

01;02

Структурный фактор двухкомпонентного конденсата Бозе–Эйнштейна

© И.В. Казинец,¹ Б.Г. Матисов,¹ И.Е. Мазец²

¹Санкт-Петербургский государственный технический университет,
194251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: quark@citadel.stu.neva.ru

²Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 27 июня 2001 г.)

Получено выражение для структурных факторов однокомпонентного и двухкомпонентного конденсата Бозе–Эйнштейна нейтральных атомов в сферически-симметричной гармонической ловушке. Используемый подход применим в пределе малых энергий возбуждения, где имеет место известное в литературе дисперсионное соотношение, выведенное Стрингари. Полученное нами выражение сравнивается с квазиклассическим, которое, как показано, дает завышенную оценку для структурного фактора. Обоснованы выводы о том, что присутствие конденсата второй компоненты приводит, во-первых, к расщеплению частоты коллективных колебаний конденсата, которая соответствует переданной при рассеянии энергии, на две ветви, а во-вторых, — к умножению однокомпонентного структурного фактора на некоторый коэффициент, который может быть больше единицы. Проведенный анализ используется для оценок свойств экспериментально реализованного двухкомпонентного конденсата атомов ⁸⁷Rb.

Введение

Динамический структурный фактор является важной характеристикой, определяющей поведение многочастичных систем. В частности, он дает информацию о спектре коллективных возбуждений при рассеянии с малым переданным импульсом, а также характеризует импульсное распределение при передаче достаточно большого импульса, когда отклик системы определяется одночастичными эффектами. Для разреженных газов он может быть измерен экспериментально, например, с помощью неупругого рассеяния света на бозонном газе, находящемся в магнитной ловушке [1].

Ниже в качестве многочастичной системы мы рассматриваем бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) разреженного газа в сферически-симметричной гармонической ловушке. Межчастичное взаимодействие предполагается достаточно слабым, чтобы обеспечить применимость известной теории Боголюбова для слабозаимодействующего вырожденного бозонного газа [2] и последующих модификаций этой теории, учитывающих наличие внешнего пленяющего потенциала [3,1].

Существует несколько работ, посвященных вычислению структурного фактора БЭК слабо неидеального газа. Рассматривались как пространственно однородные [5,6], так и неоднородные [7–9] газы. Следует заметить, что для пространственно однородного БЭК вычисления достаточно просты, в то время как для БЭК в гармонической ловушке задача не имеет точного решения. В последнем случае необходимо использовать некоторое приближение. В частности, в работе [7] использовалось квазиклассическое приближение, а в [9] — приближение локальной плотности и импульсное приближение. Данные приближения применимы только для достаточно больших переданных импульсов. Например в [9] $q \gg 1/R$, где

R — размер конденсата, $\hbar q$ — переданный при рассеянии импульс. Для малых переданных импульсов отклик системы чувствителен к дискретным модам коллективных возбуждений этой системы. Теоретический анализ динамического структурного фактора однокомпонентного БЭК в режиме малых переданных импульсов выполнен в работе [8], где использовались формализм квантования гидродинамических уравнений, описывающих коллективные колебания БЭК, и приближение Томаса–Ферми.

В настоящей работе мы получаем выражение для динамического структурного фактора в приближении Томаса–Ферми для однокомпонентного и двухкомпонентного БЭК. Используемый формализм отличается от [8] большей наглядностью и простотой. В отличие от [8], где формулируется лишь общий подход, мы выводим формулы для структурного фактора в замкнутом аналитическом виде. Кроме того, результат, полученный для однокомпонентного конденсата, мы сравниваем с квазиклассическим, полученным в [7]. В пределах области своей применимости квазиклассический результат дает завышенную оценку; однако оба выражения для структурного фактора равны нулю при тех же значениях переданного импульса $\hbar q$. Таким образом, квазиклассическое выражение для структурного фактора, полученное в [7], может быть использовано в рамках его применимости для вычисления тех значений переданного импульса $\hbar q$, при которых структурный фактор равен нулю.

Для двухкомпонентного конденсата зависимость частичного (рассеяние фотона только на атомах одной компоненты) структурного фактора от q не меняется, однако происходит расщепление передаваемой при рассеянии энергии на две ветви, причем для каждой из этих ветвей структурный фактор домножается на коэффициент β^+ и β^- соответственно. Важно заметить,

что при определенной комбинации амплитуд рассеяния компонент β может быть больше единицы, что соответствует усилению рассеяния фотонов одной из компонент БЭК из-за наличия другой.

Однокомпонентный конденсат

Как известно, дифференциальное сечение рассеяния $d^2\sigma_N/(d\Omega d\omega)$ некоторой частицы на образце, состоящем из N атомов, выражается через сечение рассеяния $d\sigma_1/d\Omega$ на одном атоме следующим образом [7,10]:

$$\frac{d^2\sigma_N}{d\Omega d\omega} = S(\mathbf{q}, \omega) \frac{d\sigma_1}{d\Omega},$$

где $\hbar\mathbf{q}$ — импульс, передаваемый образцу частицей, рассеиваемой в телесный угол $d\Omega$; $\hbar\omega$ — передаваемая при этом энергия; $S(\mathbf{q}, \omega)$ — динамический структурный фактор образца, определяемый выражением [10]

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \sum_f \tilde{S}_f(\mathbf{q}) \delta(\omega - \omega_f),$$

$$\tilde{S}_f(\mathbf{q}) = \left| \langle f | \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) | 0 \rangle \right|^2. \quad (1)$$

Здесь $|0\rangle$ — основное состояние БЭК; $|f\rangle$ и $\hbar\omega_f$ — возбужденное состояние и энергия возбуждения БЭК соответственно; $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ — полевой оператор, вводящийся в формализме вторичного квантования многочастичной системы (БЭК). Под рассеиваемой частицей подразумевается фотон, однако в общем случае может быть и другой объект (например, нейтрон). Для простоты мы работаем в формализме $T = 0$, так как современная экспериментальная техника позволяет приготовить ультрахолодный атомный ансамбль с практически незаметной надконденсатной фракцией [11].

