

01;03

О дроблении капли во внешнем электростатическом поле

© В.А. Коромыслов, А.И. Григорьев, М.В. Рыбакова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия,
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 сентября 2001 г.)

На основе принципа минимизация потенциальной энергии конечного состояния замкнутой системы, в которой идут самопроизвольные процессы, исследованы закономерности деления во внешнем однородном электростатическом поле капель идеально проводящей и диэлектрической жидкостей на две и три части.

Задача об устойчивости капли в однородном электростатическом поле представляет значительный интерес в связи с целым рядом разнообразных приложений в физике, геофизике и технике (см., например, обзоры [1,2] и указанную там литературу). При решении конкретных физических и технических задач, связанных с возможностью электростатического распада капли, как правило, ищутся ответы на два основных вопроса: будет ли капля неустойчивой и в результате распадется и каким образом (по какому каналу) будет распадаться: на части сравнимых размеров или сбросит избыточный заряд, эмиттируя большое количество мелких сильно заряженных капелек [1,2].

Одна из проблем, возникающих при определении канала распада связана с тем, под действием однородного электростатического поля капля, даже оставаясь устойчивой по отношению к распаду, вытягивается в фигуру, близкую к сфероиду [3,4], что затрудняет аналитический анализ в виду громоздкости получающихся математических выражений. Как правило, решение задачи о неустойчивости сфероидальной капли классическими гидродинамическими способами (например, методом помодового анализа) весьма громоздко и может быть реализовано только при малой величине эксцентриситета [3,5].

Энергетический подход к анализу обсуждаемой проблемы более прост. И хотя он не позволяет получить точные количественные характеристики процесса распада, но дает хорошие качественные результаты для задачи о распаде сильно заряженной капли [6–8] и для задачи о распаде капли во внешнем электростатическом поле при значительных несфероидальных деформациях. Задача же о распаде незаряженной капли с произвольной электропроводностью в однородном внешнем электростатическом поле E при естественных сфероидальных деформациях (равновесная форма капли в E близка к вытянутому сфероиду) пока не решена.

В связи с вышесказанным исследуем возможность распада на две и три части находящейся между обкладками плоского конденсатора в однородном внешнем электростатическом поле E капли невязкой, несжимаемой жидкости, имеющей форму вытянутого по полю E сфе-

роида, исходя из следующих посылок: 1) капля вместе с системой электродов, создающих поле, и источником эдс образуют замкнутую систему; 2) изменение суммарной потенциальной энергии системы при распаде капли экстремально в соответствии с принципом минимальности потенциальной энергии конечного состояния замкнутой системы; 3) кинетическую энергию системы родительской капли до распада и дочерних капель после распада будем принимать равной нулю; 4) полный объем жидкости при делении капли остается неизменным; 5) жидкость капли находится в равновесии со своим насыщенным паром и потери массы на испарение пренебрежимо малы.

Итак, пусть сферическая капля радиуса R с коэффициентом поверхностного натяжения σ помещена в однородное электростатическое поле напряженностью E , в котором она вытягивается по полю и в равновесном состоянии принимает форму сфероида с эксцентриситетом e , для которого выполняются следующие соотношения:

$$e = \sqrt{1 - a^2/b^2}, \quad a = R(1 - e^2)^{-1/3},$$

$$b = R(1 - e^2)^{1/6}.$$

Здесь a и b — большая и меньшая полуоси сфероида. Рассмотрим два предельных случая: 1) жидкость капли является идеальным диэлектриком, 2) жидкость капли является идеальным проводником.

Диэлектрическая капля

1. Распад диэлектрической капли на две части. Потенциальная энергия сил поверхностного натяжения сфероидальной капли записывается в виде

$$U_0 = 2\pi\sigma R^2(1 - e^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e}{e(1 - e^2)^{1/2}} \right).$$

Потенциальная энергия диэлектрического сфероида, находящегося в однородном электростатическом поле E ,

определяется выражением [9]

$$U_E = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \frac{ab^2}{3} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)k} E^2.$$

