Краткие сообщения

01

Связь между разложениями внешнего потенциала по шаровым функциям и сфероидальным гармоникам

© В.А. Антонов, А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 11 апреля 2001 г. В окончательной редакции 9 июля 2001 г.)

Выведены формулы, связующие коэффициенты разложения внешних потенциалов произвольных ограниченных тел по шаровым и сфероидальным функциям. Эти формулы более компактны и удобны, чем предполагавшиеся другими авторами.

Введение

Проблема связи разных разложений гармонических функций в настоящее время весьма актуальна применительно к разнообразным электростатическим задачам, в частности, к вычислению емкостных характеристик систем тел. Аналогичные задачи встречаются в связи с распространением электромагнитных и звуковых волн при наличии препятствий, характерный размер которых много меньше длины волны.

Математически та же самая задача встает применительно к движению искусственных небесных тел. Правила перехода для функций, гармонических во внешнем пространстве, разложенных по сфероидальным гармоникам, к разложению по обычным сферическим гармоникам и обратно были, по-видимому, впервые разработаны в [1] в еще очень громоздком виде. В классических руководствах [2–4] эти разложения используются сами по себе, без указания связи между ними.

Компактные формулы указанной связи без вывода даны в [5], они воспроизведены также в [6], но, как мы покажем ниже, одна из его формул ошибочна, хотя правильная формула имеет примерно ту же структуру. Также одна из формул связи приведена в [7], но мимоходом, среди сходных и более общих формул, причем ее использование затруднительно из-за отсутствия четкого указания на нормировку функций. Между тем в работах [8–10], авторам которых работа [5] оставалась неизвестной, формулы перехода [1] были несколько усовершенствованы, но еще не достигли оптимальной лаконичности. Эти обстоятельства заставляют рассмотреть проблему заново.

Вывод формул

Как только что было сказано, мы должны рассматривать элементарные гармонические функции двоякого рода: шаровые и сфероидальные

$$U_{nk} = r^{-n-1} P_n^{|k|}(\cos\theta) e^{ik\psi}, \tag{1}$$

$$V_{nk} = q_n^{|k|}(\tau) P_n^{|k|}(t) e^{ik\psi}$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots, -n \le k \le n). \tag{2}$$

Здесь P_n^k — присоединенные функции Лежандра первого рода; r, θ, ψ — обычные полярные координаты в пространстве; сфероидальные координаты t, τ, ψ связаны с ними и с декартовыми координатами x, y, z посредством соотношений

$$r \sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2} = c\sqrt{(1 - t^2)(1 + \tau^2)},$$
$$r \cos\theta = z = ct\tau \, (-1 \le t \le 1, \tau \ge 0), \tag{3}$$

где $2c$ — фокальное расстояние в выбранной системе сфероидальных координат (используется система, связанная со сжатым сфероидом, как практически более важная для задач математической физики).

Достаточно в дальнейшем рассматривать случай $k \ge 0$, поскольку переход к отрицательным k эквивалентен просто комплексному сопряжению. Функции $q_n^k(\tau)$ по своему смыслу — это присоединенные функции Лежандра второго рода мнимого аргумента, но для них разные авторы дают несколько разные определения, отличающиеся нормировочными коэффициентами. Из соображений наглядности придерживаемся той нормировки, при которой $q_n^k(\tau) = \tau^{-n-1} + O(\tau^{-n-3})$, поскольку тогда при $c = 1$ обе функции (1) и (2) на больших расстояних r асимптотически совпадают. Тогда, как известно,

$$\frac{q_n^k(\tau)}{(1 + \tau^2)^{k/2}} = \frac{(2n+1)!!}{(n+k)!} \times \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(m+k)!(-1)^{(n-m)/2}}{(m-n)!!(n+m+1)!!} \tau^{-m-k-1}. \tag{4}$$

С другой стороны, также известна формула (которую представляем в нашей нормировке)

$$\frac{1}{y - x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(2m-1)!!} P_m(x) Q_m(y), \tag{5}$$

$Q_m(y)$ — функции Лежандра второго рода с нормировкой на бесконечности $Q_m(y) = y^{-m-1} + \ldots$; x и y — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие неравенству $|x| < |y|$.