Согласно приближению Боголюбова, мы представляем атомный полевой оператор как сумму c -числовой части, соответствующей БЭК, и достаточно малой операторной части, соответствующей коллективным колебаниям конденсата. Операторная часть может быть выражена через операторы рождения $\hat{\alpha}_f^\dagger$ и уничтожения $\hat{\alpha}_f$ квазичастиц, отвечающих за возмущения конденсата с энергией $\hbar\omega_f$ (см., например, [4]),

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \exp(i\phi_0) \left[\psi_0(\mathbf{r}) \sqrt{N_0} + \sum_f (u_f(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_f - v_f^*(\mathbf{r}) \hat{\alpha}_f^\dagger) \right], \quad (2)$$

где ϕ_0 — постоянная фаза конденсата; ψ_0 — действительная функция, удовлетворяющая не зависящему от времени уравнению Гросса–Питаевского и нормированная на единицу

$$\int d\mathbf{r} \psi_0^2(\mathbf{r}) = 1, \quad (3)$$

N_0 — число атомов в конденсате.

Коэффициенты u_f и v_f преобразования Боголюбова нормированы условием

$$\int d\mathbf{r} [u_f(\mathbf{r}) u_{f'}^*(\mathbf{r}) - v_f(\mathbf{r}) v_{f'}^*(\mathbf{r})] = \delta_{ff'}, \quad (4)$$

которое дает стандартные бозонные коммутационные соотношения для операторов квазичастиц. Подставляя разложение (2) в (1), имеем

$$\tilde{S}_f(\mathbf{q}) = N_0 \left| \int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) [u_f^*(\mathbf{r}) - v_f^*(\mathbf{r})] \psi_0(\mathbf{r}) \right|^2. \quad (5)$$

Таким образом, для вычисления динамического структурного фактора необходимы аналитические выражения для u_f и v_f , которые обычно определяются как решение системы дифференциальных уравнений. Эта система, в частности, может быть решена численно [12]. Однако для получения аналитического выражения необходимо использовать дополнительные приближения. В частности, для достаточно большого числа атомов конденсата N_0 может быть использовано приближение Томаса–Ферми [13,14], которое применимо при $N_0 \gg a_{HO}/a$, где

$$a_{HO} = \sqrt{\hbar/(M\omega_0)} \quad (6)$$

— длина гармонической сферически-симметричной ловушки с частотой ω_0 , M — масса атома, a — амплитуда s -рассеяния ультрахолодных атомов друг на друге в борновском приближении; в рамках этого приближения пренебрегается кинетической энергией по сравнению с энергией межчастичного взаимодействия и энергией взаимодействия с внешним потенциалом.

При температурах, много меньших температуры конденсации Бозе–Эйнштейна, среднее значение бозонного полевого оператора $\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle = \Psi(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi(\mathbf{r}, t)]$ удовлетворяет уравнению Гросса–Питаевского [15]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \exp(i\phi) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} - \mu + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g\Psi^2 \right] \times \Psi \exp(i\phi), \quad (7)$$

где $g = 4\pi\hbar^2 a/M$ и μ — химический потенциал основного состояния БЭК.

Перейдем далее к формализму [13], в рамках которого низкоэнергетические возбуждения описываются с помощью бесстолкновительного гидродинамического подхода, оперирующего с возмущением плотности $\delta n(\mathbf{r}, t)$ и гидродинамической скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, определяемых уравнениями

$$N_0 \psi_0^2(\mathbf{r}) + \delta n(\mathbf{r}, t) = \Psi^2(\mathbf{r}, t),$$

$$M\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \hbar \nabla \phi(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

Рассматривая δn и \mathbf{v} как малые параметры, из (7) получаем линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n(\mathbf{r}, t) = \frac{gN_0}{M} \nabla[\psi_0^2(\mathbf{r}) \nabla \delta n(\mathbf{r}, t)]. \quad (9)$$

При выводе (9) мы пренебрегли слагаемым кинетической энергии

$$\frac{\hbar^2}{2M\Psi(\mathbf{r}, t)} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t)$$

по сравнению с энергией межчастичного взаимодействия $g\Psi^2(\mathbf{r}, t)$ и внешним потенциалом $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, что соответствует приближению Томаса–Ферми и что можно сделать при достаточно большом N_0 .

Функция $\psi_0(\mathbf{r})$ определяется из (7) и в приближении Томаса–Ферми для сферически-симметричной ловушки ($V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = M\omega_0^2 r^2/2$) имеет вид

$$\psi_0^2(\mathbf{r}) = \frac{M}{gN_0} \frac{\omega_0^2}{2} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (10)$$

для $r \leq R$ и $\psi_0^2(\mathbf{r}) = 0$ для $r > R$. Здесь $R = \sqrt{2\mu/(M\omega_0^2)}$ — радиус БЭК, определяемый условием $\mu = V_{\text{ext}}(R)$. Из условия нормировки (3) получаем

$$R = a_{HO} \left(15N_0 \frac{a}{a_{HO}} \right)^{1/5}, \quad (11)$$

где a_{HO} определяется (6).

Представим действительную функцию $\delta n(\mathbf{r}, t)$ в виде разложения по элементарным возбуждениям с частотой ω_f : $\delta n(\mathbf{r}, t) = \sum_f [\delta n_f(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_f t) + \delta n_f^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega_f t)]$. Тогда из (9) с учетом (10) получим

$$-2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 \delta n_f(\mathbf{r}) = \nabla_{\left(\frac{r}{R}\right)} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \nabla_{\left(\frac{r}{R}\right)} \delta n_f(\mathbf{r}) \right\}. \quad (12)$$

Для рассматриваемой ловушки естественными квантовыми числами элементарного возбуждения f -й моды являются радиальное квантовое число n , орбитальный момент l и его проекция m на ось z

$$\delta n_f(\mathbf{r}) = \delta n_{nlm}(\mathbf{r}) = F_{nl}(r/R) Y_{lm}(\Theta, \phi),$$

$$F_{nl}(r) = \sum_{k=0}^n G_k^{(nl)} r^{l+2k}, \quad (13)$$

где $Y_{lm}(\Theta, \phi)$ — собственная функция оператора момента.