Здесь \mathbf{P} — дипольный момент поляризованного в поле \mathbf{E} диэлектрического сфероида, ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, k — коэффициент деполяризации [9]

$$k = \frac{1 - e^2}{e^3} (\text{Arth } e - e).$$

Полная потенциальная энергия диэлектрической сферической капли в однородном внешнем электростатическом поле \mathbf{E} имеет вид

$$U_0 = 2\pi\sigma R^2(1 - e^2)^{1/3} \times \left(1 + \frac{\arcsin e}{e(1 - e^2)^{1/2}}\right) - \frac{1}{6} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)k} R^3 E^2.$$

Примем, что при достаточно большой величине поля \mathbf{E} капля претерпевает неустойчивость и распадается на две дочерние капли сравнимых размеров, объемы которых равны объемам сфер с радиусами R_1 и R_2 . Поскольку материнская капля является идеальным диэлектриком, дочерние капли останутся незаряженными. При этом будем полагать, что эксцентриситеты дочерних капель зависят только от величины внешнего поля, т. е. равны соответственно e_1 и e_2 . Таким образом, потенциальная энергия системы двух дочерних капель в поле \mathbf{E} имеет вид

$$U = 2\pi\sigma R_1^2(1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}}\right) + 2\pi\sigma R_2^2(1 - e_2^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_2}{e_2(1 - e_2^2)^{1/2}}\right) - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)E^2 R_1^3}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)E^2 R_2^3}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} - \frac{2p_1 p_2}{r^3}. \quad (1)$$

Первое и второе слагаемые в этом выражении описывают энергию поверхностного натяжения дочерних капель, второе — энергию поляризации дочерних капель в поле \mathbf{E} , третье — энергию дипольного взаимодействия поляризованных дочерних капель, r — расстояние между их центрами, p_1 и p_2 — дипольные моменты первой и второй дочерних капель соответственно, определяемые как

$$p_j = -\frac{1}{3} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)k_j} R_j^3 E; \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

В выражении (1) параметр r неявно определяет величину деформации исходной капли. Поскольку при распаде капли на части сравнимых размеров она принимает гантелеобразную форму, затем перетяжка, связывающая дочерние капли, утоньшается и рвется.

Пусть $V_1/V = n$ (V_1 — объем первой дочерней капли, V — объем родительской капли), тогда из условия постоянства объема получаем

$$V_2 = (1 - n)V \Rightarrow R_1 = n^{1/3}R, \quad R_2 = (1 - n)^{1/3}R.$$

Подставляя это выражение в (1) и учитывая (2), получим

$$U = 2\pi\sigma R^2 n^{2/3} (1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}}\right) + 2\pi\sigma R^2 (1 - n)^{2/3} (1 - e_2^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_2}{e_2(1 - e_2^2)^{1/2}}\right) - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)nE^2}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)(1 - n)E^2}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} - \frac{2(n - n^2)}{9r^3} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)} R^6 E^2. \quad (3)$$

Для упрощения вычислений безразмерим полученное выражение на $2\pi\sigma R^2$, введя следующие обозначения:

$$U = \frac{U}{2\pi\sigma R^2} \quad x \equiv \frac{r}{R}, \quad w \equiv \frac{E^2 R}{2\pi\sigma}. \quad (4)$$

Таким образом, выражение (3) с учетом (4) запишется в виде

$$U = n^{2/3} (1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}}\right) + (1 - n)^{2/3} (1 - e_2^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_2}{e_2(1 - e_2^2)^{1/2}}\right) + \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)nw}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)(1 - n)w}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} - \frac{2(n - n^2)(\varepsilon - 1)^2 w}{9x^3(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)}. \quad (3a)$$

Следует учитывать, что e_1 и e_2 зависят от величины внешнего электрического поля [4]

$$e_1 = \frac{3(\varepsilon - 1)}{2^{3/2}(\varepsilon + 2)} w^{1/2} n^{1/6},$$

$$e_2 = \frac{3(\varepsilon - 1)}{2^{3/2}(\varepsilon + 2)} w^{1/2} (1 - n)^{1/6}.$$

Найдем, при какой величине параметра n выражение (3a) имеет минимум. Для этого потребуем выполнения условий

