

01;03

Капиллярные осцилляции излучающей заряженной вязкой капли конечной проводимости

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 17 сентября 2001 г.)

В линейном приближении по амплитудам осцилляций получено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний излучающей электромагнитные волны заряженной капли вязкой несжимаемой жидкости с конечной электропроводностью.

Введение

Изучение капиллярных осцилляций и устойчивости заряженной капли реальной жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими и техническими приложениями (см., например, [1–4] и указанную там литературу). Тем не менее большая часть теоретических исследований, проведенных в линейном приближении по амплитуде осцилляций [1–4], и все исследования в приближениях более высокого порядка малости [5] выполнены для капель идеально проводящей невязкой жидкости. Феномен излучения колеблющейся каплей электромагнитных волн обсуждался только в одной работе [6], также выполненной для невязкой идеально проводящей жидкости. В связи со сказанным представляется достаточно актуальным исследование капиллярных колебаний капли вязкой жидкости с конечной скоростью переноса электрического заряда и с учетом энергопотерь на излучение.

1. Пусть дана сферическая капля радиуса R вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ , с коэффициентом кинематической вязкости ν , удельной проводимостью σ , диэлектрической проницаемостью ε_1 , коэффициентом поверхностного натяжения γ , поверхность которой совершает капиллярные колебания бесконечно малой амплитуды, возникающие вследствие теплового движения молекул. Капля обладает зарядом Q и находится в вакууме. Уравнение свободной поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре масс капли запишется в виде $r = R + \xi(\Theta, t)$, где ξ — возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением: $|\xi| \ll R$.

Для упрощения записи и последующих вычислений введем безразмерные переменные, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\gamma = 1$. Все остальные величины (за которыми оставим обычные обозначения) выразятся в единицах своих характерных значений

$$\begin{aligned} r_* &= R; & t_* &= R^{3/2} \rho^{1/2} \gamma^{-1/2}; & u_* &= R^{-1/2} \rho^{-1/2} \gamma^{1/2}; \\ P_* &= R^{-1} \gamma; & s_* &= R^{-3/2} \rho^{-1/2} \gamma^{1/2}; & Q_* &= R^{3/2} \gamma^{1/2}; \\ & & v_* &= R^{1/2} \rho^{-1/2} \gamma^{1/2}. \end{aligned}$$

Система уравнений электрогидродинамики с электрическим полем, создаваемым зарядом Q , имеет вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_j = 0; \quad \mathbf{D}_j = \varepsilon_j \mathbf{E}_j; \quad (1.2)$$

$$\Delta \mathbf{E}_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial t^2} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (1.3)$$

Индекс 1 относится к жидкости, а индекс 2 — к внешней среде; ε_j — диэлектрическая проницаемость (ниже принимается, что $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$); $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей; $P_1(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри жидкости при наличии внешнего электрического поля; c — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

На свободной поверхности капли, уравнение которой представим в виде

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\Theta, t) = 0 \quad (1.4)$$

должны выполняться следующие граничные условия: кинематическое

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0; \quad (1.5)$$

динамическое для касательных компонент тензора напряжений

$$(\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu [\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = 0;$$

$$\Pi_\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_n E_\tau; \quad (1.6)$$

E_n, E_τ — нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к поверхности (1.4); динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений

$$-(P_1 - P_2) + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} - P_E + P_\gamma = 0; \quad (1.7)$$

P_2 — давление внешней среды; P_E и P_γ — давления электрических сил и сил поверхностного натяжения;

условия разрывности нормальной компоненты электрической индукции и непрерывности касательных компонент напряженности электрического поля

$$r = 1 + \xi : D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\chi; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}; \quad (1.8)$$

а также уравнения баланса поверхностной плотности заряда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n}\mathbf{E}_1) + \operatorname{div}_{\Sigma}(\chi\mathbf{u}_{\tau} + \chi b\mathbf{E}_{\tau}) &= 0; \\ r \rightarrow \infty : D_2 &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow 0 : D_1 &\rightarrow 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$\chi(\Theta, t)$ — поверхностная плотность электрического заряда; b — подвижность заряженных частиц; $\mathbf{u}_{\tau}, \mathbf{E}_{\tau}$ — векторы, лежащие в плоскости касательной к поверхности капли; $\operatorname{div}_{\Sigma}\mathbf{a}$ — поверхностная дивергенция вектора \mathbf{a} .

Кроме того, потребуем выполнения дополнительных условий, следующих из очевидных требований неизменности полного объема и положения центра масс капли, а также сохранения ее полного заряда

$$\begin{aligned} \int_V r^2 dr \sin \Theta d\Theta d\phi &= \frac{4}{3} \pi R^3; \\ V = [0 \leq r \leq R + \xi(\Theta, t), 0 \leq \Theta \leq \pi]; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \oint_S \xi(\Theta, t) \mathbf{n}_r \sin \Theta d\Theta d\phi &= 0; \\ S = [r = R + \xi(\Theta, t), 0 \leq \Theta \leq \pi]; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \oint_S \chi(\Theta, t) dS &= Q; \\ S = [r = R + \xi(\Theta, t), 0 \leq \Theta \leq \pi]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Система уравнений (1.1), (1.3) с условиями (1.5)–(1.12) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи.

2. Решение будем искать методом скаляризации, подробно изложенным в [7]. В частности, в [7] показано, что поле скоростей движения жидкости в капле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, имеющее первый порядок малости по $|\xi(\Theta, t)|$, можно представить в виде суммы трех ортогональных векторных полей

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1 \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2 \Psi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3 \Psi_3(\mathbf{r}, t); \quad (2.1)$$

$\Psi_j(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции, определяемые видом поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; $\hat{\mathbf{N}}_i$ — векторные операторы, удовлетворяющие условиям ортогональности,

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i = 0 \quad \text{при } i \neq j; \quad (2.2)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа Δ

$$\Delta \hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \Delta; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Векторные операторы $\hat{\mathbf{N}}_i$ удобно выбрать в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = \hat{\mathbf{N}}_1 \times \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r};$$

$$\hat{\mathbf{N}}_3 = \hat{\mathbf{N}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}); \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ = -\nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2^+ = \mathbf{r} \times \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_3^+ = (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla. \quad (2.5)$$

Операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ эрмитовосопряжены с операторами $\hat{\mathbf{N}}_j$, оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, $\hat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую тороидальную вокруг оси OZ , $\hat{\mathbf{N}}_3$ — вихревую полоидальную компоненту движения жидкости.