Подставляя данное разложение в (12), получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$C_{k+1}^{(nl)} = C_k^{(nl)} \frac{K_{kl} - (\omega_{nlm}/\omega_0)^2}{(k+1)(2l+2k+3)},$$

$$K_{kl} = 2k^2 + 2kl + 3k + l. \quad (14)$$

Условие ограниченности $\delta n_f|_{r=R}$ требует, чтобы ряд оборвался при некотором ограниченном n : $C_{n+1}^{(nl)} = 0$. В результате мы получаем выражение для частот коллективных колебаний достаточно большого числа атомов, находящихся в ловушке, характеризуемой частотой ω_0 , и имеющих температуру, много меньшую температуры

конденсации Бозе–Эйнштейна: $\omega_{nl} = \omega_0 \sqrt{K_{nl}}$. Окончательно для элементарного возмущения конденсата с частотой ω_{nl} имеем

$$\delta n_{nlm}(\mathbf{r}) = \left[\sum_{k=0}^n C_k^{(nl)} \left(\frac{r}{R} \right)^{l+2k} \right] Y_{lm}(\Theta, \phi), \quad (15)$$

где

$$C_k^{(nl)} = C_0 (-1)^k \prod_{k'=0}^{k-1} \frac{(n-k')(2n+3+2l+2k')}{(k'+1)(3+2l+2k')}$$

$$= C_0 (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(1+2n+2l+2k)!!}{(1+2n+2l)!!}$$

$$\times \frac{(1+2l)!!}{(1+2l+2k)!!}, \quad (16)$$

R определяется из (11) и C_0 — нормировочная константа, которую положим равной единице; выражение (15) применимо для низколежащих мод с энергиями, много меньшими химического потенциала БЭК.

Для установления связи между трансформационными коэффициентами Боголюбова $u_f(\mathbf{r})$, $v_f(\mathbf{r})$ и величиной $\delta n_f(\mathbf{r})$ предположим, что ансамбль ультрахолодных атомов возбужден таким образом, что присутствует только f -я мода, являющаяся когерентным состоянием, т.е. отличны от нуля только $\langle \hat{\alpha}_f \rangle = \lambda_f \exp(-i\omega_f t)$ и $\langle \hat{\alpha}_f^\dagger \rangle = \lambda_f^* \exp(i\omega_f t)$. Таким образом, мы имеем

$$\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle = \Psi(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi(\mathbf{r}, t)]$$

$$= \exp(i\phi_0) [\psi_0(\mathbf{r}) \sqrt{N_0} + \lambda_f u_f(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_f t) - \lambda_f^* v_f^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega_f t)]. \quad (17)$$

С другой стороны, используя выражение (8), получаем

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi(\mathbf{r}, t)]$$

$$= \sqrt{N_0 \psi_0^2(\mathbf{r}) + \delta n(\mathbf{r}, t)} \exp\{i[\phi_0 + \delta\phi(\mathbf{r}, t)]\}$$

$$\simeq \sqrt{N_0} \psi_0 \left(1 + \frac{\delta n(\mathbf{r}, t)}{2N_0 \psi_0^2(\mathbf{r})} + i\delta\phi(\mathbf{r}, t) + \dots \right) \exp(i\phi_0)$$

$$= \exp(i\phi_0) \left[\sqrt{N_0} \psi_0(\mathbf{r}) \right.$$

$$+ \left(\frac{\delta n_f(\mathbf{r})}{2\sqrt{N_0} \psi_0(\mathbf{r})} + i\sqrt{N_0} \psi_0(\mathbf{r}) \delta\phi(\mathbf{r}, t) + \dots \right) \exp(-i\omega_f t)$$

$$\left. + \left(\frac{\delta n_f^*(\mathbf{r})}{2\sqrt{N_0} \psi_0(\mathbf{r})} + i\sqrt{N_0} \psi_0(\mathbf{r}) \delta\phi_f^*(\mathbf{r}, t) + \dots \right) \exp(i\omega_f t) \right]. \quad (18)$$

Здесь использовалось разложение в ряд Тейлора, в котором функции $\delta n(\mathbf{r}, t)$ и $\delta\phi(\mathbf{r}, t)$ считались величинами первого порядка малости. Многоточие означает слагаемые второго и высших порядков малости,

которыми в дальнейшем мы пренебрежем. Также использовано представление $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0 + \delta\phi_f(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_f t) + \delta\phi_f^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega_f t)$.

Пользуясь действительной частью уравнения (7) в форме

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = \frac{\hbar^2}{2M} (\nabla \phi)^2 + g\delta n$$

и пренебрегая слагаемым $(\nabla \phi)^2$ (как членом второго порядка малости), получаем соотношение

$$\delta\phi_f(\mathbf{r}) = \frac{g}{i\hbar\omega_f} \delta n_f(\mathbf{r}). \quad (19)$$

Сопоставляя выражения (17) с (18), имеем

$$u_f(\mathbf{r}) = \frac{\delta n_f(\mathbf{r})}{\lambda_f} \left(\frac{1}{2\sqrt{N_0}\psi_0(\mathbf{r})} + \frac{g\sqrt{N_0}\psi_0(\mathbf{r})}{\hbar\omega_f} \right),$$

$$v_f(\mathbf{r}) = \frac{\delta n_f(\mathbf{r})}{\lambda_f} \left(-\frac{1}{2\sqrt{N_0}\psi_0(\mathbf{r})} + \frac{g\sqrt{N_0}\psi_0(\mathbf{r})}{\hbar\omega_f} \right), \quad (20)$$

где $\delta n_f(\mathbf{r}) \equiv \delta n_{nlm}(\mathbf{r})$ дано в (15).

Принимая во внимание тот факт, что оператор в правой части уравнения (12) эрмитов и его собственные числа $(-2K_{nl})$ зависят от n и l , мы можем записать $\int d\mathbf{r} \delta n_{nl}(\mathbf{r}) \delta n_{n'l'}^*(\mathbf{r}) = 0$, если $n \neq n'$ или $l \neq l'$. Таким образом, из (4) мы получаем выражение для нормировочной константы $|\lambda_f|^2 = 2gI/(\hbar\omega_f)$, где

$$I = \int_0^R [F_{nl}(r/R)]^2 r^2 dr$$

$$= \frac{2g}{\hbar\omega_f} R^3 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{C_k^{(nl)} C_j^{(nl)}}{2(k+j+l)+3}. \quad (21)$$

Используя известное разложение плоской волны [16,17] $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \equiv \exp(iqr \cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\vartheta, \varphi) j_l(qr)$, где $j_l(r) = \sqrt{\pi/(2r)} J_{l+\frac{1}{2}}(r)$ — сферическая функция Бесселя, мы получаем окончательное выражение для структурного фактора однокомпонентного конденсата в приближении Томаса–Ферми

$$\tilde{S}_{n,l}^{TF}(q) = \frac{2l+1}{2} \frac{a_{HO}}{a} \left(15N_0 \frac{a}{a_{HO}} \right)^{3/5} \sqrt{K_{nl}}$$

$$\times \frac{\left| \int_0^1 j_l(qR\bar{r}) F_{nl}(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r} \right|^2}{\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n C_k^{(nl)} C_j^{(nl)} / (2k+2j+2l+3)}. \quad (22)$$

Суммирование производится по всем неотрицательным целым значениям n и l , кроме пары $(n, l) = (0, 0)$, которая соответствует основному состоянию конденсата без возбуждения. Величины K_{nl} , $F_{nl}(\bar{r})$ и $C_k^{(nl)}$ определены в (14), (13), (16); $\bar{r} = r/R$.