В результате подстановки в формулу (5) $y = iu$ получаем

$$\frac{1}{iu - x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(2m-1)!!} P_m(x) i^{-m-1} q_m(u)$$

или

$$\frac{1}{u + ix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{-m} m!}{(2m-1)!!} P_m(x) q_m(u). \tag{6}$$

Мы должны еще принять во внимание известное представление полинома Лежандра

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{n}{}^{*} (-1)^{(m-n)/2} \frac{(m+n-1)!!}{n!(m-n)!!} x^n. \tag{7}$$

В формуле (7) и далее звездочка при знаке суммы означает, что используются только члены с одинаковой четностью m и n. Тогда соотношение (6) принимает вид

$$\frac{1}{u + ix} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m}{}^{*} i^{-m} (-1)^{(m-n)/2} \times \frac{(m+n-1)!! m!}{n!(m-n)!!(2m-1)!!} x^n q_m(u), \tag{8}$$

где u и x можно считать вещественными с ограничением $u > x$.

Выделим в (8) слева и справа члены с одинаковыми степенями x^n. Тогда

$$u^{-n-1} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \frac{(m+n-1)!! m!}{(m-n)!!(2m-1)!!} q_m(u).$$

Дифференцируя это соотношение k раз, находим

$$u^{-n-k-1} = \frac{1}{(n+k)!} \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \frac{(m+n-1)!!(m+k)!}{(m-n)!!(2m-1)!!} \times \frac{q_m^k(u)}{(1+u^2)^{k/2}}. \tag{9}$$

Установив таким образом ряд вспомогательных соотношений, обращаемся непосредственно к построению искомых коэффициентов α и β в формулах связи, которые должны иметь вид

$$U_{nk} = \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \alpha_{nmk} V_{mk}, \quad V_{nk} = \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \beta_{nmk} U_{mk}. \tag{10}$$

В формулах (10) мы сразу учли естественные ограничения: индекс k не участвует в суммировании, а суммирование по m ограничено значениями одинаковой четности с заданным n. Все это непосредственно следует из соображений симметрии и учитывается в упомянутых работах [1,8–10]. Для определения α и β достаточно рассматривать не все точки пространства, а только близкие к полярной оси, т.е. брать асимптотику при малых θ. Прежде всего, известно $P_n^k(\cos\theta) = 2^{-k}\{(n+k)!/[k!(n-k)!]\} \sin^k\theta + O(\sin^{k+2}\theta)$. Соответственно

$$U_{nk} \approx z^{-n-1} e^{ik\psi} \frac{2^{-k}(n+k)!}{k!(n-k)!} \sin^k\theta \approx \frac{2^{-k}(n+k)!}{k!(n-k)!} \frac{(x+iy)^k}{z^{n+k+1}} \tag{11}$$

вблизи полярной оси. Для аналогичного представления V_{nk} надо сперва осуществить переход от сфероидальных координат к декартовым $c(1-t^2)^{1/2} = [(x^2+y^2)/(1+\tau^2)]^{1/2} = \{(x^2+y^2)/[1+(z/ct)^2]\}^{1/2}$. Следовательно, в том же приближении вблизи оси

$$V_{nk} \approx q_n^k\left(\frac{z}{c}\right) e^{ik\psi} \cdot 2^{-k} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \frac{(x^2+y^2)^{k/2}}{c^k\left[1+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^{1/2}} = 2^{-k} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} (x+iy)^k \frac{q_n^k\left(\frac{z}{c}\right)}{c^k\left[1+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{12}$$