Согласно [7], тороидальная часть поля скоростей не оказывает влияния на движения свободной поверхности капли и в проводимом анализе может быть опущена. Подставляя разложение (2.1) в уравнения (1.1) и используя свойство (2.2), (2.3) для отыскания скалярных функций $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$ и добавки первого порядка малости по $|\xi|$ к полю давлений жидкости в капле $p_1(\mathbf{r}, t)$, получим систему уравнений

$$\Delta \Psi_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v} (1 - \delta_{j1}) \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0; \quad j = 1, 3; \quad (2.6)$$

$$p_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(\mathbf{r}, t). \quad (2.7)$$

Положим, что временная зависимость скалярных функций $\Psi_j(\mathbf{r}, t)$ и возмущения равновесной поверхности капли $\xi(\Theta, t)$ имеют экспоненциальный вид

$$\Psi_j(\mathbf{r}, t) \sim \exp(st); \quad \xi(\Theta, t) \sim \exp(st).$$

Решения системы (2.6) запишем в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(1)} r^n P_n(\mu) \exp(st); \quad \mu \equiv \cos \Theta; \quad (2.8)$$

$$\Psi_3(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(3)} \frac{i_n(\sqrt{\frac{\xi}{v}} r)}{i_n(\sqrt{\frac{\xi}{v}})} P_n(\mu) \exp(st); \quad (2.9)$$

$i_n(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя первого рода [9].

Функция $\xi(\Theta, t)$, описывающая возмущение поверхности капли, также может быть представлена в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} Z_n P_n(\mu) \exp(st). \quad (2.10)$$

Границы изменения индекса n от $n = 2$ до $n \rightarrow \infty$ в выписанных разложениях определяются условиями (1.10), (1.11).

Граничные условия (1.5)–(1.7) в первом порядке малости по $|\xi|$ после процедуры скаляризации примут вид

$$r = 1 : \frac{\partial \xi(\Theta, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_{\Omega} \Psi_3; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{e}_\Theta : & \left\{ (\Pi_{2\Theta} - \Pi_{1\Theta}) - \nu \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_\Omega) \Psi_3 \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \Psi_2 \right\} \right] \right\} \Bigg|_{r=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа;

$$\begin{aligned} r = 1 : & \left\{ -p_1 + 2\nu \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \Delta_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_3}{r} \right) \right) \right] \right. \\ & \left. - p_E - (2 + \Delta_\Omega) \xi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Для нахождения электрического поля, создаваемого во внешней среде заряженной проводящей сферической каплей, поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением, необходимо решить систему уравнений (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.8), (1.9) и дополнительным условием (1.12).

Решения такой задачи естественно искать в сферических координатах с началом в центре масс капли в виде суперпозиции

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_2^{(0)}(r) + \mathbf{E}_j^{(1)}(r, \Theta, t); \quad j = 1, 2; \quad (3.1)$$

где $\mathbf{E}_2^{(0)}(r)$ — напряженность электрического поля в окрестности невозмущенной сферы; $\mathbf{E}_j^{(1)}(r, \Theta, t)$ — добавка к напряженности поля, вызванная капиллярными колебаниями поверхности капли, имеющая тот же порядок малости, что и возмущение поверхности, $\mathbf{E}_j^{(1)} \sim \xi$.

В силу линейности решаемой задачи и разложения (3.1) векторы $\mathbf{E}_2^{(0)}$ и $\mathbf{E}_j^{(1)}$ будут решениями систем уравнений, аналогичных (1.2), (1.3).

В нулевом приближении напряженность электрического поля внутри капли $\mathbf{E}_1^{(0)}(r) = 0$, а для отыскания напряженности поля вне капли $\mathbf{E}_2^{(0)}(r)$ имеем задачу

$$\Delta \mathbf{E}_2^{(0)} \equiv \text{grad div } \mathbf{E}_2^{(0)} - \text{rot rot } \mathbf{E}_2^{(0)} = 0; \quad (3.2)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_2^{(0)} = 0; \quad (3.3)$$

$$r = 1 : \quad \mathbf{E}_2^{(0)} \mathbf{n} = 4\pi \kappa_0; \quad \mathbf{E}_2^{(0)} \boldsymbol{\tau} = 0; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \oint_S \kappa(\Theta, t) dS = Q; \quad S = [r = R + \xi(\Theta, t); 0 \leq \Theta \leq \pi]; \\ r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{E}_2^{(0)}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где κ_0 — плотность заряда на невозмущенной поверхности капли.

Будем искать $\mathbf{E}_2^{(0)}$ в виде

$$\mathbf{E}_2^{(0)} = -\nabla \Phi.$$

Уравнение (3.2) с учетом (3.3) при этом удовлетворяется тождественно, а уравнение (3.3) преобразуется в уравнение Лапласа для потенциала Φ

$$\Delta \Phi = 0. \quad (3.6)$$

В силу центральной симметрии задачи нулевого порядка малости уравнение (3.6) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, имеющего решение

$$\Phi = -\frac{A}{r}.$$

Тогда для напряженности поля $\mathbf{E}_2^{(0)}$ получим

$$\mathbf{E}_2^{(0)} = \frac{A}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (3.7)$$

Второе из граничных условий (3.4) выполняется при произвольном значении константы A , так как $\mathbf{e}_r \perp \boldsymbol{\tau}$. Значение этой постоянной определяется из первого условия (3.4) и (3.5) $A = Q$. Окончательно выражение для напряженности поля $\mathbf{E}_2^{(0)}$ принимает вид

$$\mathbf{E}_2^{(0)}(r) = -\frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (3.8)$$

Рассмотрим задачу первого порядка малости для определения $\mathbf{E}_j^{(1)}$. Для упрощения дальнейших выкладок будем опускать верхний индекс в $\mathbf{E}_j^{(1)}$, характеризующий порядок малости. Добавка первого порядка малости к напряженности электрического поля \mathbf{E}_j будет определяться уравнениями (1.2), (1.3). Проведем скаляризацию этих уравнений, представим вектор \mathbf{E}_j в виде разложения

$$\mathbf{E}_j = \hat{\mathbf{N}}_1 \Phi_j^{(1)} + \hat{\mathbf{N}}_2 \Phi_j^{(2)} + \hat{\mathbf{N}}_3 \Phi_j^{(3)}, \quad (3.9)$$

где операторы $\hat{\mathbf{N}}_i$ определяются выражениями (2.4), (2.5) и удовлетворяют свойствам (2.2), (2.3); $\Phi_j^{(m)}$ — неизвестные скалярные функции.

