$$

при $\alpha = 0$ и $\alpha = 0.5$. Разность полученных значений согласно (22) дает величины ΔE_J и ΔE_H , а их полусумма согласно (21) равна E_{J0} и E_{H0} .

Полученные таким образом результаты для некоторых значений параметра I , а также значения энергий E_{J0} , E_{H0} , ΔE_J и ΔE_H , рассчитанные, соответственно, по формулам (14), (19), (23) и (24), сведены в табл. 1 и 2.

Случай $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$

Для вычисления энергий надо в (8) подставить решение уравнения (10) для одиночного вихря, имеющее в данном случае вид

$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{1 + \exp(4x\sqrt{I}/\pi)}. \quad (27)$$

График функции (27) похож на график рис. 1. Рассмотрим энергию $E = 2I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi^2(2 - \psi)^2$, где $\psi = \varphi/\pi$. Тогда

$$f_1 = 2I\psi^2(2 - \psi)^2 = \frac{2I}{\operatorname{ch}^4(2x\sqrt{I}/\pi)}. \quad (28)$$

Учитывая четность f_1 по x и воспользовавшись формулой 3.985 из [7], получим

$$E_{J0} = 2\pi\sqrt{I} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^4 \xi} = 2\pi\sqrt{I} \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\cos(b\xi)d\xi}{\operatorname{ch}^4 \xi}$$

$$= 2\pi\sqrt{I} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b\pi(b^2 + 4)}{12 \operatorname{sh}(b\pi/2)} = \frac{4\pi\sqrt{I}}{3}, \quad (29)$$

Таблица 2. Значения составляющих энергии пиннинга при $V = 1 - \cos \varphi$, найденные разными способами

I	Теория (23)	Теория (24)	Численная модель (25, 26)		Точное решение			Теория (22–24)
	ΔE_J	ΔE_H	ΔE_H	ΔE_J	ΔE_H	ΔE_J	E_p	E_p
0.15	2.705E-9	-6.6477E-10	-6.6479E-10	2.705E-9	-6.095E-8	6.617E-8	5.22E-9	2.04E-9
0.40	5.27E-5	-1.2849E-5	1.2852E-5	5.27E-5	-6.21E-4	7.14E-4	9.29E-5	3.99E-5
0.70	2.38E-3	-5.734E-4	-5.738E-4	2.38E-3	-1.86E-2	2.24E-2	3.90E-3	1.81E-3
1.00	1.63E-2	-3.897E-3	-3.902E-3	1.62E-2	-9.5E-2	1.21E-1	2.6E-2	1.24E-2

$$E_{J1} = 8\sqrt{I} \cos(2\pi\alpha) \int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\xi/\sqrt{I}) d\xi}{\text{ch}^4(2\xi/\pi)}$$

$$= \frac{\pi^4(\pi^4/I + 4)}{3 \text{sh}(\pi^3/2\sqrt{I})} \cos(2\pi\alpha) \approx \frac{2\pi^8}{3I} \exp\left(-\frac{\pi^3}{2\sqrt{I}}\right) \cos(2\pi\alpha). \quad (30)$$

Энергия E_{J1} максимальна при $\alpha = 0$, т.е. когда центр вихря находится на границе двух ячеек.

Рассмотрим энергию $E_H = 0.5 \sum_{k=-\infty}^\infty (\varphi_k - \varphi_{k+1})^2$. В этом случае

$$f_2 = 2\pi^2 \left[\frac{1}{1 + \exp[(x + \alpha)4\sqrt{I}/\pi]} - \frac{1}{1 + \exp[(x + \alpha + 1)4\sqrt{I}/\pi]} \right]^2. \quad (31)$$

Функция $f_2(x)$ четная при $\alpha = -0.5$

$$f_2 = 2\pi^2 \frac{\text{sh}^2(2\sqrt{I}/\pi)}{(\text{ch}(4x\sqrt{I}/\pi) + \text{ch}(2\sqrt{I}/\pi))^2}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (8) при $n = 0$, получим [7]

$$E_{H0} = \frac{\pi^3}{\sqrt{I}} \frac{\beta \text{ch} \beta - \text{sh} \beta}{\text{sh} \beta}, \quad (33)$$

где $\beta = \frac{2\sqrt{I}}{\pi}$.

