

О влиянии поперечных возмущений на распространение пикосекундных акустических импульсов в парамагнитном кристалле

© А.Н. Бугай, С.В. Сазонов

Калининградский государственный университет,
236041 Калининград, Россия

E-mail: barab@newmail.ru

(Поступила в Редакцию 13 января 2005 г.)

Исследовано влияние поперечных возмущений на динамику пикосекундного солитоноподобного акустического импульса в парамагнитном кристалле, помещенном во внешнее магнитное поле. При этом нелинейные и дисперсионные эффекты определяются как собственными свойствами кристалла, так и спин-фононным взаимодействием. Изучено влияние различных нелинейных механизмов и внешнего магнитного поля на устойчивость к поперечным возмущениям. Показано, что в отсутствие парамагнитных примесей возможно существование только импульса сжатия, который распространяется в режиме дефокусировки. Наличие в кристалле парамагнитных ионов приводит к возможности формирования импульсов растяжения, способных при определенных условиях распространяться в режимах самофокусировки и самоканалирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-02-16422а).

1. Введение

Исследования нелинейных эффектов в оптике и акустике развиваются параллельно, взаимно дополняя друг друга [1,2]. Одна из последних тенденций в этом направлении связана с изучением нелинейного распространения в различных средах импульсов все более короткой длительности. В настоящее время уже можно говорить о генерации в лабораторных условиях фемтосекундных оптических и пикосекундных акустических импульсов. Важной особенностью импульсов таких длительностей является то, что они не имеют несущей частоты. Данные образования принято называть предельно короткими импульсами (ПКИ) или видеоимпульсами. Далее будем использовать оба термина. Особый интерес в данной области представляет исследование солитонных (солитоноподобных) режимов распространения.

Несмотря на сходство оптических и акустических солитонов, между ними существуют два основных отличия. Во-первых, оптические солитоны являются сугубо поперечными, а акустические могут быть продольными [3], поперечными [4], а также продольно-поперечными [5–7]. Во-вторых, в случае пикосекундных акустических импульсов (в отличие от фемтосекундных оптических) становятся важны эффекты пространственной дисперсии. Действительно, пространственный размер импульса в направлении распространения $l_s \sim a\tau_p$, где a — скорость звука в данном веществе, τ_p — длительность импульса. Взяв $a \sim 5 \cdot 10^5$ см/с, $\tau_p \sim 1$ ps, получим $l_s \sim 5 \cdot 10^{-7}$ см, что всего на порядок превышает постоянную кристаллической решетки h (расстояние между узлами — ближайшими соседями) [2,8]. Аналогичный масштаб фемтосекундного оптического импульса $l'_s \sim c\tau_p \sim 5 \cdot 10^{-5}$ см $\gg l_s, h$. Поэтому для оптических импульсов эффекты пространственной дисперсии если и будут выражены, то значительно слабее.

Присутствие парамагнитных примесей в кристалле может вызвать дополнительные нелинейные и дисперсионные эффекты, связанные со спин-фононным взаимодействием. Из теоретических и экспериментальных исследований известно, что наиболее эффективно взаимодействуют с колебаниями кристаллической решетки парамагнитные ионы с эффективным спином $S = 1$ [9]. В качестве примеров здесь можно рассматривать ионы Fe^{2+} и Ni^{2+} в кристаллической матрице MgO.

Отметим, что одномерная динамика (в направлении распространения) акустических ПКИ исследована в различных случаях достаточно детально [4,5,10–17], чего нельзя сказать о влиянии поперечных эффектов. В то же время представляет интерес выявление условий, при которых импульс будет испытывать самофокусировку, дефокусировку или распространяться в режиме самоканалирования. Именно этому и посвящена настоящая работа.

2. Уравнения движения

Рассмотрим мощный продольный акустический импульс, распространяющийся вдоль оси x . В данном случае ось x совпадает с одной из осей симметрии четвертого порядка кубического кристалла, содержащего парамагнитные примеси с эффективным спином $S = 1$. При этом кристалл помещен во внешнее магнитное поле \mathbf{V}_0 , направленное вдоль оси, перпендикулярной направлению распространения.

Для исследования взаимодействия акустического импульса с парамагнитными примесями используем полуклассический подход, согласно которому парамагнитные ионы будем описывать квантовомеханически, а акустическое поле — классическим образом.