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} > 0. \quad (5)$$

Первое из условий (5) дает

$$\begin{aligned}
 f_1(n, w) \equiv \frac{\partial U}{\partial n} = & \frac{15 - 14e_1^2}{18n^{1/3}(1 - e_1^2)^{2/3}} \\
 & + \frac{(9 - 8e_1^2) \arcsin e_1}{18n^{1/3}e_1(1 - e_1^2)^{7/6}} - \frac{15 - 14e_2^2}{18(1 - n)^{1/3}(1 - e_2^2)^{2/3}} \\
 & - \frac{(9 - 8e_2^2) \arcsin e_2}{18(1 - n)^{1/3}e_2(1 - e_2^2)^{7/6}} \\
 & - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)w}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} + \frac{(\varepsilon - 1)^2 n Dk_1 w}{6(1 + (\varepsilon - 1)k_1)^2} \\
 & + \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)w}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} + \frac{(\varepsilon - 1)^2 (1 - n) Dk_2 w}{6(1 + (\varepsilon - 1)k_2)^2} \\
 & - \frac{2(1 - 2n)(\varepsilon - 1)^2 w}{9x^3(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)} \\
 & + \frac{2(n - n^2)(\varepsilon - 1)^3 w}{9x^3(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)} \\
 & \times \left(\frac{Dk_1}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} + \frac{Dk_2}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} \right) = 0. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 Dk_1 \equiv \frac{\partial k_1}{\partial n} &= \frac{3e_1 + (e_1^2 - 3) \operatorname{arcth} e_1}{6ne_1^3}, \\
 Dk_2 \equiv \frac{\partial k_2}{\partial n} &= -\frac{3e_2 + (e_2^2 - 3) \operatorname{arcth} e_2}{6(1 - n)e_2^3}.
 \end{aligned}$$

Уравнение (6) будем решать численно ввиду его громоздкости. Кривая, получающаяся в результате пересечения поверхности $f_1 = f_1(n, w)$ и плоскости $z \equiv 0$, является искомой функцией $w(n)$. При построении поверхности $f_1 = f_1(n, w)$ возникает неопределенность в выборе x . В расчетах будем исходить из условия, что капли касаются друг друга, т.е. x равно сумме больших полуосей капель

$$x = n^{1/3}(1 - e_1^2)^{-1/3} + (1 - n)^{1/3}(1 - e_2^2)^{-1/3}.$$

На рис. 1 представлена поверхность $f_1 = f_1(n, w)$, рассчитанная при $\varepsilon = 10$, пересеченная плоскостью $z = 0$. Видно, что необходимое условие выполняется только при $n = 0.5$, т.е. капля может делиться только на две равные по объему дочерние капли.

На рис. 2 в координатах n и w представлена поверхность $f_2(n, w) = \partial^2 U / \partial n^2$. Видно, что второе условие (5) (условие достаточности) выполняется при любых n и w . Аналитическое выражение для $f_2 = f_2(n, w)$ в явном виде не приводится ввиду его громоздкости. Таким образом, при делении диэлектрической капли на две части реализуется симметричный канал распада.

2. Распад диэлектрической капли на три части. Будем полагать, что при реализации неустойчивости диэлектрической капли в поле E от центральной (материнской) капли с противоположных концов

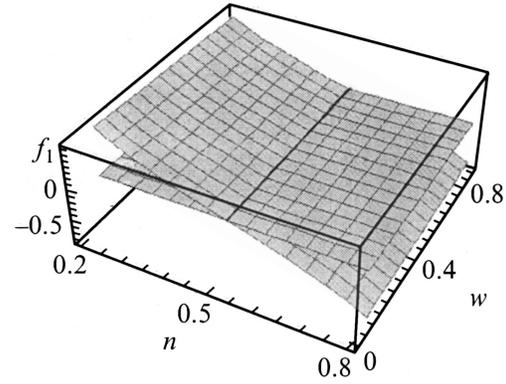


Рис. 1. Поверхность $f_1 = f_1(n, w)$ определяет зависимость первой производной потенциальной энергии двух диэлектрических капель от безразмерного объема n и параметра w , характеризующего напряженность внешнего электрического поля. Рассчитана при $\varepsilon = 10$.