С учетом свойства (2.2), уравнение (3.3) преобразуется в уравнение Лапласа для функции $\Phi_j^{(1)}$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E}_j &= -\hat{\mathbf{N}}_1^+ \cdot \mathbf{E}_j = -\hat{\mathbf{N}}_1^+ (\hat{\mathbf{N}}_1 \Phi_j^{(1)} + \hat{\mathbf{N}}_2 \Phi_j^{(2)} + \hat{\mathbf{N}}_3 \Phi_j^{(3)}) \\ &= -\hat{\mathbf{N}}_1^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 \Phi_j^{(1)} = \nabla \nabla \Phi_j^{(1)} = \Delta \Phi_j^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В силу условия коммутативности операторов $\hat{\mathbf{N}}_i$ с оператором Лапласа (2.3) уравнение (1.3) преобразуется в систему трех скалярных уравнений. Подставим разложение (3.9) в (1.3)

$$\sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_m \left[\Delta \Phi_j^{(m)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^{(m)}}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Умножая слева последнее выражение последовательно на $\hat{\mathbf{N}}_m^+$ и учитывая свойства (2.2) и (2.3), получим систему скалярных уравнений

$$\Delta \Phi_j^{(m)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^{(m)}}{\partial t^2} = 0; \quad m = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Поскольку мы решаем задачу об излучении каплей электромагнитных волн, естественно принять $\Phi_j^{(m)} \sim \exp(st)$, тогда уравнения (3.11) сведутся к уравнениям Гельмгольца.

Из уравнения (3.11) при значении индекса $m = 1$ и уравнения (3.10) получим $(s^2/c^2)\Phi_j^{(1)} = 0$, и поскольку комплексная частота колебаний s отлична от нуля, то, следовательно, скалярная функция $\Phi_j^{(1)} = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля \mathbf{E}_j , создаваемого колебаниями поверхности заряженной капли, будет записываться следующим образом:

$$\mathbf{E}_j = \hat{\mathbf{N}}_2\Phi_j^{(2)} + \hat{\mathbf{N}}_3\Phi_j^{(3)}. \quad (3.12)$$

Функции $\Phi_j^{(m)}$ будут являться решениями уравнения Гельмгольца, имеющего вид

$$\Delta\Phi_j^{(m)} - k^2\Phi_j^{(m)} = 0; \quad k^2 \equiv s^2/c^2; \quad m = 2; 3. \quad (3.13)$$

Несложно показать, что в силу осевой симметрии задачи напряженность электрического поля \mathbf{E}_j как внутри капли ($j = 1$), так и снаружи ($j = 2$) представлена лишь полоидальной компонентой (3.12) $\sim \hat{\mathbf{N}}_3\Phi_j^{(3)}$, а тороидальная $\sim \hat{\mathbf{N}}_2\Phi_j^{(2)}$ отсутствует $\Phi_j^{(2)} \equiv 0$. В итоге для поля \mathbf{E}_j в сферической системе координат имеем

$$\mathbf{E}_j \equiv \hat{\mathbf{N}}_3\Phi_j^{(3)} \equiv -\frac{1}{r}\Delta_\Omega\Phi_j^{(3)}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Phi_j^{(3)}}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\Theta. \quad (3.14)$$

Решение уравнения (3.13) при $j = 2$ (для внешней среды) будем искать в виде суперпозиции бегущих волн

$$\Phi_2^{(3)} = \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{h_n(kr)}{h_n(k)} P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos\Theta, \quad (3.15)$$

где $h_n(kr)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода [8].

Решение задачи (3.12) для $j = 1$ (внутри капли) будем искать в виде суперпозиции стоячих волн

$$\Phi_1^{(3)} = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{i_n(kr)}{i_n(k)} P_n(\mu), \quad (3.16)$$

где $i_n(z)$ — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода.

Подставляя (3.15) и (3.16) в (3.14), найдем для поля \mathbf{E}_j

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \sum_n \left[E_{rn}^{(j)} n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + E_{\Theta n}^{(j)} \frac{dP_n(\mu)}{d\Theta} \mathbf{e}_\Theta \right] \exp(st). \quad (3.17)$$

Причем для внешней среды ($j = 2$)

$$E_{rn}^{(2)} \equiv D_n \frac{h_n(kr)}{r h_n(k)}; \quad (3.18)$$

$$E_{\Theta n}^{(2)} \equiv D_n \left\{ \frac{h_n(kr)}{r h_n(k)} + \frac{d}{dr} \left[\frac{h_n(kr)}{h_n(k)} \right] \right\},$$

а для жидкости внутри капли

$$E_{rn}^{(1)} = A_n \frac{i_n(kr)}{r i_n(k)};$$

$$E_{\Theta n}^{(1)} \equiv A_n \left\{ \frac{i_n(kr)}{r i_n(k)} + \frac{d}{dr} \left[\frac{i_n(kr)}{i_n(k)} \right] \right\}. \quad (3.19)$$

Удовлетворим условию равенства касательных компонент напряженности поля \mathbf{E} на поверхности капли. Для этого учтем, что полное электрическое поле вне капли является суперпозицией слагаемого нулевого порядка малости (3.8) и добавки первого порядка малости (3.17) при $j = 2$. Выражение для орта касательной τ_Θ к возмущенной поверхности капли записывается в форме

$$\tau_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \Theta} \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\Theta.$$