Гамильтониан акустического поля представим в виде

$$H_a = \int \mathcal{H}_a d^3\mathbf{r},$$

где плотность гамильтониана запишем как сумму его линейной $\mathcal{H}_a^{(l)}$, нелинейной $\mathcal{H}_a^{(nl)}$ и дисперсионной $\mathcal{H}_a^{(dis)}$ частей:

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_a^{(l)} + \mathcal{H}_a^{(nl)} + \mathcal{H}_a^{(dis)}. \quad (1)$$

Здесь [18,19]

$$\mathcal{H}_a^{(l)} = \frac{p^2}{2\rho_m} + \frac{c_{11}}{2} \eta_{xx}^2 + 2c_{44}(\eta_{xy}^2 + \eta_{xz}^2), \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_a^{(nl)} = \frac{c_{111}}{3!} \eta_{xx}^3 + \frac{c_{1111}}{4!} \eta_{xx}^4. \quad (3)$$

При этом компоненты тензора деформации равны

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right),$$

p — плотность импульса локальных смещений кристалла, ρ_m — средняя плотность среды, c_{11} , c_{44} — линейные модули упругости, c_{111} , c_{1111} — нелинейные модули упругости третьего и четвертого порядков соответственно.

Прежде чем записать выражение для $\mathcal{H}_a^{(dis)}$, прокомментируем (2) и (3). Упругая волна считается сугубо продольной, т.е. отлична от нуля лишь одна компонента вектора смещения $u_x \equiv u$. Данное допущение соответствует параксиальному приближению (т.е. слабому искривлению волнового фронта импульса), тогда $du/dx \gg |\nabla_{\perp} u|$ (∇_{\perp} — поперечный градиент). Понятно, что при сильных искривлениях импульс будет иметь на периферийных участках существенные составляющие скорости, направленные под большими углами к оси симметрии. В этом случае волна уже не может считаться сугубо продольной [20].

Выражение для $\mathcal{H}_a^{(nl)}$ имеет характер разложения по порядкам ангармонизма. В силу этого, а также принятого параксиального приближения в (3) оставлены только члены, содержащие du/dx , а слагаемые с du/dy и du/dz отброшены.

По причине малости параметра h/l_s эффекты пространственной акустической дисперсии также малы. Получим выражение для $\mathcal{H}_a^{(dis)}$ исходя из дискретной теории колебаний узлов кристаллической решетки в приближении ближайших соседей [8]. В силу параксиальности в этом члене содержатся только производные типа $\partial^2 u / \partial x^2$ и отброшены вторые производные по поперечным координатам, а также смешанные производные. Тогда выражение для $\mathcal{H}_a^{(dis)}$ можно получить на основе модели одномерного кристалла. В этом случае потенциальная упругая энергия в приближении ближайших соседей имеет вид

$$\Pi_{lin} = \sum_j \frac{\chi}{2} (u_{j+1} - u_j)^2,$$

где χ — упругая постоянная Гука, j — порядковый номер узла кристалла в направлении оси x . Перейдем отсюда к квазинепрерывной модели. Поскольку

$u_j = u(x)$, имеем

$$u_{j+1} = u(x+h) \approx u(x) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Тогда, ограничиваясь степенями h не выше четвертого порядка, получим

$$\begin{aligned} (u_{j+1} - u_j)^2 &= \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 \\ &\approx h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + h^3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{h^4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Очевидно, первое слагаемое в данном разложении соответствует бездисперсионному пределу и уже учтено в (2).

В выражении для Π_{lin} от суммирования перейдем к интегрированию: $\sum_j \rightarrow \int n d\mathbf{r}$, где n — средняя концентрация атомов в кристалле. Выполняя интегрирование по частям и считая кристалл безграничным (т.е. $du/dx = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$), получим

$$\mathcal{H}_a^{(dis)} = -\frac{c_{11} h^2}{24} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2. \quad (4)$$

Здесь учтено, что $n\chi h^2 = c_{11}$.

Принимая во внимание приближенные выражения

$$\eta_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

$$\eta_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\eta_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}$$

(вторые слагаемые в скобках в выражениях для η_{xy} и η_{xz} отброшены в силу параксиального приближения и относительной слабости нелинейности), учитывая (1)–(4) и оставляя степени du/dx не выше четвертой, получим выражение для плотности гамильтониана акустического поля в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a &= \frac{p^2}{2\rho_m} + \frac{c_{11}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} (\nabla_{\perp} u)^2 \\ &\quad - \frac{c_{11} h^2}{24} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{6} (c_{111} + 3c_{11}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} (c_{1111} + 6c_{111} + 3c_{11}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Для оператора взаимодействия акустического поля с парамагнитными ионами, следуя [21], запишем

$$\hat{H}_{int} = \sum_j G_{11} \hat{S}_x^{(j)} (u_{j+1} - u_{j-1}),$$

где G_{11} — константа спин-фононной связи, $\hat{S}_{x,y,z}^{(j)}$ — матрицы (3×3), соответствующие спину j ($S = 1$) [9].