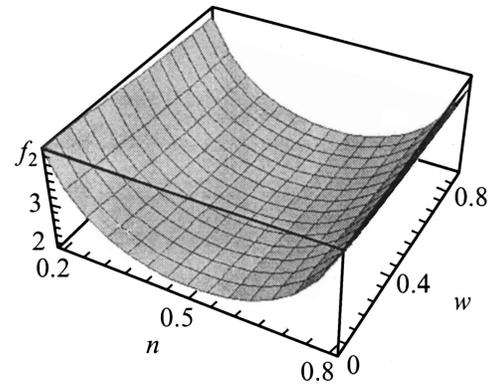


Рис. 2. Зависимость второй производной $f_2 = f_2(n, w)$ потенциальной энергии двух диэлектрических капель от безразмерного объема n и параметра w , рассчитанная при $\varepsilon = 10$.

отрываются две дочерние капли, имеющие одинаковые объемы. Потенциальная энергия конечного состояния определенной таким образом системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 U = & 2\pi\sigma R_1^2(1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}} \right) \\
 & - \frac{1}{6} \frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon - 1)k_1} R_1^3 E^2 - \frac{2p_2 p_2}{(2r)^3} \\
 & + 2 \left\{ 2\pi\sigma R_2^2(1 - e_2^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_2}{e_2(1 - e_2^2)^{1/2}} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{6} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} R_2^3 E^2 - \frac{2p_1 p_2}{r^3} \right\}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое вне скобок определяет энергию поверхностного натяжения центральной капли, второе — энергию поляризации центральной капли в поле E , третье — энергию дипольного взаимодействия между крайними (дочерними) каплями. Первое слагаемое

в фигурных скобках определяет энергию поверхностного натяжения дочерних капель, второе — энергию поляризации дочерних капель в поле \mathbf{E} , третье — энергию дипольного взаимодействия поляризованных дочерних капель с остатком родительской. Величины с индексом '1' относятся к центральной капле, величины с индексом '2' — к крайним каплям. Дипольные моменты капель, как и ранее, определяются выражением (2), r — расстояние между центрами дочерней капли и остатка родительской.

Будем полагать, что объем дочерней капли V_2 в n раз меньше объема исходной капли V . Из условия сохранения объема можно получить следующие соотношения:

$$R_1 = R(1 - 2n)^{1/3}, \quad R_2 = Rn^{1/3}.$$

Подставляя эти выражения в (7) с учетом (2), получим

$$U = 2\pi\sigma R^2(1 - 2n)^{2/3}(1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}} \right) - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)(1 - 2n)}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} R^3 E^2 - \frac{1}{36r^3} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{(1 + (\varepsilon - 1)k_2)^2} n^2 R^6 E^2 + 2 \left\{ 2\pi\sigma R^2 n^{2/3} (1 - e_2^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_2}{e_2(1 - e_2^2)^{1/2}} \right) - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)n}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} R^3 E^2 - \frac{2(n - 2n^2)}{9r^3} \times \frac{(\varepsilon - 1)^2}{(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)} R^6 E^2 \right\}.$$

Как и ранее, следует учитывать, что e_1 и e_2 зависят от величины электрического поля [4]

$$e_1 = \frac{3(\varepsilon - 1)}{2^{3/2}(\varepsilon + 2)} w^{1/2} (1 - 2n)^{1/6},$$

$$e_2 = \frac{3(\varepsilon - 1)}{2^{3/2}(\varepsilon + 2)} w^{1/2} n^{1/6}.$$

Для упрощения вычислений проведем обезразмеривание тем же путем, что и ранее. Тогда, согласно (4), получим

$$U = (1 - 2n)^{2/3}(1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}} \right) + 2n^{2/3}(1 - e_2^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_2}{e_2(1 - e_2^2)^{1/2}} \right) - \frac{1}{6} \frac{(\varepsilon - 1)(1 - 2n)w}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} - \frac{1}{3} \frac{(\varepsilon - 1)nw}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} - \frac{1}{36r^3} \frac{(\varepsilon - 1)^2 n^2 w}{(1 + (\varepsilon - 1)k_2)^2} - \frac{4(n - 2n^2)}{9r^3} \frac{(\varepsilon - 1)^2 w}{(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)}. \quad (8)$$