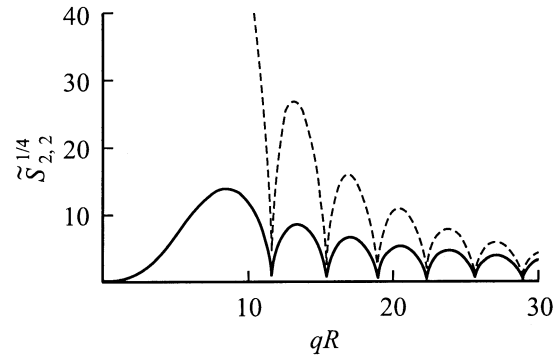


Рис. 1. Структурный фактор как функция переданного импульса, вычисленный по формуле (22) (сплошная кривая) и в квазиклассическом приближении [7] (штриховая кривая). По вертикальной оси для лучшей визуализации отложен структурный фактор в степени 1/4.

На рис. 1 показана зависимость структурного фактора $\tilde{S}_{n,l}(q)$, вычисленного по формуле (22) и по квазиклассической формуле [7], от безразмерного параметра qR , где R — размер конденсата (11), для параметров $N_0 = 10^7$ атомов, $\frac{a_{HO}}{a} \simeq 432$, $n = l = 2$. Как видно, квазиклассический результат дает для $\tilde{S}_{n,l}(q)$ значение, в 2–200 раз большее, чем следует из (22), для qR — в интервале от 10 до 30. Однако функция $\tilde{S}_{n,l}(q)$ равна нулю в обоих приближениях при тех же значениях q (это верно также и для других параметров). Таким образом, для определения нулей функции $\tilde{S}_{n,l}(q)$ может быть использовано в области его применимости квазиклассическое выражение.

Обоснованием того, что выражение (22) корректно, служит то, что оно с высокой степенью точности удовлетворяет правилу сумм для структурного фактора [10], согласно которому

$$m_1(q) = \int \omega S(\mathbf{q}, \omega) d\omega$$

$$= \sum_{n,l} \omega_{n,l} \tilde{S}_{n,l}(q) = N_0 \hbar q^2 / (2M). \quad (23)$$

На рис. 2 показан десятичный логарифм выражений

$$\delta_P(q) = \sum_{n,l=(0,0)}^{2n+l=P} \frac{\omega_{n,l} \tilde{S}_{n,l}^{TF}(q)}{m_1(q)} - 1 \quad (24)$$

при $P = 14, 18, 22$; функция $\tilde{S}_{n,l}^{TF}(q)$ вычисляется из (22). Зависимость $\delta_P(q)$ является последовательным приближением к относительному отклонению величины $\sum_{n,l} \omega_{n,l} \tilde{S}_{n,l}^{TF}(q)$ от $m_1(q) = N_0 \hbar q^2 / (2M)$: $\delta_P(q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sum_{(0,0)}^{\infty} \omega_{n,l} \tilde{S}_{n,l}^{TF}(q) / [m_1(q)] - 1$. Очевидно, что чем больше q , тем большее P (тем большее количество слагаемых ряда) необходимо взять для оценки предела, к которому ряд стремится. Из рис. 2 можно сделать вывод,

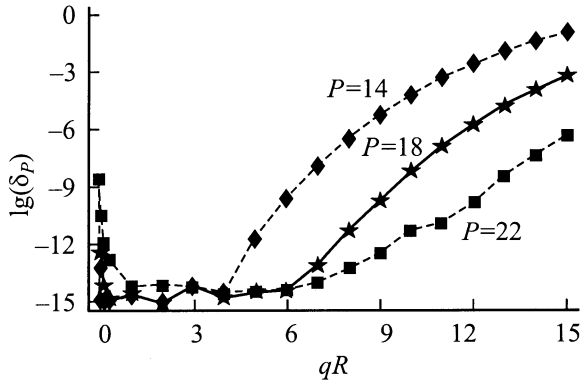


Рис. 2. Выраженная в полулогарифмическом масштабе зависимость $\delta_p(q)$ от qR . Очевидно, что чем больше qR , тем большее количество слагаемых ряда необходимо взять для оценки предела, к которому он стремится.

что $\delta_p(q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} 10^{-14}$. Следует заметить, что квазиклассическое выражение [7] не удовлетворяет правилу сумм (не прослеживается квадратичная зависимость от q). Это позволяет нам заключить, что квазиклассическое выражение значительно завышает структурный фактор БЭК. Этот результат представляется естественным; трудности, связанные с квазиклассической оценкой матричных элементов, известны давно [16].