Переходя к квазинепрерывному приближению, получим

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int n_s G_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \hat{S}_x^2 dr, \quad (6)$$

где n_s — концентрация примесных парамагнитных ионов.

Выражение в круглых скобках учитывает пространственную нелокальность спин-фононного взаимодействия [4,5], существенную для пикосекундных акустических импульсов и исчезающую в пределе сплошной среды.

Если в (4) учитывать узлы кристалла, расположенные не только вдоль оси x , то после перехода к квазинепрерывному пределу в (5) появятся слагаемые, содержащие нечетные порядки производных от u по y и по z . Ввиду симметрии $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$ они не должны вносить вклада. Слагаемое же, пропорциональное $h^2(\Delta_{\perp} u)\partial u/\partial x$, в скобках (5) отбросим в силу паракиального приближения и малости эффектов пространственной нелокальности спин-фононной связи.

Дополним (5) и (6) оператором взаимодействия эффективного спина с внешним магнитным полем

$$\hat{H}_s = \int n_s \hbar \omega_0 \hat{S}_z dr, \quad (7)$$

где $\omega_0 = 2g\mu_B B_0/\hbar$ — частота расщепления между первым и третьим уровнями внутри зеемановского триплета, g — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора.

Согласно полуклассическому подходу [5], используем для поля импульса уравнения Гамильтониана

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta u}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad (8)$$

где $H = H_a + \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle$, $\langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{H}_{\text{int}})$ — квантовое среднее оператора взаимодействия, $\hat{\rho}$ — оператор плотности эффективности спина, подчиняющийся уравнению движения

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_s + \hat{H}_{\text{int}}, \hat{\rho}]. \quad (9)$$

Используя (7)–(9) и явный вид операторов \hat{S}_x , \hat{S}_y и \hat{S}_z [9], получим самосогласованную нелинейную систему уравнений, описывающую динамику импульса и квантовых состояний парамагнитных ионов,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} &= -b_2 \frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial x^2} + b_3^a \frac{\partial^2 \varepsilon^3}{\partial x^2} + b^a \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} \\ &+ \frac{2n_s G_{11}}{\rho_m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) U + a_{\perp}^2 \Delta_{\perp} \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\omega_0 V, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \omega_0 U + \Omega W, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\Omega V, \quad (11)$$

где введены обозначения $W = (\rho_{33} - \rho_{11})/2$ — величина, характеризующая инверсию населенностей между тре-

тым и первым (основным) зеемановскими подуровнями,

$$U = (\rho_{31} + \rho_{31}^*)/2, \quad V = (\rho_{31}^* - \rho_{31})/2i,$$

$$\Omega = \frac{2G_{11}}{\hbar} \left(\varepsilon + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \right),$$

ρ_{jk} — соответствующие элементы матрицы плотности в представлении собственных функций оператора \hat{H}_s , $\varepsilon = \partial u/\partial x$ — линейная часть относительной деформации, вызванной упругим импульсом, $a = \sqrt{c_{11}/\rho_m}$ и $a_{\perp} = \sqrt{c_{44}/\rho_m}$ — линейные скорости продольного и поперечного звука. Параметры $b_2 = 4a^2\Gamma$, $b_3^a = (c_{1111}/6c_{11} - \Gamma - 1)a^2$ учитывают вклады квадратичной и кубической нелинейностей, обусловленных ангармонизмом колебаний узлов кристаллической решетки. Здесь $\Gamma = -3/2(1 + c_{111}/3c_{11})$ — постоянная Грюнаизена. Слагаемое с коэффициентом $b^a = a^2 h^2/12$ учитывает пространственную дисперсию, вызванную дискретной структурой кристалла. В скобках в правой части (10) учтено спин-фононное взаимодействие. Материальные уравнения (11) представляют собой систему уравнений Блоха для спин-фононного взаимодействия [22] с учетом пространственной нелокальности последнего.