Ограничиваясь первыми членами разложения по \sqrt{I} , получим

$$E_{H0} = \frac{4\pi\sqrt{I}}{3} \left(1 - \frac{4I}{15\pi^2} + \dots \right). \quad (34)$$

Для расчета E_{H1} воспользуемся методами теории комплексной переменной

$$E_{H1} = \pi^2 \cos(2\pi\alpha) \text{sh}^2 \frac{2\sqrt{I}}{\pi} \times \text{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(i2\pi x)}{\text{ch}^2((x+0.5)2\sqrt{I}/\pi) \text{ch}^2((x-0.5)2\sqrt{I}/\pi)} dx. \quad (35)$$

Для нахождения E_{H1} вычислим интеграл по контуру, состоящему из действительной оси и верхней полуокружности радиусом R , а затем устремим R к бесконечности. Выражение (35) удовлетворяет смягченной лемме Жордана, поэтому интеграл по большой полуокружности стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Подынтегральная

функция внутри контура интегрирования имеет полюсы второго порядка в точках

$$z = \pm 0.5 + \frac{\pi^2}{4\sqrt{I}} (2k + 1)i, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

Основную роль при вычислении интеграла (35) играют вычеты в точках $z = \pm 0.5 + \frac{\pi^2}{4\sqrt{I}} i$ (при $k = 0$). Вычисляя интеграл и учтя начальный сдвиг на $\alpha = -0.5$ (см. выражение (35)) для приведения к единому началу отсчета по α , окончательно получим для E_{H1}

$$E_{H1} = -\frac{2\pi^6}{I} \exp(-\pi^3/2\sqrt{I}) \cos(2\pi\alpha), \quad (37)$$

где положению центра вихря в центре ячейки соответствует $\alpha = 0.5$. Полная энергия вихря равна

$$E = E_{J0} + E_{H0} + (E_{J1} + E_{H1}) \cos 2\pi\alpha. \quad (38)$$

Энергия пиннинга, равная разности между максимальной и минимальной энергиями вихря при различных α , т.е. в положениях с центром вихря на границе двух ячеек ($\alpha = 0$) и в центре ячейки ($\alpha = 0.5$)

$$E_p = E(0) - E(0.5) = \Delta E_J + \Delta E_H. \quad (39)$$

Согласно проведенному анализу, величины ΔE_J и ΔE_H должны быть равны

$$\Delta E_{J1} = \frac{2\pi^4(\pi^4/I + 4)}{3 \text{sh}(\pi^3/2\sqrt{I})} \approx \frac{4\pi^8}{3I} \exp\left(-\frac{\pi^3}{2\sqrt{I}}\right), \quad (40)$$

$$\Delta E_{H1} = -\frac{4\pi^6}{I} \exp(-\pi^3/2\sqrt{I}). \quad (41)$$

Для проверки правильности полученных формул был проведен точный компьютерный расчет величин

$$E_J(\alpha) = \frac{2I}{\pi^4} \sum_{k=-\infty}^\infty \varphi_k^2 (2\pi - \varphi_k)^2;$$

$$E_H(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^\infty (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2 \quad (42)$$

с использованием для φ_k выражения (31), соответствующего вихря в непрерывной среде

$$\varphi_k = \frac{2\pi}{1 + \exp(4(k + \alpha)\sqrt{I}/\pi)} \quad (43)$$

Таблица 3. Значения магнитной и джозефсоновской энергий при $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$, найденные разными способами

I	Теория (29)	Теория (34)	Численная модель (42, 43)		Точное решение	
	E_{J0}	E_{H0}	E_{H0}	E_{J0}	E_H	E_J
0.15	1.6223	1.6158	1.6158	1.6223	1.6256	1.6123
0.40	2.6492	2.6210	2.6210	2.6492	2.6645	2.6046
0.70	3.5046	3.4400	3.4400	3.5046	3.5422	3.3978
1.00	4.1887	4.0798	4.0798	4.1888	4.258	3.999

при $\alpha = 0$ и $\alpha = 0.5$. Разности полученных значений согласно (39) дают величины ΔE_J и ΔE_H , а их полусуммы согласно (38) равны E_{J0} и E_{H0} .

Полученные таким образом результаты для некоторых значений параметра I , а также значения энергий E_{J0} , E_{H0} , ΔE_J и ΔE_H , рассчитанные соответственно по формулам (29), (34), (40) и (41), сведены в табл. 3 и 4.