В итоге из условия равенства тангенциальных компонент получим в первом порядке малости по $|\xi|$

$$r = 1: \quad QZ_n \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \Theta} + E_{\Theta n}^{(2)} \frac{dP_n(\mu)}{d\Theta} = E_{\Theta n}^{(1)} \frac{dP_n(\mu)}{d\Theta}. \quad (3.20)$$

Подставляя (3.18), (3.19) в (3.20), несложно найти связь между неизвестными коэффициентами A_n , D_n , Z_n

$$A_n = D_n f_n(k) + Z_n Q I_n^{-1}(k);$$

$$f_n(k) \equiv H_n(k) I_n^{-1}(k); \quad H_n(k) \equiv 1 + \frac{d}{dr} \left[\frac{h_n(kr)}{h_n(k)} \right]_{r=1};$$

$$I_n(k) \equiv 1 + \frac{d}{dr} \left[\frac{i_n(kr)}{i_n(k)} \right]_{r=1}. \quad (3.21)$$

Для всех мод капиллярных осцилляций капли, не гасящихся вязкостью (при $\nu < 1$), безразмерные частоты много меньше обезразмеренной электродинамической постоянной c , поэтому при расчетах интенсивности электромагнитного излучения от колеблющейся капли естественно использовать асимптотические (при $k \equiv (s/c) \rightarrow 0$) выражения для I_n , H_n и f_n

$$I_n(k) = (n+1) + O(k^2); \quad H_n(k) = -n - (2n+1)k + O(k^2);$$

$$f_n(k) = -\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{2n+1}{n} k \right) + O(k^2); \quad k^2 \equiv s^2/c^2. \quad (3.22)$$

Выпишем полные выражения для проекций напряженности электрического поля \mathbf{E}_j на орты осей

$$E_{2r} = \frac{Q}{r^2} + \sum_n D_n \frac{1}{r} \frac{h_n(kr)}{h_n(k)} n(n+1) P_n(\mu) \exp(st);$$

$$E_{2\Theta} = \sum_n D_n \frac{1}{r} \left[\frac{h_n(kr)}{h_n(k)} + r \frac{d}{dr} \left(\frac{h_n(kr)}{h_n(k)} \right) \right] \frac{dP_n(\mu)}{d\Theta} \exp(st);$$

$$E_{1r} = \sum_n \left\{ D_n f_n + Z_n Q I_n^{-1} \right\} \frac{1}{r} \frac{i_n(kr)}{i_n(k)} n(n+1) P_n(\mu) \exp(st);$$

$$E_{1\Theta} = \sum_n \{D_n f_n + Z_n Q I_n^{-1}\} \frac{1}{r} \left\{ \frac{i_n(kr)}{i_n(k)} + r \frac{d}{dr} \left[\frac{i_n(kr)}{i_n(k)} \right] \right\} \frac{dP_n(\mu)}{d\Theta} \exp(st). \quad (3.23)$$

Из условия скачка нормальной компоненты вектора электрической индукции на свободной поверхности заряженной капли (1.8) можно найти поправку $\kappa_1(\Theta, t)$ к равновесной поверхностной плотности заряда $\kappa_0 = Q/4\pi$, связанную с искажением ξ сферической формы капли

$$r=1: \quad \kappa_1(\Theta, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -QZ_n(2 + \varepsilon I_n^{-1}n(n+1)) + D_n n(n+1)(1 - \varepsilon f_n) \right\} P_n(\mu) \exp(st). \quad (3.24)$$

Удовлетворяя уравнению баланса заряда на поверхности капли (1.9), найдем связь между коэффициентами $D_n, Z_n, C_n^{(1)}, C_n^{(3)}$

$$D_n = Z_n B_n G_n(k) + C_n^{(1)} G_n(k) + C_n^{(3)} G_n(k) I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right);$$

$$G_n(k, \varepsilon, \sigma, b, s) \equiv \frac{Q}{s - f_n(k) \lambda(\varepsilon, \sigma, b, s)};$$

$$B_n(\varepsilon, \sigma, b, s) \equiv \frac{2s + n \lambda(\varepsilon, \sigma, b, s)}{(n+1)n};$$

$$\lambda(\varepsilon, \sigma, b, s) \equiv \varepsilon s + 4\pi \sigma + b Q(n+1). \quad (3.25)$$

Здесь $I_n(x)$ такая же функция, что и определенная в (3.21), но от другого аргумента $x \equiv (\sqrt{s/v})$. Выпишем выражение для давления электрического поля на поверхность капли. В линейном по малому параметру $|\xi|$ приближении будем иметь

$$p_E = \frac{Q}{8\pi} \sum_n [L_n^{(1)} Z_n + L_n^{(2)} C_n^{(1)} + L_n^{(3)} C_n^{(3)}] P_n(\mu) \exp(st);$$

$$L_n^{(1)} \equiv \frac{Q}{4\pi} [2Q - B_n G_n(k) n(n+1)];$$

$$L_n^{(2)} \equiv -\frac{Q}{4\pi} G_n(k) n(n+1);$$

$$L_n^{(3)} \equiv -\frac{Q}{4\pi} G_n(k) I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) n(n+1). \quad (3.26)$$

Для того чтобы выписать динамическое граничное условие для касательных компонент тензора напряжений (1.6) в линейном по $|\xi|$ приближении, достаточно найти компоненту Π_{2r} , поскольку, согласно (1.6), (3.23), Π_{1r} имеет второй порядок малости по $|\xi|$,

$$r=1: \quad \Pi_{2r} \equiv \frac{Q}{4\pi} \left[QZ_n \frac{dP_n(\mu)}{d\Theta} + E_{2\Theta} \right] \exp(st)$$

$$\equiv \frac{Q}{4\pi} \sum_n \left\{ Z_n [Q + G_n B_n H_n(k)] + C_n^{(1)} G_n H_n(k) + C_n^{(3)} G_n H_n(k) I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) \right\} \frac{dP_n}{d\Theta} \exp(st). \quad (3.27)$$