Для отыскания положения минимума функции $U = U(n)$ потребуем выполнения условий (5). Первое из условий (5) дает

$$f_1(n, w) \equiv \frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{15 - 14e_1^2}{9(1 - 2n)^{1/3}(1 - e_1^2)^{2/3}} - \frac{(9 - 8e_1^2) \arcsin e_1}{9(1 - 2n)^{1/3} e_1 (1 - e_1^2)^{7/6}} + \frac{15 - 14e_2^2}{9n^{1/3}(1 - e_2^2)^{2/3}} + \frac{(9 - 8e_2^2) \arcsin e_2}{9n^{1/3} e_2 (1 - e_2^2)^{7/6}} + \frac{1}{3} \frac{(\varepsilon - 1)w}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} + \frac{(\varepsilon - 1)^2(1 - 2n)Dk_1 w}{6(1 + (\varepsilon - 1)k_1)^2} - \frac{1}{3} \frac{(\varepsilon - 1)w}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} + \frac{(\varepsilon - 1)^2 n Dk_2 w}{6(1 + (\varepsilon - 1)k_2)^2} - \frac{(\varepsilon - 1)^2 n w}{18x^3(1 + (\varepsilon - 1)k)^2} + \frac{(\varepsilon - 1)^3 n^2 w Dk_2}{18x^3(1 + (\varepsilon - 1)k)^2} - \frac{4(1 - 4n)(\varepsilon - 1)^2 w}{9x^3(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)} + \frac{4(n - 2n^2)(\varepsilon - 1)^3 w}{9x^3(1 + (\varepsilon - 1)k_1)(1 + (\varepsilon - 1)k_2)} \times \left(\frac{Dk_1}{1 + (\varepsilon - 1)k_1} + \frac{Dk_2}{1 + (\varepsilon - 1)k_2} \right) = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$Dk_1 \equiv \frac{\partial k_1}{\partial n} = - \frac{3e_1 + (e_1^2 - 3) \operatorname{arcth} e_1}{3(1 - 2n)e_1^3},$$

$$Dk_2 \equiv \frac{\partial k_2}{\partial n} = \frac{3e_2 + (e_2^2 - 3) \operatorname{arcth} e_2}{6ne_2^3}.$$

Решение уравнения (9) будем искать численно, как и в случае распада капли на 2 части. При построении зависимости $f_1(n, w)$ будем полагать, что капли касаются друг друга, т. е.

$$x = (1 - 2n)^{1/3}(1 - e_1^2)^{-1/3} + n^{1/3}(1 - e_2^2)^{-1/3}.$$

Поверхность $f_1 = f_1(n, w)$, рассчитанная для $\varepsilon = 10$, пересеченная плоскостью $z = 0$, представлена на рис. 3.

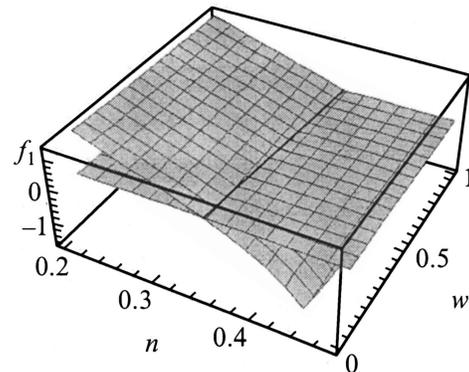


Рис. 3. Зависимость, аналогичная приведенной на рис. 1, полученная для трех диэлектрических капель.

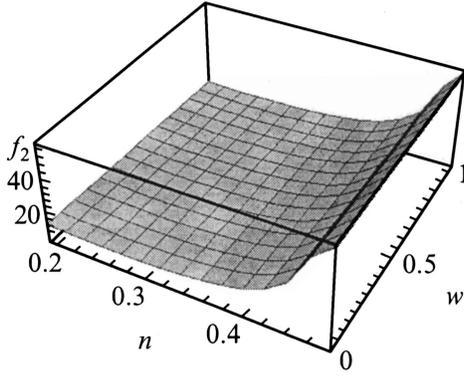


Рис. 4. Зависимость, аналогичная приведенной на рис. 2, полученная для трех диэлектрических капель.