Пусть длительность импульса $\tau_p \sim 10$ ps, а частота зеемановских расщеплений $\omega_0 \sim 10^{12} \text{ s}^{-1}$. Тогда $(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1$. В этом приближении из (11) можно получить разложение спинового отклика, учитывающее нелинейность и временную дисперсию [4,23],

$$U = -\frac{W_{\infty}}{\omega_0} \Omega + \frac{W_{\infty}}{2\omega_0^3} \Omega^3 + \frac{W_{\infty}}{\omega_0^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}, \quad (12)$$

где $W_{\infty} = W(t = -\infty)$.

Для того чтобы спин-фононная связь эффективно воздействовала на распространение импульса, необходима существенная начальная разность населенностей W_{∞} . Тогда абсолютная температура T должна удовлетворять условию $T < \hbar\omega_0/k_B$ [4,5,10], где k_B — постоянная Больцмана. При $\omega_0 \sim 10^{12} \text{ s}^{-1}$ имеем $T < 10$ K, что хорошо выполняется для температур жидкого гелия.

Остается подставить разложение (12) в (10). Тогда после перенормировки скорости звука $a_s = a\sqrt{1 + qW_{\infty}}$ в правой части (10) останутся малые члены разложения по нелинейности, дисперсии и поперечным возмущениям. В этом случае с помощью приближения медленно меняющегося профиля можно редуцировать волновое уравнение относительно производных, пренебрегая отраженной волной [24]. Учитывая отмеченное выше, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \beta_2 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \beta_3 \varepsilon^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \xi^3} \\ = -\frac{a_{\perp}^2}{2a} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\xi} \varepsilon d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\beta_2 &= b_2/a, & \beta_3 &= 3b_3/2a, & \beta &= b/2a, \\ b_3 &= b_3^a + b_3^s, & b &= b^a + b^s, \\ b^s &= -a^2 \frac{n_s W_\infty G_{11}^2}{c_{11} \hbar \omega_0} \left(\frac{a^2}{2\omega_0^2} - \frac{2h^2}{3} \right), \\ b_3^s &= -a^2 \frac{n_s W_\infty G_{11}^4}{C_{11} (\hbar \omega_0)^3}, & \xi &= z - at\end{aligned}$$

(так как $q \ll 1$, здесь принято $a_s \approx a$).

Из выражений для коэффициентов уравнения (13) видно, что квадратичная нелинейность создается только за счет ангармонизма колебаний узлов кристаллической решетки. В то же время кубическая нелинейность порождается как отмеченным ангармонизмом, так и спин-фононным взаимодействием.

Взяв $a \sim 5 \cdot 10^5$ см/с, $\omega_0 \sim 10^{12}$ с⁻¹, $h \sim 10^{-8}$ см, найдем, что первое слагаемое в скобках выражения, определяющего параметр b^s , значительно больше первого. Таким образом, временная нормальная дисперсия, вызванная спин-фононным взаимодействием, значительно превосходит аномальную дисперсию, обусловленную пространственной нелокальностью данного взаимодействия. Поэтому $b > 0$ и суммарная дисперсия, обусловленная дискретностью кристалла и спин-фононным взаимодействием, является нормальной.

Как видно из приведенных соотношений, константы при дисперсии и кубической нелинейности модифицируются посредством спин-фононного взаимодействия. При этом возникает зависимость их от величины внешнего магнитного поля.

Уравнение (13) в одномерном случае ($\Delta_\perp = 0$) допускает два типа односолитонных решений

$$\varepsilon_\pm = \frac{\pm 3b/b_2 l^2}{(\gamma/l^2 + 1)^{1/2} \text{ch}[(\xi - ct)/l] \mp 1}, \quad (14)$$

где l имеет смысл протяженности импульса, $c = \beta/l^2$, $\gamma = 9bb_3/2b_2^2$.

Здесь и далее знак плюс соответствует деформации растяжения, минус — деформации сжатия.

Отметим, что уравнению (13) соответствуют два частных случая. При $b_3 = 0$ (13) переходит в уравнение Кортевега–де Вриза (КдВ). При этом несингулярным остается только решение в виде волны сжатия, совпадающее с солитоном КдВ. Если $b_2 = 0$, имеем модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза (МКдВ). В этом случае возможны оба решения (14), совпадающие с солитонами МКдВ различной полярности.