4. Подставляя в (2.11)–(2.13) разложения (2.8)–(2.10), с учетом (3.26) и (3.27) получим систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов разложений (2.8)–(2.10)

$$Z_n N_n^{(1)} + C_n^{(1)} N_n^{(2)} + C_n^{(3)} N_n^{(3)} = 0;$$

$$Z_n M_n^{(1)} + C_n^{(1)} M_n^{(2)} + C_n^{(3)} M_n^{(3)} = 0;$$

$$Z_n T_n^{(1)} + C_n^{(1)} T_n^{(2)} + C_n^{(3)} T_n^{(3)} = 0;$$

$$N_n^{(1)} \equiv 3; \quad N_n^{(2)} \equiv -n; \quad N_n^{(3)} \equiv -n(n+1);$$

$$M_n^{(1)} \equiv \frac{Q}{4\pi} [Q + G_n B_n H_n(k)];$$

$$M_n^{(3)} \equiv \frac{Q}{4\pi} G_n H_n(k) I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) - \nu J_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) - \nu(n-1)(n+2);$$

$$M_n^{(2)} \equiv \frac{Q}{4\pi} G_n H_n(k) - 2\nu(n-1);$$

$$T_n^{(1)} \equiv (n-1)(n+2) + \frac{Q}{4\pi} [2Q - B_n G_n n(n+1)];$$

$$T_n^{(2)} \equiv s + 2\nu n(n-1) - \frac{Q}{4\pi} G_n(k) n(n+1);$$

$$T_n^{(3)} \equiv 2\nu \left[I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) - 2 \right] n(n+1) - \frac{Q}{4\pi} G_n(k) I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) n(n+1);$$

$$I_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) \equiv \sqrt{\frac{s}{v}} \frac{i_{n+1} \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{i_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right)} + (n+1) \equiv g_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) + (n+1);$$

$$J_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) \equiv \left[\frac{d^2}{dr^2} \frac{i_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right)}{i_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right)} \right]_{r=1} \equiv \frac{s}{v} - 2g_n \left(\sqrt{\frac{s}{v}} \right) + n(n+1). \quad (4.1)$$

Коэффициенты B_n, G_n, H_n определены соотношениями (3.22) и (3.25). Система (4.1) однородная и имеет решение только при условии равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных

$Z_n, C_n^{(1)}, C_n^{(3)}$. Совершая эту операцию, получим дисперсионное уравнение задачи

$$\begin{aligned} & (s - 2g_n v) \left\{ s^2 + n(n-1)(n+2) + \frac{Q^2}{2\pi} n \right. \\ & \left. - \frac{Q}{4\pi} B_n G_n n^2 (n+1) \right\} + 2s^2 v (n-1)(2n+1) \\ & - s^2 \frac{Q}{4\pi} G_n \left[H_n g_n - \frac{s}{c} (n+1)(2n+1) \right] \\ & + s v \frac{Q}{4\pi} G_n \{ 2g_n n^2 (n+1) - n(n-1)(n+1)^2 \\ & + 4H_n g_n n + H_n n(n^2 - 1)(n-2) \} \\ & - 4s v^2 g_n n (n-1)(n+2) + \frac{Q}{4\pi} G_n g_n n \\ & \times \left\{ H_n \left[\frac{Q^2}{2\pi} - (n-1)(n+2) \right] - \frac{Q^2}{4\pi} n(n+1) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При $c \rightarrow \infty, v \neq 0, \sigma = \text{const}, b = \text{const}, \varepsilon = \text{const}$ это дисперсионное уравнение приводится к дисперсионному уравнению для заряженной вязкой капли с конечной проводимостью, полученному в [9].

Можно показать, что для идеально проводящей жидкости в пределе малой вязкости (при $s \gg v$) дисперсионное уравнение (4.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} & s^2 + 2s v (n-1)(2n+1) + \frac{s}{c} \frac{Q^2}{4\pi} (n+1)(2n+1) \\ & + n(n-1) \left[(n+2) - \frac{Q^2}{4\pi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Несложно видеть, что при $v = 0$ и $c \rightarrow \infty$ (4.3) сводится к дисперсионному уравнению для заряженной капли идеально проводящей невязкой жидкости, полученному Рэлеем [10]. При $v \neq 0, c \rightarrow \infty$ (4.3) сводится к дисперсионному уравнению для заряженной капли идеально проводящей маловязкой жидкости [11]. При конечном значении константы c третье слагаемое в (4.3) определяет декремент затухания χ_n капиллярных осцилляций заряженной капли идеально проводящей жидкости, связанный с излучением ею электромагнитных волн,

$$\chi_n = \frac{Q^2}{8\pi c} (n+1)(2n+1). \quad (4.4)$$

Численные расчеты по полному дисперсионному уравнению (4.2) приводят к зависимостям вещественной и мнимой компонент частоты осцилляций капли от характерных физических параметров задачи, проиллюстрированным рис. 1–5. На рис. 1 представлена зависимость вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерной проводимости σ при $n = 2, v = 0.01, b = 0.5, Q = 1$ и $\varepsilon = 80$. Кривая 1 соответствует капиллярным осцилляциям капли, кривые 2–6 — аperiodически затухающим полоидальным