Пересечение поверхности $f_1 = f_1(n, w)$ плоскостью $z = 0$ является искомым решением уравнения $f_1(n, w) = 0$. Видно, что распад возможен только при $n \approx 0.33$, т.е. примерно на три равные части. С ростом параметра w наблюдается незначительный рост объемов крайних капель. На рис. 4 для $\epsilon = 10$ представлена поверхность $f_2(n, w) = \partial^2 U / \partial n^2$. Видно, что второе условие (5) выполняется при любых n и w . Аналитический вид функции $f_2 = f_2(n, w)$ в явном виде не приводится ввиду громоздкости. Таким образом, при делении диэлектрической капли на три части, так же как и при делении на две части, реализуется симметричный канал распада.

Идеально проводящая капля

Как известно [1,10], идеально проводящая капля в сильном однородном электростатическом поле распадается, эмиттируя большое количество на два порядка более мелких дочерних капелек, поэтому в нижеследующем рассмотрении ограничимся анализом только такого канала распада. Будем полагать, что при распаде от центральной эллипсоидальной капли с эксцентриситетом e_1 с противоположных концов отрываются две существенно более мелкие капельки одинакового объема и с противоположными по знаку и равными по модулю и зарядами Q , которые благодаря малому радиусу и большому лапласовскому давлению будем считать сферическими. Тогда коэффициент деполяризации дочерних капель сведется к числу $k_2 = 1/3$ [9].

Энергия проводника в однородном электростатическом поле определяется выражением [9]

$$U = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E},$$

где \mathbf{P} — дипольный электрический момент

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \frac{V}{4\pi k} = \frac{\mathbf{E} R^3}{3k}.$$

Таким образом, потенциальная энергия системы трех капель в конечном состоянии имеет вид

$$U = -\frac{E^2 R_1^3}{6k_1} + 2\pi\sigma R_1^2 (1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}} \right) + 2 \left\{ -\frac{E^2 R_2^3}{2} + 4\pi\sigma R_2^2 + U_1 + U_2 + U_3 \right\} + U_4. \quad (10)$$

Здесь R_1 — радиус центральной капли, R_2 — радиус дочерних капель, U_1 — потенциальная энергия дипольного взаимодействия центральной и крайней капли

$$U_1 = \frac{2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{r^3}, \quad \mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{E} R_i^3}{3k_i} \Rightarrow U_1 = -\frac{2R_1^3 R_2^3}{3r^3 k_1} E^2. \quad (11)$$

Здесь p_1 и p_2 — дипольные моменты остатка материнской и одной из дочерних капель соответственно, r — расстояние между их центрами. U_2 в выражении (10) — собственная электростатическая энергия заряженной дочерней капли

$$U_2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2R_2}. \quad (12)$$

Для учета энергии электростатического взаимодействия заряженной дочерней капли с поляризованным остатком материнской U_3 представим поляризованную каплю в виде диполя. Полный поляризационный заряд половинки сфероида можно получить, проинтегрировав поверхностную плотность заряда γ ,

$$Q^* = \frac{Eb^2}{4k_1}.$$

Расстояние от центра капли до „центра тяжести“ заряда равно

$$r_{cx} = \frac{2a}{3}.$$

Из осевой симметрии задачи очевидно, что $r_{cy} = 0$ и $r_{cz} = 0$.

Таким образом, электростатическое взаимодействие поляризованной материнской капли с заряженной дочерней каплей определяется выражением

$$U_3 = -\frac{QQ^*}{(r + r_{cx})} + \frac{QQ^*}{(r - r_{cx})} = -\frac{QER_1^3}{3k_1} \left(r^2 - \frac{4R_1^3}{9(1 - e^2)^{2/3}} \right)^{-1}. \quad (13)$$