2. Аналитический расчет, основанный на решении разностных уравнений

Рассчитаем величину полной энергии вихря при различных его положениях относительно центра ячейки, т.е. при различных значениях α . Для этого в выражение (8) в качестве функции $f(\varphi(x))$ подставим

$$f(\varphi(x)) = \frac{1}{2}((\varphi(x+1)) - \varphi(x))^2 + IV(\varphi(x)). \quad (44)$$

Беря соответствующие интегралы по частям, получим для членов суммы (8) с $n \neq 0$

$$E_n(\alpha) = \frac{\cos(2\pi n \alpha)}{i2\pi n} \times \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} ((\varphi(x+1) - \varphi(x))(\varphi'(x+1) - \varphi'(x)) + I\varphi'(x)V'(\varphi(x))) \exp(i2\pi n x) dx. \quad (45)$$

Подставляя в это выражение $IV'(\varphi(x)) = \varphi(x+1) - 2\varphi(x) + \varphi(x-1)$ (5), получим

$$E_n(\alpha) = \frac{\cos(2\pi n \alpha)}{i2\pi n} \times \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'(x+1)(\varphi(x+1) - \varphi(x)) - \varphi'(x) \times (\varphi(x) - \varphi(x-1))] \exp(i2\pi n x) dx. \quad (46)$$

Разбив его на две части и делая в одной из них замену переменной $x \rightarrow x+1$, получим

$$E_1(\alpha) = \frac{\cos(2\pi n \alpha)}{i2\pi n} \text{Im} \left[(1 - \exp(i2\pi n)) \times \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi'(x+1)(\varphi(x+1) - \varphi(x))] dx \right] = 0. \quad (47)$$

Таким образом, полная энергия вихря, имеющего форму, описываемую точным решением системы конечностных уравнений (5), не зависит от его положения относительно ячеек среды. Иначе говоря, энергия пиннинга равна нулю. Этот весьма неожиданный результат объясняется тем, что выражение (8) выводилось в предположении независимости формы вихря от его положения. Решение же системы (2) меняет свою форму при смещении вихря относительно центра ячейки. Учет этого факта привел бы к ненулевой энергии пиннинга. Однако такой расчет представляет собой отдельную математическую задачу, подход к решению которой пока найти не удалось.

На основании вышеизложенного можно сформулировать следующий важный вывод: величина суммарной энергии пиннинга существенно меньше ее магнитной и джозефсоновской компонент, т.е. величины E_J и E_H примерно равны по модулю и имеют различные знаки. Этот вывод найдет свое подтверждение далее при анализе точного компьютерного решения задачи.

3. Компьютерный расчет энергии пиннинга

Проведенное выше рассмотрение основывалось на функциях (26) и (43), соответствующих решениям дифференциального уравнения (10), которое приближенно заменяет систему разностных уравнений (5) при малых I . Для нахождения пределов применимости такого подхода следует сравнить полученные результаты с точным решением системы (5).

Для нахождения численного решения системы (5) запишем ее в виде рекуррентного соотношения

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + IV'. \quad (48)$$

Тогда, зная значения скачка фазы на двух соседних контактах, можно найти всю конфигурацию. Рассмотрим случай уединенного вихря. В состоянии устойчивого равновесия [1] значения скачка фазы на контактах центральной ячейки вихря связаны соотношением $\varphi_{-1} = 2\pi - \varphi_1$. Выбрав некоторое значение φ_1 и подставляя в (48) в качестве двух последовательных значений φ_k величины $(2\pi - \varphi_1)$ и φ_1 , начнем расчет последующих значений скачка фазы. Из формы вихря (см. рисунок) следует, что если очередное рассчитанное значение окажется меньше нуля или больше предыдущего, то исходное значение φ_1

Таблица 4. Значения составляющих энергии пиннинга при $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$, найденные разными способами

I	Теория (40)	Теория (41)	Численная модель (42, 43)		Точное решение			Теория (39–41)
	ΔE_J	ΔE_H	ΔE_H	ΔE_J	ΔE_H	ΔE_J	E_p	E_p
0.15	3.502E–13	–1.058E–13	–1.064E–13	3.508E–13	–2.08E–11	2.2E–11	1.16E–12	2.4E–13
0.40	7.269E–7	–2.174E–7	–2.174E–7	7.269E–7	–1.96E–5	2.15E–5	1.96E–6	5.10E–7
0.70	1.667E–4	–4.926E–5	–4.926E–5	1.667E–4	–2.69E–3	3.07E–3	3.85E–4	1.17E–4
1.00	2.436E–3	–7.113E–4	–7.113E–4	2.436E–3	–2.76E–2	3.26E–2	5.04E–3	1.72E–3

увеличивается или уменьшается соответственно и расчет начинается снова. Таким образом, можно найти все множество значений φ_k , соответствующее уединенному вихрю, и по формуле (1) рассчитать энергии.