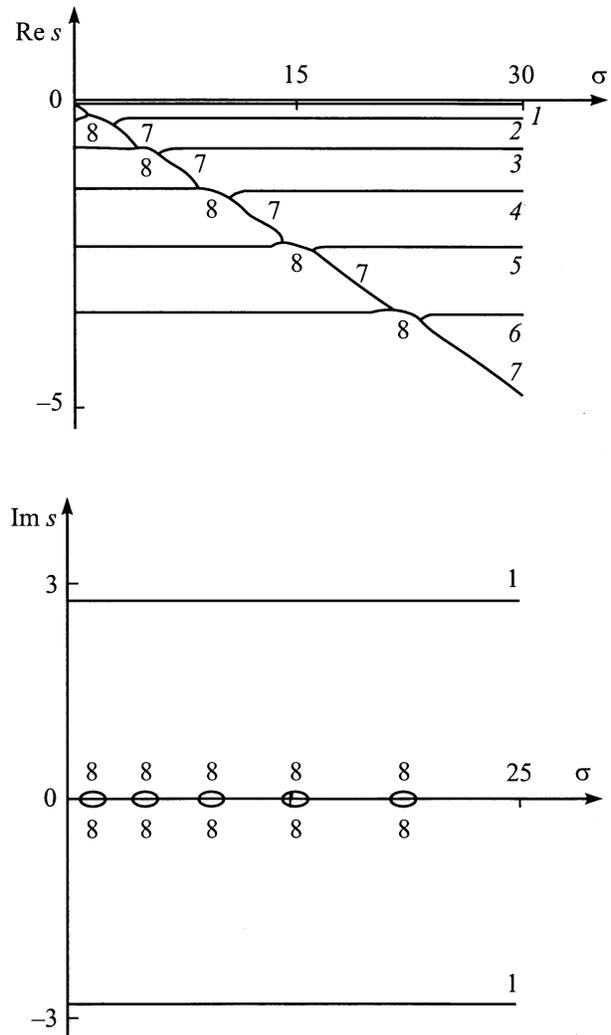


Рис. 1. Зависимость вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерной проводимости σ .

движениям жидкости в ней. Кривая 7 характеризует затухающее аperiodическое движение жидкости, связанное с релаксационным перетеканием заряда вдоль поверхности капли. Видно, что рост проводимости, никак не сказываясь на декрементах затухания капиллярных осцилляций и полоидальных движений жидкости, приводит к линейному увеличению декремента затухания ветви релаксационных движений 7. Не зависит от проводимости и частота капиллярных осцилляций. Интересно отметить, что на капиллярные волны с большой частотой могут накладываться быстро затухающие волны, малой частоты, возникающие в результате взаимодействия полоидальных движений жидкости и движений жидкости, связанных с перемещением носителей заряда. На рис. 2 эти движения представлены ветвями 8. Строго говоря, движения жидкости, описываемые ветвями 8, не являются волновыми, поскольку декремент их затухания во всех случаях заметно превышает значения частот,

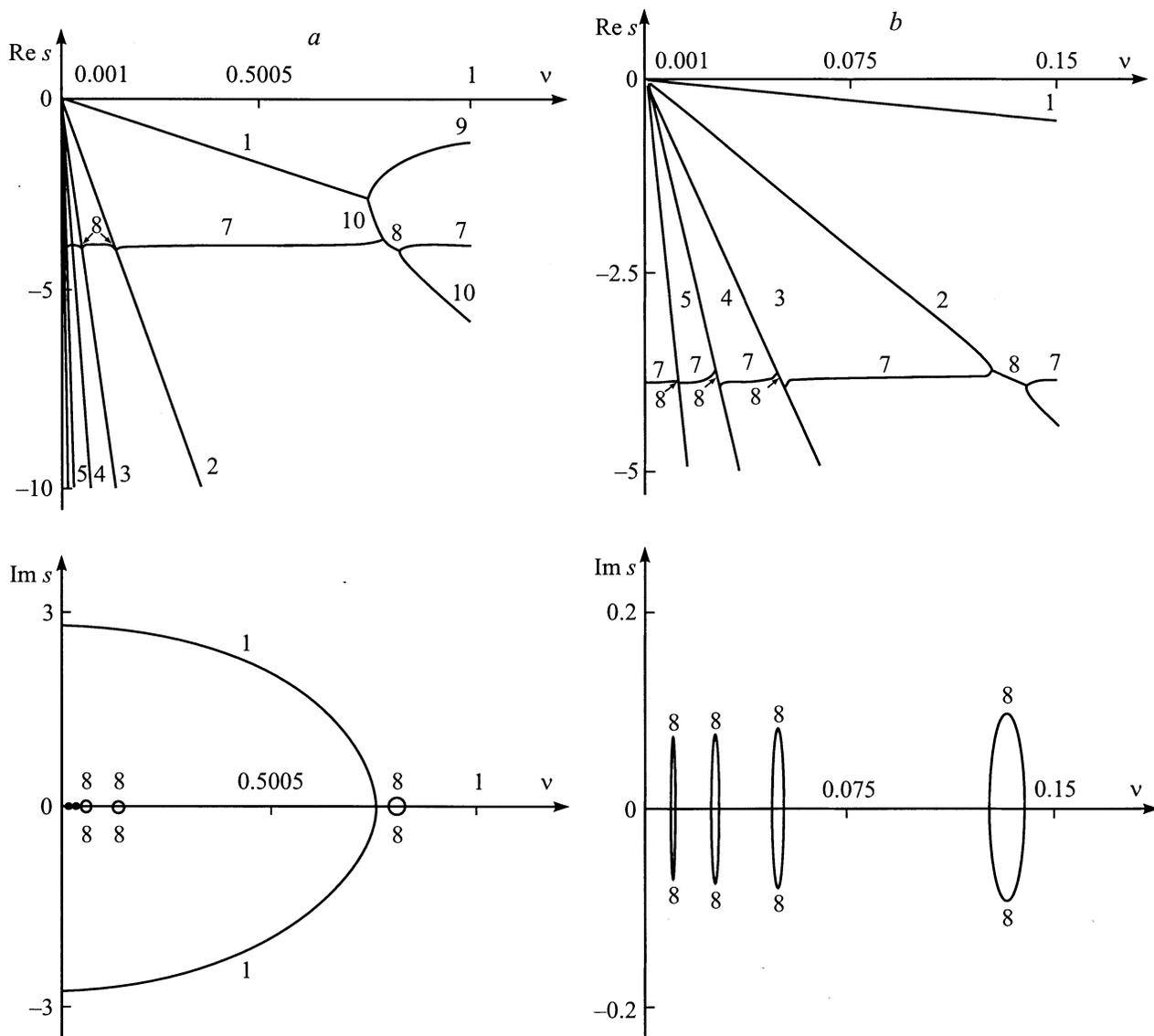


Рис. 2. Зависимость вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерной вязкости ν .

а потому эти движения следует интерпретировать как апериодические.