U_4 в выражении (10) потенциальная энергия диполя, образованного заряженными крайними каплями, в поле \mathbf{E}

$$U_4 = -\mathbf{pE} = -2QEr. \quad (14)$$

Подставляя (11)–(14) в (10), получим

$$U = -\frac{E^2 R_1^3}{6k_1} + 2\pi\sigma R_1^2(1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}}\right) + 2 \left\{ -\frac{E^2 R_2^3}{2} + 4\pi\sigma R_2^2 - \frac{2R_1^3 R_2^3}{3r^3 k_1} E^2 + \frac{Q^2}{2R_2} - \frac{QER_1^3}{3k_1} \left(r^2 - \frac{4R_1^2}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-1} \right\} - 2QEr. \quad (15)$$

Полагаем, что объем крайней капли V_2 в n раз меньше объема исходной капли V . Из условия сохранения объема можно получить следующие соотношения:

$$R_1 = (1 - 2n)^{1/3} R, \quad R_2 = n^{1/3} R.$$

При этом

$$e_1 = \frac{3w^{1/2}}{2^{3/2}} (1 - 2n)^{1/6},$$

а коэффициент деполяризации k_1 определяется точно так же, как и для диэлектрической капли.

Будем считать, что заряд дочерних капель не зависит явно от их объема. Тогда выражение для потенциальной энергии системы можно переписать в виде

$$U = -\frac{E^2 R^3(1 - 2n)}{6k_1} + 2\pi\sigma R^2(1 - 2n)^{2/3}(1 - e_1^2)^{1/3} \times \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}}\right) - E^2 R^3 n + 8\pi\sigma R^2 n^{2/3} - \frac{4(n - 2n^2)}{3r^3 k_1} R^6 E^2 + \frac{Q^2}{n^{1/3} R} + \frac{2(1 - 2n)QER^3}{3k_1} \left(r^2 - \frac{4(1 - 2n)^{2/3} R^2}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-1} - 2QEr.$$

Используя обезразмеривание (4), а также применяя $Q \equiv Q/ER^2$, получим

$$U = (1 - 2n)^{2/3}(1 - e_1^2)^{1/3} \left(1 + \frac{\arcsin e_1}{e_1(1 - e_1^2)^{1/2}}\right) + 4n^{2/3} - \frac{w(1 - 2n)}{6k_1} - wn - \frac{4(n - 2n^2)w}{3x^3 k_1} + \frac{wQ^2}{n^{1/3}} + \frac{2(1 - 2n)Qw}{3k_1} \left(x^2 - \frac{4(1 - 2n)^{2/3}}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-1} - 2Qwx.$$

Положение минимума функции $U = U(n, Q)$ определяется выражением

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q = 0; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_n = 0; \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \quad (16)$$

где $A = \partial^2 U / \partial n^2$, $C = \partial^2 U / \partial Q^2$, $B = \partial^2 U / \partial Q \partial n$;

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_n = \frac{2Qw}{n^{1/3}} - \frac{2w(1 - 2n)}{3k_1} \times \left(x^2 - \frac{4(1 - 2n)^{2/3}}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-1} - 2xw = 0.$$

Отсюда найдем выражение для заряда дочерней капли

$$Q = n^{1/3} \left[x - \frac{1 - 2n}{3k_1} \left(x^2 - \frac{4(1 - 2n)^{2/3}}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-1} \right]. \quad (17)$$

Из второго равенства условия (16) получим

$$f_1(n, w) = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q = -\frac{15 - 14e_1^2}{9(1 - 2n)^{1/3}(1 - e_1^2)^{2/3}} - \frac{(9 - 8e_1^2)\arcsin e_1}{9(1 - 2n)^{1/3}e_1(1 - e_1^2)^{7/6}} + \frac{8}{3n^{1/3}} + \frac{w}{3k_1} + \frac{(1 - 2n)wDk_1}{6k_1^2} - w - \frac{4w(1 - 4n)}{3x^3 k_1} + \frac{4w(n - 2n^2)Dk_1}{3x^3 k_1^2} - \frac{Q^2 w}{3n^{4/3}} + \frac{2wQ}{3} \left[\frac{2k_1 + (1 - 2n)Dk_1}{k_1^2} \left(x^2 - \frac{4(1 - 2n)^{2/3}}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-1} + \frac{16(3 - e_1^2)(1 - 2n)^{2/3}}{81k_1(1 - e_1^2)^{5/3}} \left(x^2 - \frac{4(1 - 2n)^{2/3}}{9(1 - e_1^2)^{2/3}}\right)^{-2} \right] = 0, \quad (18)$$

$$Dk_1 \equiv \frac{\partial k_1}{\partial n} = -\frac{3e_1 + (e_1^2 - 3)\operatorname{arctg} e_1}{3(1 - 2n)e_1^3}$$