Двухкомпонентный конденсат

В работе [18] впервые экспериментально продемонстрирована возможность одновременной конденсации двух различных атомных систем. В качестве одной атомной системы использовались атомы ^{87}Rb , находящиеся на сверхтонком подуровне $|F, m_F\rangle = |1, -1\rangle$, а в качестве другой — атомы ^{87}Rb на $|2, 2\rangle$ подуровне. При этом системы атомов с каждым из подуровней формировали два слегка перекрывающихся облака, центр тяжести которых был сдвинут относительно друг друга. В последующих работах [19] удалось воспроизвести двухкомпонентный БЭК, в котором центры конденсатов каждой из компонент совпадали. Здесь использовались $|1, -1\rangle$ и $|2, 1\rangle$ сверхтонкие подуровни ^{87}Rb , которые имеют одинаковый магнитный дипольный момент. В настоящей работе мы будем рассматривать ситуацию, когда центры конденсатов совпадают, а пленяющий потенциал для каждой из компонент имеет вид $V_i = M_i \Omega_i^2 r^2 / 2$, $i = 1, 2$. Теоретически основное состояние двухкомпонентного БЭК исследовалось в [20], а коллективные возбуждения в [21–23]. В частности, в работе [21] показано, что для случая чистого бинарно-фазового конденсата (когда облака конденсатов компонент полностью перекрываются) в сферически-симметричной ловушке в приближении Томаса–Ферми зависимость частоты коллективных возбуждений от радиального и орбитального квантовых чисел возбуждения n и l такая же, как и для однокомпо-

нентного конденсата,

$$\omega_{nl}^\pm = \omega_0^\pm \sqrt{2n^2 + 2nl + 3n + l}, \quad (25)$$

но коэффициент ω_0^\pm имеет два значения, соответствующих двум ветвям скорости звука (двум ветвям дисперсионного соотношения). Этот коэффициент зависит от отношений амплитуд s -рассеяния: a_1 — атомов первой компоненты, a_2 — атомов второй компоненты и a_{12} — атома первой компоненты на атоме второй компоненты и частот ловушки для первой Ω_1 и второй компоненты Ω_2 .

Таким образом, двухкомпонентный конденсат имеет два типа возбуждения и вместо уравнения (2) мы можем записать

$$\hat{\psi}_1 = \exp(i\phi_{01}) \left[\psi_{01} \sqrt{N_1} + \sum_f (u_{11_f} \hat{a}_{1_f} - v_{11_f}^* \hat{a}_{1_f}^\dagger + u_{12_f} \hat{a}_{2_f} - v_{12_f}^* \hat{a}_{2_f}^\dagger) \right], \quad (26a)$$

$$\hat{\psi}_2 = \exp(i\phi_{02}) \left[\psi_{02} \sqrt{N_2} + \sum_f (u_{21_f} \hat{a}_{1_f} - v_{21_f}^* \hat{a}_{1_f}^\dagger + u_{22_f} \hat{a}_{2_f} - v_{22_f}^* \hat{a}_{2_f}^\dagger) \right], \quad (26b)$$

где $\hat{\psi}_1(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}_2(\mathbf{r})$ — полевые операторы первой и второй компонент, $\hat{a}_{1_f}^\dagger$, \hat{a}_{1_f} — операторы рождения и уничтожения квазичастиц, соответствующих возмущению конденсата с энергией $\hbar\omega_f^+$; $\hat{a}_{2_f}^\dagger$, \hat{a}_{2_f} — с энергией $\hbar\omega_f^-$; ϕ_{01} , ϕ_{02} — постоянные фазы первой и второй компонент конденсата, соответственно; ψ_{01} , ψ_{02} — действительные функции, удовлетворяющие системе не зависящих от времени связанных уравнений Гросса–Питаевского и нормированные на единицу

$$\int d\mathbf{r} \psi_{01}^2(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \psi_{02}^2(\mathbf{r}) = 1, \quad (27)$$

N_1 , N_2 — число атомов в первой и второй компонентах конденсата.

Коэффициенты преобразования Боголюбова u_{11_f} , v_{11_f} , u_{12_f} , v_{12_f} и u_{21_f} , v_{21_f} , u_{22_f} , v_{22_f} нормированы следующими условиями:

$$\int d\mathbf{r} [u_{11_f} u_{11_{f'}}^* - v_{11_f} v_{11_{f'}}^* + u_{12_f} u_{12_{f'}}^* - v_{12_f} v_{12_{f'}}^*] = \delta_{ff'}, \quad (28a)$$

$$\int d\mathbf{r} [u_{21_f} u_{21_{f'}}^* - v_{21_f} v_{21_{f'}}^* + u_{22_f} u_{22_{f'}}^* - v_{22_f} v_{22_{f'}}^*] = \delta_{ff'}, \quad (28b)$$

которые дают стандартные бозонные коммутационные соотношения для операторов квазичастиц первого и второго типа (при этом операторы квазичастиц первого

типа коммутируют с операторами квазичастиц второго типа).

Будем считать далее, что фотон, рассеивающийся на БЭК, находится в резонансе с атомами первой компоненты и рассеивается только на них, в то время как с атомами второй компоненты не взаимодействует. Тогда в выражение для структурного фактора (1) необходимо подставить $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}_1(\mathbf{r})$. С учетом разложения (26) для парциального структурного фактора имеем

$$S_1(\mathbf{q}, \omega) = N_1 \sum_f \left\{ \left| \int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \times [u_{1f}^*(\mathbf{r}) - v_{1f}^*(\mathbf{r})] \psi_{01}(\mathbf{r}) \right|^2 \delta(\omega - \omega_f^+) + \left| \int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) [u_{1f}^*(\mathbf{r}) - v_{1f}^*(\mathbf{r})] \psi_{01}(\mathbf{r}) \right|^2 \times \delta(\omega - \omega_f^-) \right\}. \quad (29)$$

Система связанных уравнений Гросса–Питаевского, описывающая эволюцию средних значений полевых операторов компонент $\langle \hat{\psi}_1(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_1(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi_1(\mathbf{r}, t)]$ и $\langle \hat{\psi}_2(\mathbf{r}) \rangle = \Psi_2(\mathbf{r}, t) \exp[i\phi_2(\mathbf{r}, t)]$ двухкомпонентного конденсата, имеет вид [21]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 \exp(i\phi_1) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M_1} - \mu_1 + V_1(\mathbf{r}) + g_1 \Psi_1^2 + g_{12} \Psi_2^2 \right] \Psi_1 \exp(i\phi_1), \quad (30a)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 \exp(i\phi_2) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M_2} - \mu_2 + V_2(\mathbf{r}) + g_2 \Psi_2^2 + g_{12} \Psi_1^2 \right] \Psi_2 \exp(i\phi_2), \quad (30b)$$

где $g_i = 4\pi\hbar^2 a_i / M_i$, с $i = 1, 2$ и $g_{12} = 4\pi\hbar^2 a_{12} / \sqrt{M_1 M_2}$ — параметры взаимодействия; V_i — потенциал ловушки для i -й компоненты ($V_i = M_i \Omega_i^2 r^2 / 2$ — для сферической ловушки); μ_i — химический потенциал i -й компоненты основного состояния БЭК.