На рис. 2, *a-c* представлена зависимость вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерной вязкости ν при $n = 2$, $\sigma = 25$, $b = 0.5$, $Q = 1$ и $\varepsilon = 80$. Номера кривых 1-8 соответствуют приведенным на рис. 1. Кривые 9 и 10 соответствуют декрементам капиллярно-полоидальных движений жидкости. Видно, что с ростом вязкости происходит линейное увеличение декрементов затухания ветвей 1-6. При этом, как и на рис. 1, происходит взаимодействие ветви 7, соответствующей релаксационным движениям жидкости, с ветвями 2-6, соответствующими полоидальными движениями, и с ветвью 10, соответствующей капиллярно-полоидальным движениям. На рис. 2, *b* в более крупном масштабе приведена область взаимо-

действий релаксационной ветви 7 с полоидальными ветвями 2-5. На рис. 2, *c* приведена в более крупном масштабе область взаимодействия ветви 7 с капиллярно-полоидальной ветвью 10. При этом следует отметить, что декремент затухания релаксационных движений 7, связанных с перераспределяющимся зарядом, практически не меняется с ростом вязкости.

В общем случае для жидкости с конечной электропроводностью декремент затухания χ_n капиллярных осцилляций должен зависеть от величины электропроводности σ и поверхностной подвижности носителей заряда b . Численные расчеты показывают, что величина декремента затухания χ_n капиллярных осцилляций капли, связанного с излучением ею электромагнитных волн (его можно выделить из полного декремента затухания, полагая $n = 0$), растет в представляющем интерес с

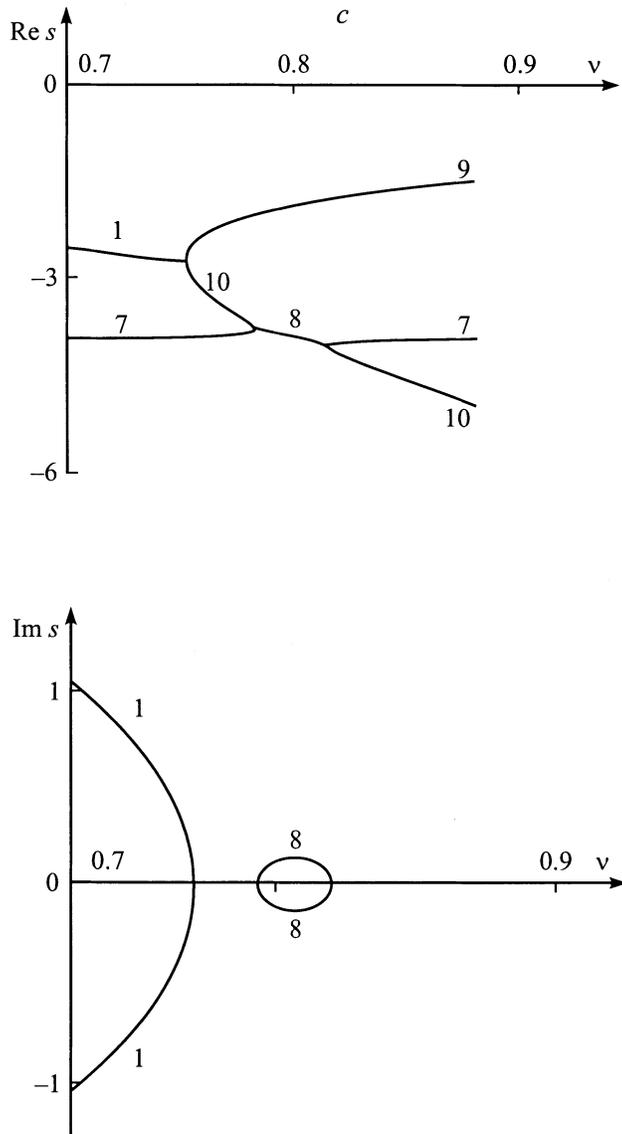


Рис. 2 (продолжение).

позиций возможных приложений в геофизике диапазоне значений электропроводности жидкости σ и поверхностной подвижности носителей заряда b по линейному закону с увеличением σ и b , как это видно из рис. 3, 4, где приведены соответствующие зависимости для моды с $n = 100$. Столь высокая мода выбрана, чтобы интенсивность излучения электромагнитных волн, характеризующая в рассматриваемой ситуации декрементом затухания $\sim n^2$, имела значимые для геофизических приложений величины (например, электромагнитное излучение от грозных облаков [6] или от огней св. Эльма, появляющихся на обшивке летящих в облаках самолетов и создающих интенсивные радиопомехи [12]). Интенсивность электромагнитного излучения зависит от декремента затухания, связанного с излучением электромагнитных волн, по закону $\sim \chi_n \cdot \exp(2\chi_n t)$. Из рис. 3, где кривой 2 представлена зависимость $\chi_n = \chi_n(\sigma)$, рассчитанная

численно для маловязкой жидкости ($\nu = 10^{-9}$), видно, что вклад в полный декремент затухания, связанный с вязкостью, не зависит от σ и влияние вязкости сводится к простому вертикальному сдвигу зависимости $\chi_n = \chi_n(\sigma)$, полученной для невязкой жидкости.

Численный расчет по (4.2) показывает, что с увеличением заряда капли Q (с увеличением поверхностной

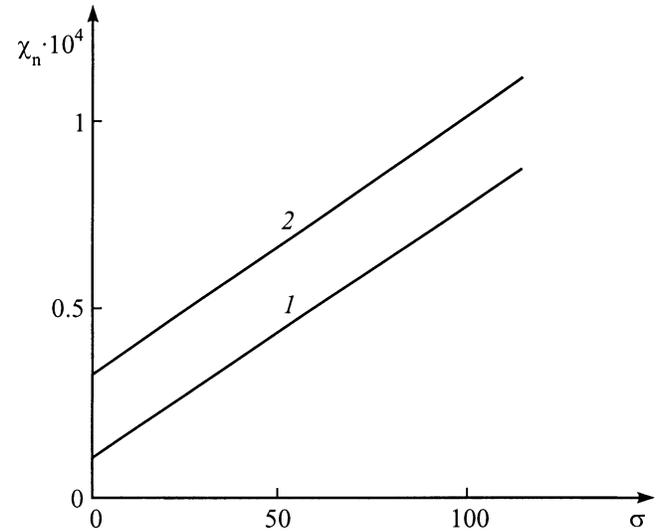


Рис. 3. Зависимость величины безразмерного декремента затухания χ_n капиллярных осцилляций капли, связанного с электромагнитным излучением, от безразмерной электропроводности жидкости. $n = 100$, $Q = 1$, $b = 0.5$, $\varepsilon = 80$; ν : 1 — 0, 2 — 10^{-9} .