Аналогичный расчет можно провести и для неустойчивой конфигурации вихря. В этом случае $\varphi_{-1} = \pi$ [1], поэтому в качестве двух последовательных значений φ_k выбираются величины π и φ_1 , а далее последовательность операций та же.

В табл. 1–4 приведены результаты компьютерного расчета джозефсоновской и магнитной энергий (полусуммы значений для устойчивой и неустойчивой конфигураций), а также энергии пиннинга для обоих видов $V(\varphi)$.

4. Анализ полученных результатов

В первую очередь отметим, что численный расчет на основе выражений (25) и (26), (42) и (43) магнитных и джозефсоновских энергий и компонент энергии пиннинга (табл. 1–4, столбцы 4 и 5) с высокой точностью подтверждает правильность теоретически полученных формул (табл. 1–4, столбцы 3 и 2). Этот факт позволяет проверить правильность методики нахождения суммы ряда и отсутствие ошибок при расчете и подтверждает абсолютную достоверность полученных результатов.

Теперь перейдем к анализу полученных результатов. Сначала посмотрим, к каким изменениям приводит сохранение разностных членов в выражении для магнитной энергии при использовании модели непрерывного вихря. а) В случае $V = I(1 - \cos \varphi)$ полученные выражения (19) и (24) для магнитных энергий отличаются от соотношений $E_H = 4\sqrt{I}$ и $\Delta E_H = 32\pi^2 \exp(-\frac{\pi^2}{\sqrt{I}})$, полученных в [3], причем, если в случае E_H речь идет о поправках к формуле, то значение ΔE_H оказывается примерно в 4 раза меньше по величине и имеет противоположный знак. В то же время выражения (14) и (23) для джозефсоновских энергий совпадают с формулами, полученными в [3]. б) Факт некоторого неравенства энергий E_J и E_H и существенного различия компонент энергии пиннинга подтверждается и в случае $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$. Магнитная составляющая оказывается примерно в 3.5 раза меньше джозефсоновской по модулю и также имеет противоположный знак. в) Сопоставление результатов для двух видов функции $V(\varphi)$ показывает, что незначительное на первый взгляд

изменение вида функции, мало влияя на величины энергий E_J и E_H , может существенно (в тысячи раз) изменить величины энергий пиннинга.

Теперь сопоставим результаты приближенных подходов с истинными значениями энергий, полученными при точном компьютерном расчете.

1. Точный компьютерный расчет энергий вихря (табл. 1–4, столбцы 6 и 7) показал, что значения магнитной и джозефсоновской энергий вихря различаются; магнитная и джозефсоновская компоненты энергии пиннинга близки по величине и имеют разные знаки, так что суммарная энергия пиннинга на порядок меньше ее составляющих.

Теоретический анализ (выражение (47)) показывает, что полная энергия вихря, имеющего форму, описываемую решением системы конечно-разностных уравнений (5) в предположении неизменности его формы при смещении, не зависит от его положения относительно ячеек среды. Иначе говоря, энергия пиннинга равна нулю. Эта ситуация соответствует равенству величин джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга и противоположности их знаков. Отличие же суммарной энергии пиннинга от нуля определяется изменением формы вихря в зависимости от его положения, причем величина этой энергии существенно меньше ее джозефсоновской и магнитной составляющих. Именно такое соотношение и наблюдается при точном компьютерном расчете.

Таким образом, различие по величине джозефсоновской и магнитной составляющих энергии вихря, а также различие знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга и примерное равенство их величин можно считать характерными особенностями данной задачи.

2. Сравнение двух приближенных подходов, использующих модель непрерывного вихря, с точки зрения соблюдения этих особенностей позволяет прийти к следующим выводам.

При замене в выражении для магнитной энергии разностного члена $1/2(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$ на $1/2(\varphi')^2$, как это сделано в [5], магнитная и джозефсоновская энергии, а также магнитная и джозефсоновская компоненты энергии пиннинга оказываются равны друг другу.

Сохранение же разностных членов в выражении для магнитной энергии приводит к различным значениям магнитной и джозефсоновской энергии вихря, к различию знаков магнитной и джозефсоновской компонент

энергии пиннинга вихря. Таким образом этот подход сохраняет обе выделенные особенности, что является шагом по направлению к точному решению.

Однако сравнение результатов применения этого подхода с величинами энергий, полученными при точном численном решении системы разностных уравнений (5), позволяет обнаружить следующие существенные отличия.