Переходя далее к переменным $\delta n_i(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t)$ ($i = 1, 2$), определяем аналогично (8), а также используя приближение Томаса–Ферми (пренебрегая слагаемым кинетической энергии), мы получаем следующие линеаризованные уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n_1(\mathbf{r}, t) = \frac{N_1}{M_1} \nabla \{ \psi_{01}^2(\mathbf{r}) \nabla [g_1 \delta n_1(\mathbf{r}, t) + g_{12} \delta n_2(\mathbf{r}, t)] \}, \quad (31a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n_2(\mathbf{r}, t) = \frac{N_2}{M_2} \nabla \{ \psi_{02}^2(\mathbf{r}) \nabla [g_2 \delta n_2(\mathbf{r}, t) + g_{12} \delta n_1(\mathbf{r}, t)] \}. \quad (31b)$$

Основное состояние может быть определено, если в систему (30) подставить $\Psi_i(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N_i} \psi_{0i}(\mathbf{r})$, $\phi_i(\mathbf{r}, t) = \phi_{0i}(\mathbf{r})$ ($i = 1, 2$) и пренебречь слагаемым кинетической энергии. В результате получим

$$\psi_{01}^2(\mathbf{r}) = \frac{g_2 \mu_1 - g_{12} \mu_2 - (g_2 M_1 \Omega_1^2 / 2 - g_{12} M_2 \Omega_2^2 / 2) r^2}{(g_1 g_2 - g_{12}^2) N_1}, \quad (32a)$$

$$\psi_{02}^2(\mathbf{r}) = \frac{g_1 \mu_2 - g_{12} \mu_1 - (g_1 M_2 \Omega_2^2 / 2 - g_{12} M_1 \Omega_1^2 / 2) r^2}{(g_1 g_2 - g_{12}^2) N_2}. \quad (32b)$$

Радиусы конденсатов R_i определяются условием $\psi_{0i}|_{r=R_i} = 0$ ($i = 1, 2$). Из нормировки (27) получаем

$$R_1 = a_{HO_1} \left(\frac{15 N_1 (a_1 a_2 - a_{12}^2) / a_{HO_1}}{a_2 - a_{12} \Omega_{12}^{-2} M_{12}^{-3/2}} \right)^{1/5}, \quad (33a)$$

$$R_2 = a_{HO_2} \left(\frac{15 N_2 (a_1 a_2 - a_{12}^2) / a_{HO_2}}{a_1 - a_{12} \Omega_{12}^{-2} M_{12}^{-3/2}} \right)^{1/5}, \quad (33b)$$

где $\Omega_{12} = \Omega_1 / \Omega_2$, $M_{12} = M_1 / M_2$, $a_{HO_i} = \sqrt{\hbar / (M_i \Omega_i)}$, $i = 1, 2$.

Приравнявая R_1 и R_2 из (33), мы получим отношение числа частиц компонент, необходимое для чистого бинарно-фазового конденсата,

$$\frac{N_2}{N_1} = \Omega_{12}^{-2} M_{12}^{-2} \frac{a_1 - a_{12} \Omega_{12}^2 M_{12}^{3/2}}{a_2 - a_{12} \Omega_{12}^{-2} M_{12}^{-3/2}}. \quad (34)$$

Окончательно для основного состояния двухкомпонентного БЭК в приближении Томаса–Ферми имеем

$$\psi_{01}^2(\mathbf{r}) = \psi_{02}^2(\mathbf{r}) = \frac{15}{8\pi} R_1^{-3} [1 - (r/R_1)^2], \quad (35)$$

где R_1 определяется в (33a) и соотношение между компонентами удовлетворяет (34).

Представим, как и ранее, действительные функции $\delta n_i(\mathbf{r}, t)$, $i = 1, 2$ в виде разложения по элементарным возбуждениям с частотой ω_f : $\delta n_i(\mathbf{r}, t) = \sum_f [\delta n_{if}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_f t) + \delta n_{if}^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega_f t)]$. Тогда система (31) принимает вид

$$-\omega_f^2 \delta n_{1f}(\mathbf{r}) = X_1 \nabla_{\bar{r}} \{ [1 - \bar{r}^2] \nabla_{\bar{r}} [g_1 \delta n_{1f}(\mathbf{r}) + g_{12} \delta n_{2f}(\mathbf{r})] \}, \quad (36a)$$

$$-\omega_f^2 \delta n_{2f}(\mathbf{r}) = X_2 \nabla_{\bar{r}} \{ [1 - \bar{r}^2] \nabla_{\bar{r}} [g_2 \delta n_{2f}(\mathbf{r}) + g_{12} \delta n_{1f}(\mathbf{r})] \}, \quad (36b)$$

где $X_i = (15/4\pi) N_i / (R_i^5 M_i)$, $i = 1, 2$ и $\bar{r} = r/R_1$.

Поскольку функции, определяемые соотношениями (15) и (16), являются полным набором собственных функций оператора (12), то решение системы (36) для тех же квантовых чисел n, l и m является линейной

комбинацией функций (15). Тогда с точностью до нормировочной константы мы можем записать

$$\delta n_{1_f}(\mathbf{r}) = \delta n_{1_{nm}}(\mathbf{r}) = F_{nl}(r/R_1)Y_{lm}(\Theta, \phi),$$

$$\delta n_{2_f}(\mathbf{r}) = \delta n_{2_{nm}}(\mathbf{r}) = \Theta_l F_{nl}(r/R_1)Y_{lm}(\Theta, \phi),$$

где Θ_{nl} — некоторая константа; $F_{nl}(r/R_1)Y_{lm}(\Theta, \phi) = \delta n_{lmm}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (12), где $(\omega_f/\omega_0)^2 = K_{nl}$ (14), т.е. $F_{nl}(r)$ определяется (13) и (16). Тогда из (36) имеем

$$[\omega_f^2 - X_1 g_1 K_{nl}] - X_1 g_{12} K_{nl} \Theta_{nl} = 0, \quad (37a)$$

$$-X_2 g_2 K_{nl} + [\omega_f^2 - X_2 g_2 K_{nl}] \Theta_{nl} = 0. \quad (37b)$$

Из условия разрешимости системы (37) определяем частоты коллективных колебаний двухкомпонентного БЭК в приближении Томаса–Ферми

$$\begin{aligned} \omega_f^2 &= (\omega_{nl}^\pm)^2 \\ &= \frac{X_1 g_1}{2} \left\{ 1 + \xi \pm \left[(1 - \xi)^2 + 4\xi \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} K_{nl} \\ &= \Omega_1^2 \frac{a_1 (a_2 - a_{12} \Omega_{12}^{-2} M_{12}^{-3/2})}{2(a_1 a_2 - a_{12}^2)} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \xi \pm \left[(1 - \xi)^2 + 4\xi \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} K_{nl}, \quad (38) \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{N_2 M_1^2}{N_1 M_2^2} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_{12} \Omega_{12}^2 M_{12}^{3/2}}{a_2 \Omega_{12}^2 - a_{12} M_{12}^{-3/2}} \frac{a_2}{a_1}. \quad (39)$$