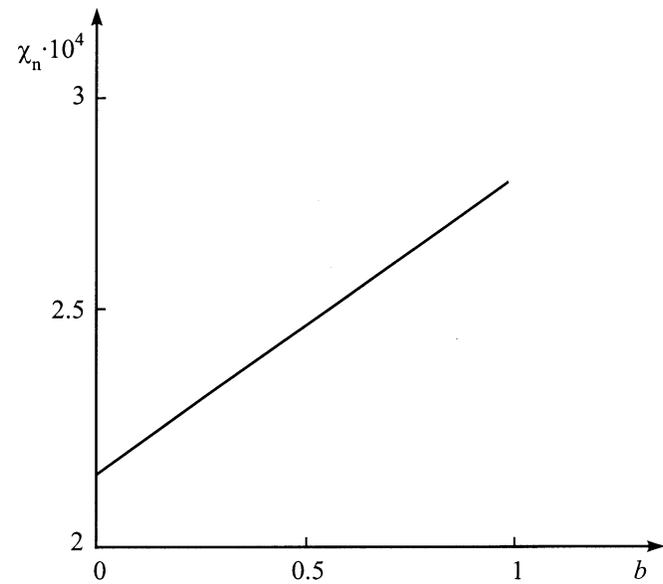


Рис. 4. Зависимость величины безразмерного декремента затухания χ_n капиллярных осцилляций капли, связанного с электромагнитным излучением, от безразмерной поверхностной подвижности носителей заряда. $n = 100$, $Q = 1$, $\sigma = 25$, $\varepsilon = 80$, $\nu = 0$.

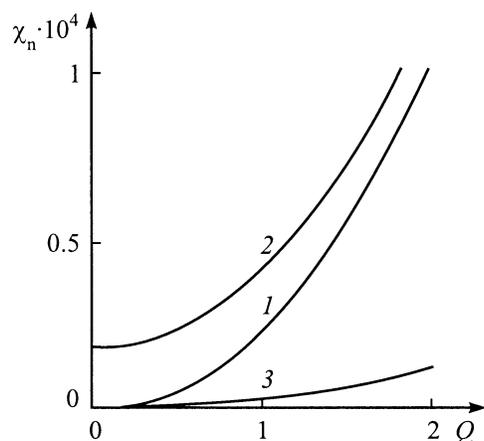


Рис. 5. Зависимость величины безразмерного декремента затухания χ_n капиллярных осцилляций капли, связанного с электромагнитным излучением, от безразмерного заряда капли. $n = 100$, $\varepsilon = 80$; 1 — $\nu = 0$, $b = 0.5$, $\sigma = 25$; 2 — $\nu = 10^{-9}$, $b = 0.5$, $\sigma = 25$; 3 — $\nu = 0$, $b = 0$, $\sigma = 0$.

плотности заряда κ) при конечных значениях электропроводности σ и подвижности b декремент χ_n как для идеальной (кривая 1), так и для маловязкой (кривая 2) жидкости растет квадратично по Q (рис. 5). Кривой 3 на рис. 5 приведена зависимость от Q декремента затухания осцилляций, связанного с излучением электромагнитных волн, заряженной капли невязкой непроводящей жидкости ($Q \neq 0$, $\nu = 0$, $\sigma = 0$, $b = 0$). Интересным представляется тот факт, что декремент отличен от нуля для чисто диэлектрической жидкости, когда заряд „вморожен“ в поверхность капли, т.е. заряженная диэлектрическая капля при осцилляциях также излучает электромагнитные волны хотя с заметно меньшей интенсивностью.

Влияние вязкости ν , не сказываясь на функциональной зависимости декремента затухания χ_n капиллярных осцилляций капли, связанного с излучением ею электромагнитных волн $\chi_n = \chi_n(\sigma, b, Q)$, проявляется в снижении с увеличением ν частот колебаний поверхности вплоть до полного их исчезновения, что приведет к прекращению электромагнитного излучения капель на соответствующей частоте. Численные расчеты показывают, что осцилляции моды с $n = 100$ прекращаются при $\nu \approx 0.05$, а основной моды с $n = 2$ — при $\nu \approx 0.75$.

Заключение

По сравнению с каплей идеально проводящей жидкости учет конечности скорости перераспределения заряда и потерь энергии капиллярных колебаний на излучение приводит к увеличению декрементов затухания всех мод капиллярных осцилляций капли и к усложнению структуры спектра реализующихся движений жидкости. Вклад в величину декремента затухания, связанный с излучением заряженной каплей электромагнитных волн,

растет с увеличением электропроводности жидкости и подвижности носителей заряда по линейному закону. При увеличении электропроводности жидкости полоидальные вихревые движения в капле взаимодействуют с приповерхностными движениями жидкости, генерируемыми перераспределяющимся зарядом. Рост вязкости, сказываясь лишь на величине декремента затухания капиллярных и полоидальных движений жидкости в капле, приводит к появлению взаимодействия этих движений с приповерхностными движениями жидкости, обусловленными перераспределяющимся при осцилляциях капли электрическим зарядом.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ 00-15-9925).

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [3] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 22–27.
- [4] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.
- [5] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И. Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью // Препринт ИМИ РАН № 31. Ярославль. 2001. 87 с.
- [6] Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полэктов П.П. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [7] Ширяева С.О., Лазарянец А.Э. и др. Метод скаляризации векторных краевых задач. Препринт ИМРАН. Ярославль, 1994. № 27. 126 с.
- [8] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.
- [10] Hendricks C.D., Schneider J.M. // J. Amer. Phys. 1963. Vol. 1. № 6. P. 450–453.
- [11] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 11–17.
- [12] Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O. // J. Sci. Expl. 1991. Vol. 5. N 2. P. 163–190.