а) Соответствующие двум подходам значения магнитных и джозефсоновских энергий (табл. 1 и 3, столбцы 4 и 5–7) различаются, причем есть отличия в соотношении величин энергий: в приближенной модели магнитная энергия E_H при всех значениях I меньше джозефсоновской, а в точном решении соотношение обратное, поскольку точные значения E_H выше приближенных, а E_J — меньше.

б) Точные значения джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга ΔE_J и ΔE_H (табл. 2 и 4, столбцы 6 и 7) во много раз больше значений, полученных на базе приближенного подхода (табл. 2 и 4, столбцы 4 и 5). Несмотря на это, вследствие различия знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга точные значения суммарной энергии пиннинга $E_p = \Delta E_J + \Delta E_H$ (табл. 2 и 4, столбцы 8) не столь разительно отличаются от результатов приближенного рассмотрения (табл. 2 и 4, столбцы 9).

Таким образом, точное значение суммарной энергии пиннинга достаточно хорошо аппроксимируется значением этой энергии, вычисленным в модели непрерывного вихря при замене разностного члена в энергии на производную. Этот факт является весьма удивительным, поскольку все остальные результаты, полученные на базе именно этого подхода, даже качественно далеки от точного решения. В частности, не наблюдается различие знаков компонент энергии пиннинга, магнитная и джозефсоновская энергии вихря в точности равны друг другу и т. д.

Факт удовлетворительного совпадения результатов приближенного и точного расчета суммарной энергии пиннинга при резком несогласии результатов отдельно по джозефсоновской и магнитной составляющим, скорее всего, не является случайным и имеет какую-то внутреннюю причину. Обоснование возможности использования приближенного подхода для нахождения суммарной энергии пиннинга представляет собой отдельную математическую задачу, подхода к решению которой пока не видно.

Заключение

Предложен алгоритм точного численного решения системы разностных уравнений для нахождения формы и энергии вихря в его устойчивом и неустойчивом состояниях без использования модели непрерывного вихря. На его основе проведен расчет энергий для двух видов функции $V(\varphi)$: $V = 1 - \cos \varphi$ и $V = 2/\pi^4 \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2$. Значения магнитной и джозефсоновской энергий вихря

оказываются различными. Магнитная и джозефсоновская компоненты энергии пиннинга близки по величине и имеют разные знаки, так что суммарная энергия пиннинга на порядок меньше ее составляющих. Проведен теоретический анализ, подтвердивший эти закономерности.

Предложен метод аналитического расчета в модели непрерывного вихря, сохраняющий разностные члены в выражении для энергии. При расчете по этому методу магнитная энергия E_H отличается по величине от джозефсоновской энергии E_J , а магнитная компонента энергии пиннинга противоположна по знаку джозефсоновской.

Проведен сравнительный анализ возможностей применения для расчета величин энергий приближенных подходов в модели непрерывного вихря при сохранении разностных членов и их замене на производные.

Сопоставление результатов, полученных в разной степени приближения, друг с другом, а также с точным решением исходной задачи, показало, что модель непрерывного вихря не дает правильных значений джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга. Точные значения джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга в десятки и сотни раз больше значений, полученных на базе модели непрерывного вихря. Несмотря на это, вследствие различия знаков джозефсоновской и магнитной составляющих энергии пиннинга точные значения суммарной энергии пиннинга несущественно отличаются от результатов применения модели непрерывного вихря. Этот факт, скоро всего, не является случайным и имеет какую-то внутреннюю причину. Обоснование возможности использования модели непрерывного вихря для нахождения суммарной энергии пиннинга представляет собой отдельную математическую задачу, подхода к решению которой пока не видно.

Список литературы

- [1] *Zelikman M.A.* // Superconductor Science & Technology. 1999. Vol. 12. N 1. P. 1–5.
- [2] *Dorogovtsev S.N., Samukhin A.N.* // Europhys. Lett. 1994. Vol. 25. P. 693–698.
- [3] *Брыксин В.В., Гольцев А.В., Дороговцев С.Н., Кузьмин Ю.А., Самухин А.Н.* // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 1281–1290.
- [4] *Френкель Я.И., Конторова Т.М.* // Физический журнал. 1939. Т. 1. С. 137–152.
- [5] *Aubry S.* Lect. Notes in Math. № 925. The Riemann problem. Berlin: Springer, 1982. P. 240.
- [6] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 7. С. 44–52.
- [7] *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. М.: Наука, 1963. С. 1100.