Подставляя формулы (11) и (12) в первое соотношение (10), мы учитываем в разложении по x и y только главные члены порядка $(x+iy)^k$, которые должны совпадать независимо от последующих членов более высокого порядка малости. Следовательно, после подстановки $z/c = u$ имеем

$$\frac{(n+k)!}{(n-k)!} u^{-n-k-1} = \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \alpha_{nmk} \frac{(m+k)!}{(m-k)!} c^{n+1} \frac{q_m^k(u)}{(1+u^2)^{k/2}}. \tag{13}$$

Сравнение (13) с (9) дает

$$\alpha_{nmk} = \frac{c^{-n-1}}{(n-k)!} \frac{(m+n-1)!!(m-k)!}{(m-n)!!(2m-1)!!}. \tag{14}$$

Совершенно аналогично получаем равенство

$$\frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{q_n^k(u)}{(1+u^2)^{k/2}} = \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \beta_{nmk} \frac{(m+k)!}{(m-k)!} c^{-m-1} u^{-m-k-1}, \tag{15}$$

и сравнение (15) с (4) дает

$$\beta_{nmk} = \frac{(2n+1)!!}{(n-k)!} \frac{(m-k)!(-1)^{(n-k)/2}}{(m-n)!!(n+m+1)!!} c^{m+1}. \tag{16}$$

Теперь, опираясь на (14) и (16), можем написать формулы связи в окончательном виде

$$U_{nk} = \frac{c^{-n-1}}{(n-k)!} \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \frac{(m+n-1)!!(m-k)!}{(m-n)!!(2m-1)!!} V_{mk}, \tag{17}$$

$$V_{nk} = \frac{(2n+1)!!}{(n-k)!} \sum_{m=n}^{\infty}{}^{*} \frac{(-1)^{(n-m)/2}(m-k)! c^{m+1}}{(m-n)!!(m+n+1)!!} U_{mk}. \tag{18}$$

Формула (17) с учетом другой нормировки и обозначений совпадает с приводимой в [5,6], но для (18) совпадения нет. Одним из способов проверки формулы (18) — это сравнение левой и правой части при расположении точки на экваторе ($t = 0$). Тогда (18) превращается просто в разложение $q_n^k(\tau)$ по обратным степеням $1+\tau^2$ и легко проверяется.

Формулы (17) и (18) можно проверить по их взаимной согласованности: подстановка одной формулы в другую должна давать тождество (сумма по m определяется с помощью перехода к интегральному представлению бэта-функции Эйлера).

Напомним еще раз, что в литературе встречаются разные системы сфероидальных гармонических функций, различающиеся нормировкой. Но переход от одной нормировки к другой в формулах (17) и (18) вполне элементарен, выражения для α и β так и остаются достаточно простыми одночленами.

Были также предложения [11] использовать разложения, связанные с трехосными эллипсоидами. По-видимому, формулы связи с разложением по шаровым функциям можно дать и в этом случае.

Список литературы

[1] *Notine M.* Mathematical Geodesy. ESSA Monograph. N 2. Washington, D. C.: Department of Commerce, 1969.

[2] *Heine E.* Handbuch der Kugelfunctionen. Band II. Anwendungen der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen. Berlin, 1881.

[3] *Гобсон Е.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.

[4] *Lyttleton R.A.* The Stability of rotating Liquid Masses. Cambridge: University Press, 1953.

[5] *Проценко В.С.* // ДАН УССР. Сер. А. 1984. № 6. С. 32–34.

[6] *Ерофеенко В.Т.* Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989.

[7] *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.

[8] *Jekeli C.* // Manuscripta Geodaetica. 1988. Vol. 13. N 2. P. 106–113.

[9] *Gleason D.M.* // Manuscripta Geodaetica. 1988. Vol. 13. N 2. P. 114–129.

[10] *Petrovskaya M.S., Vershkov A.N.* // Bolletino di Geodesia e Scienze Affini. 2000. Vol. 59. N 1. P. 57–72.

[11] *Загребин Д.В.* Основы геометрической геодезии. Л.: Наука, 1981.