Подставляя (38) в (37a), получим

$$\Theta_{nl}^\pm = \frac{g_1}{2g_{12}} \left\{ \xi - 1 \pm \left[(1 - \xi)^2 + 4\xi \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (40)$$

Для установления связи между трансформационными коэффициентами Боголюбова $u_{1if}(\mathbf{r})$, $v_{1if}(\mathbf{r})$, $u_{2if}(\mathbf{r})$, $v_{2if}(\mathbf{r})$ и величинами $\delta n_{1f}(\mathbf{r})$ и $\delta n_{2f}^\pm(\mathbf{r})$ ($i = 1$ соответствует “+” и $i = 2$ соответствует “-”) предположим, что ансамбль ультрахолодных атомов возбужден таким образом, что существует только f -я мода с частотой ω_f^+ (т.е. отличны от нуля только $\langle \hat{\alpha}_{1f} \rangle = \lambda_f^+ \exp(-i\omega_f^+ t)$ и $\langle \hat{\alpha}_{1f}^\dagger \rangle = (\lambda_f^+)^* \exp(i\omega_f^+ t)$) или только f -я мода с частотой ω_f^- (отличны от нуля только $\langle \hat{\alpha}_{2f} \rangle = \lambda_f^- \exp(-i\omega_f^- t)$ и $\langle \hat{\alpha}_{2f}^\dagger \rangle = (\lambda_f^-)^* \exp(i\omega_f^- t)$). Тогда для $j = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_j(\mathbf{r}) \rangle &= \Psi_j \exp(i\phi_j) \\ &= \exp(i\phi_{0j}) [\psi_{0j} \sqrt{N_j} + \lambda_f^\pm u_{j1f} \exp(-i\omega_f^\pm t) \\ &\quad - (\lambda_f^\pm)^* v_{j1f}^* \exp(i\omega_f^\pm t)]. \quad (41) \end{aligned}$$

С другой стороны, для среднего значения полевого оператора j -й компоненты мы можем использовать

разложение, аналогичное (18). Соотношение между возмущением фазы $\delta\phi_{jf}(\mathbf{r})$ и возмущением плотности $\delta n_{jf}(\mathbf{r})$ для j -й компоненты находится из j -го ($j = 1, 2$) уравнения системы (30). По аналогии с (19) имеем

$$\delta\phi_{1f}^\pm(\mathbf{r}) = \frac{g_1}{i\hbar\omega_f^\pm} \delta n_{1f}(\mathbf{r}) + \frac{g_{12}}{i\hbar\omega_f^\pm} \delta n_{2f}^\pm(\mathbf{r}),$$

$$\delta\phi_{2f}^\pm(\mathbf{r}) = \frac{g_2}{i\hbar\omega_f^\pm} \delta n_{2f}^\pm(\mathbf{r}) + \frac{g_{12}}{i\hbar\omega_f^\pm} \delta n_{1f}(\mathbf{r}).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} u_{1if}(\mathbf{r}) &= \frac{\delta n_{1f}(\mathbf{r})}{\lambda_f^\pm} \left(\frac{1}{2\sqrt{N_1}\psi_{01}(\mathbf{r})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{N_1}\psi_{01}(\mathbf{r})(g_1 + g_{12}\Theta_{nl}^+)}{\hbar\omega_f^\pm} \right), \quad (42a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{1if}(\mathbf{r}) &= \frac{\delta n_{1f}(\mathbf{r})}{\lambda_f^\pm} \left(-\frac{1}{2\sqrt{N_1}\psi_{01}(\mathbf{r})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{N_1}\psi_{01}(\mathbf{r})(g_1 + g_{12}\Theta_{nl}^+)}{\hbar\omega_f^\pm} \right), \quad (42b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2if}(\mathbf{r}) &= \frac{\delta n_{1f}(\mathbf{r})}{\lambda_f^\pm} \left(\frac{\Theta_{nl}^+}{2\sqrt{N_2}\psi_{02}(\mathbf{r})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{N_2}\psi_{02}(\mathbf{r})(\Theta_{nl}^+ g_2 + g_{12})}{\hbar\omega_f^\pm} \right), \quad (42c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2if}(\mathbf{r}) &= \frac{\delta n_{1f}(\mathbf{r})}{\lambda_f^\pm} \left(-\frac{\Theta_{nl}^+}{2\sqrt{N_2}\psi_{02}(\mathbf{r})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{N_2}\psi_{02}(\mathbf{r})(\Theta_{nl}^+ g_2 + g_{12})}{\hbar\omega_f^\pm} \right), \quad (42d) \end{aligned}$$

$\delta n_{1f}(\mathbf{r}) \equiv \delta n_{nlm}(\mathbf{r})$ дано в (15), а константы λ_f^\pm определяются из условия нормировки (28) с учетом ортогональности $\delta n_{nlm}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} |\lambda_f^\pm|^2 &= \frac{2g_1 I}{\hbar\omega_f^\pm} \\ &\quad \times \frac{2 \left(1 - \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \right) \sqrt{(1 - \xi)^2 + 4\xi \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}}}{\pm \left(1 - \xi - 2 \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \right) + \sqrt{1 - 2\xi + 4 \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \xi + \xi^2}}, \quad (43) \end{aligned}$$

где I определено в (21) с заменой R на R_1 .