Решение системы уравнений (17), (18) будем искать численно. Определим расстояние между центрами средней и крайней капли следующим образом:

$$x = (1 - 2n)^{1/3}(1 - e_1^2)^{-1/3} + n^{1/3}.$$

Зависимость $f_1 = f_1(n, w)$ представлена на рис. 5 и 6 поверхностью, пересеченной плоскостью $z = 0$. Пересечение поверхности $f_1 = f_1(n, w)$ с плоскостью $z = 0$

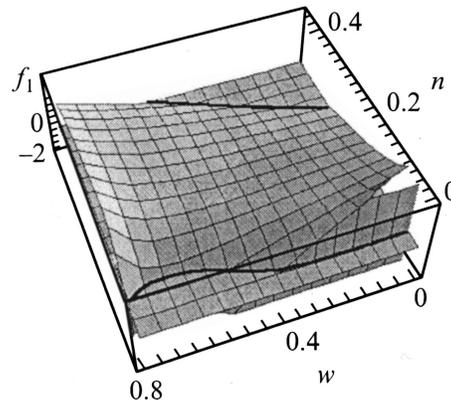


Рис. 5. Зависимость, аналогичная приведенной на рис. 1, полученная для трех идеально проводящих капель.

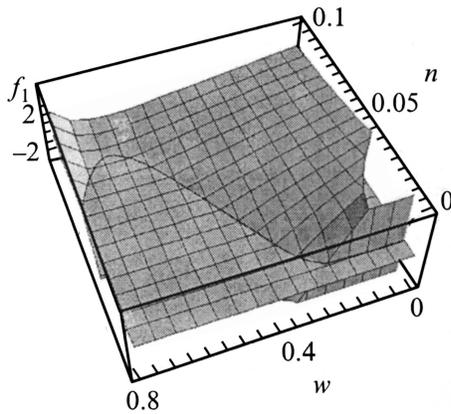


Рис. 6. Часть рис. 5 в области малых значений n , представленная в более крупном масштабе.

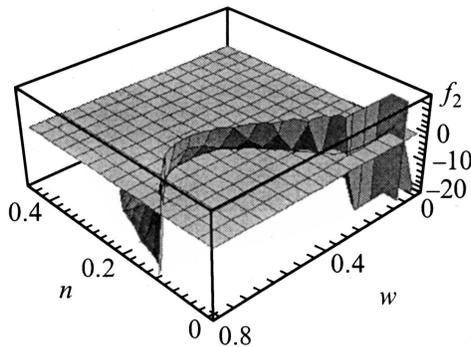


Рис. 7. Зависимость, аналогичная приведенной на рис. 4, полученная для идеально проводящих капель.

является искомым решением уравнения $f_1(n, w) = 0$. Выражение для условия достаточности существования минимума очень громоздко, поэтому не приводится. Результаты численных расчетов поверхности

$$f_2(n, w) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

характеризующей условие достаточности представлены на рис. 7, где она пересекается плоскостью $z = 0$. Из рис. 7 видно, что условие $f_2(n, w) > 0$ выполняется только в области малых n .

Таким образом, хотя существует два решения системы (17), (18) при фиксированном w (одно в области больших значений n , другое — в области малых n), реализовываться будем только распад идеальной капли с эмиссией маленьких капелек. При этом с ростом напряженности электрического поля будет увеличиваться размер эмиттируемых капелек.

Заключение

На части сравнимых размеров могут распадаться только диэлектрические капли. Капли идеально проводящей жидкости в сильном электростатическом поле E будут распадаться, эмиттируя мелкие капельки с радиусами на два порядка меньшими радиуса родительской капли.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–27.
- [3] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [5] Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 28–36.
- [6] Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 69. Вып. 8. С. 31–38.
- [7] Щукин С.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 4. С. 1–7.
- [8] Щукин С.И., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 27–30.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [10] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // J. Phys. D. 1991. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.