Окончательно для парциального структурного фактора двухкомпонентного конденсата имеем

$$S_1^{TF}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{n,l} \tilde{S}_{n,l}^{TF}(q) [\beta^+ \delta(\omega - \omega_{nl}^+) + \beta^- \delta(\omega - \omega_{nl}^-)], \quad (44)$$

где

$$\beta^{\pm} = \left[\frac{a_2 - a_{12}^2/a_1}{a_2 - a_{12}\Omega_{12}^{-2}M_{12}^{-3/2}} \right]^{1/10} \times \left[\frac{\xi + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-\xi)^2}{4} + \xi \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{\pm \left(1 - \xi - 2 \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}\right) + \sqrt{1 - 2\xi + 4 \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2} \xi + \xi^2}}{2 \left(1 - \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}\right) \sqrt{(1-\xi)^2 + 4\xi \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}}}, \quad (45)$$

$\tilde{S}_{n,l}^{TF}(q)$ определяется в (22) с учетом $a = a_1$, $a_{HO} = a_{HO,1}$, $N_0 = N_1$; ξ — из (39).

При сравнении выражения для частичного структурного фактора (44) двухкомпонентного конденсата с выражениями (1), (22) для однокомпонентного конденсата можно сделать следующие выводы. Наличие второй компоненты приводит, во-первых, к изменению частот, т.е. передаваемой при рассеянии энергии, причем ω_{nl}^{\pm} , а во-вторых, — к умножению структурного фактора на множитель β^+ для частоты ω_{nl}^+ и β^- — для частоты ω_{nl}^- .

Рассмотрим, в частности, двухкомпонентный конденсат при $\Omega_1 = \Omega_2$ и $M_1 = M_2$. Такая ситуация экспериментально реализована для системы атомов ^{87}Rb , находящихся на сверхтонких подуровнях $|1, -1\rangle$ и $|2, 1\rangle$ [19]. Согласно [23], мы можем положить $a_1 = 5.68 \text{ nm}$, $a_2 = 5.36 \text{ nm}$. Величину a_{12} будем варьировать от $a_{12} = 1.8 \text{ nm}$ до $a_{12} = 5.36 \text{ nm}$. Для $a_2 < a_{12} < a_1$, согласно выражению (34), не может быть создано чистого бинарно-фазового конденсата. На рис. 3 представлена зависимость β^{\pm} от a_{12} . Из рисунка следует, что рассеяние фотонов может усиливаться за счет присутствия другого конденсата. Это связано с нарастанием амплитуды флуктуаций плотности конденсата по мере приближения a_{12} к критическому значению $\sqrt{a_1 a_2}$, выше которого происходит пространственное разделение компонент [24]. При аномально больших флуктуациях плотности наблюдается аналогия между

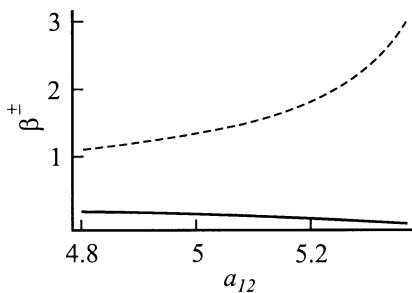


Рис. 3. Зависимость β^+ (штриховая кривая) и β^- (сплошная кривая) от амплитуды рассеяния a_{12} атомов первой компоненты на атомах второй компоненты для смеси атомов ^{87}Rb , находящихся на сверхтонких подуровнях $|1, -1\rangle$ и $|2, 1\rangle$.

такой ультрахолодной квантовой системой и обычными жидкостями около критической точки.

Работа поддержана грантами "Университеты России" (№ 015.01.01.04) и Министерства образования РФ (№ E00-3-12).

Список литературы

- [1] *Stenger J., Inouye S., Chikkatur A.P.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 1569–1573. *Stamper-Kurn D.M., Chikkatur A.P., Görlitz A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 2876–2880.
- [2] *Bogoliubov N.N.* // J. Phys. (Moscow). 1947. Vol. 11. P. 23–36 (Изв. АН СССР. 1947. Т. 11. P. 77–90).
- [3] *Gross E.P.* // Nuovo Cimento 1961. Vol. 20. P. 454–477.
- [4] *Fetter A.L.* // Ann. Phys. (New York). 1972. Vol. 70. P. 67–101.
- [5] *Graham R., Walls D.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1774–1777.
- [6] *Görlitz A., Chikkatur A.P., Ketterle W.* arXiv: cond-mat/0008067.
- [7] *Csordas A., Graham R., Szepfalusy P.* // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 54. P. R2543–R2547. arXiv: cond-mat/9711140.
- [8] *Wen-Chün Wu, Griffin A.* // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 54. P. 4204–4212.
- [9] *Zambelli F., Pitaevskii L., Stamper-Kurn D.M.* et al. // Phys. Rev. A. 2000. Vol. 61. P. 063608-1–063608-13.
- [10] *Pines D., Nozieres P.* The Theory of Quantum Liquids. Vol. I. New York: Benjamin. 1966.
- [11] *Andrews M.R.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 553–556. *Matthews M.R.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 243–246.
- [12] *Singh K.G., Rokhsar D.S.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 1667–1670. *Edwards M.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 1671–1674. *Dalfovo F.* et al. // Phys. Rev. A. 1997. Vol. 56. P. 3840–3843.
- [13] *Stringari S.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 2360–2363.
- [14] *Baym G., Pethick C.J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 6–9.
- [15] *Pines D., Nozieres P.* The Theory of Quantum Liquids, Vol. II. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990.
- [16] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
- [17] *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions. Nat. Bureau of Standarts, 1964.
- [18] *Myatt C.J., Burt E.A., Ghrist R.W.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 4. P. 586–589.
- [19] *Matthews M.R., Holl D.S., Jin D.S.* et al. arXiv: cond-mat/9803310. *Holl D.S., Matthews M.R., Ensher J.R.* et al. arXiv: cond-mat/9804138. *Holl D.S., Matthews M.R., Wieman C.E.* et al. arXiv: cond-mat/9805327.
- [20] *Ho T.-L., Shenoy V.B.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. N 16. P. 3276–3279.
- [21] *Graham R., Walls D.* // Phys. Rev. A. 1998. Vol. 57. N 1. P. 484–487.
- [22] *Esry B.D., Greene C.H.* // Phys. Rev. A. 1998. Vol. 57. N 2. P. 1265–1271.
- [23] *Gordon D., Savage C.M.* // Phys. Rev. A. 1998. Vol. 58. N 1. P. 1440–1411.
- [24] *Непомнящий Ю.А.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. Вып. 3. С. 1070–1087.