Рассмотрим условия, при которых возможно существование импульсов типа (14). Для этого оценим характерные величины относительных деформаций на примере кристалла MgO. Пусть внешнее магнитное поле отсутствует. Тогда $b = b^a$, $b_3 = b_3^a$. Для оценки константы b_3^a , в которую входит упругий модуль четвертого порядка c_{1111} , используем для потенциала атом-атомного

взаимодействия аппроксимацию Морзе

$$\Pi_M = \Pi_0 (e^{-2r/r_0} - e^{-r/r_0}),$$

где $r \equiv u_{j+1} - u_j$ — относительное смещение узлов, r_0 и Π_0 — эффективная ширина и глубина потенциала соответственно. В окрестности минимума потенциал Морзе можно представить в виде разложения

$$\Pi_M = \Pi_0 \left\{ \frac{h^2}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{h^3}{r^3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \frac{7h^4}{12r_0^4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \right\}.$$

В данном случае потенциал взаимодействия есть

$$\begin{aligned}\Pi &\sim \frac{c_{11}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{6} (c_{111} + 3c_{11}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \\ &+ \frac{1}{24} (c_{1111} + 6c_{111} + 3c_{11}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4.\end{aligned}$$

Сравнивая с предыдущим разложением, найдем $b_3^a = 7b_2^2/18a^2$. Заметим, что $\gamma/l^2 = 7h^2/48l^2 \ll 1$. Таким образом, относительные смещения при деформациях растяжения и сжатия составляют соответственно $|\varepsilon_+| \sim 3b/2b_2\gamma \sim a^2/b_2 \sim 1/4\Gamma$, $|\varepsilon_-| \sim 3b/2b_2l^2 \sim h^2/32\Gamma a^2\tau_p^2$. Для MgO $a = 9 \cdot 10^5$ см/с, $\Gamma = 6.8$, $h = 2.1 \cdot 10^{-8}$ см, а критическая величина относительной деформации, выше которой упругая деформация сменяется пластической, $\varepsilon \sim 3.8 \cdot 10^{-5}$ [3]. При длительности $\tau_p \sim 10$ пс получим $|\varepsilon_+| \sim 10^{-1}$, $|\varepsilon_-| \sim 10^{-7}$. Очевидно, в данном случае возможно существование только решения в виде волны сжатия, которое приблизительно совпадает с решением КдВ.

С уменьшением величины магнитного поля (а следовательно, и частоты ω_0) величина относительной деформации волны растяжения уменьшается. Пусть, например, $n_s \sim 10^{19}$ см⁻³, $G_{11} \sim 10^{-13}$ эрг [25], $\omega_0 \sim 10^{10}$ с, $\tau_p \sim 300$ пс. При этом константы кубического ангармонизма и дисперсии в основном определяются спин-фононным взаимодействием, причем $b^a/b^s \sim 10^{-7}$, $b_3^a/b_3^s \sim 10^{-4}$, а относительные деформации $|\varepsilon_+| \sim 10^{-5}$, $|\varepsilon_-| \sim 10^{-6}$. Отметим также, что $\gamma/l^2 \sim 1$, а для эффективного спин-фононного взаимодействия температура образца должна быть понижена до $T \sim 0.1$ К. В этом случае возможно существование как волны сжатия, так и волны растяжения.

3. Учет поперечных возмущений

Дальнейший анализ уравнения (13) проведем с помощью вариационного метода „усредненного лагранжиана“ [26]. Лагранжиан, соответствующий (13), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta_2}{6} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^3 \\ &+ \frac{\beta_3}{12} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^4 - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) + \frac{a_\perp^2}{4a} (\nabla_\perp u)^2.\end{aligned} \quad (15)$$

Здесь выполнен переход из поля деформаций $\varepsilon = \partial u / \partial \xi$ к полю смещений u . Пробное решение выберем, исходя из (14), в виде

$$u_{\pm} = \pm \frac{6b}{b_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\theta^2 + 1} \pm 1}{\theta} \operatorname{th} [\theta(\xi - \Phi) / 2\sqrt{\gamma}] \right). \quad (16)$$

Учет неоднородности в параксиальном приближении позволяет считать, что $\theta = \theta(t, \mathbf{r}_{\perp})$ и $\Phi = \Phi(t, \mathbf{r}_{\perp})$ в этом случае являются медленной и быстрой функциями своих переменных [27].

Подставляя (16) в (15) и интегрируя полученное выражение по быстрой переменной ξ , найдем для деформаций растяжения и сжатия усредненные лагранжианы вида

$$\Lambda_{\pm} = \rho_{\pm} \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial t} + \rho_{\pm} \frac{(\nabla_{\perp} \varphi_{\pm})^2}{2} + \frac{b}{2\gamma} \left(\frac{\theta^3}{3} - \rho_{\pm} \right) + \frac{a_{\perp}^2 \gamma}{2} \frac{(\nabla_{\perp} \theta)^2}{\theta} d(\theta), \quad (17)$$

где

$$\varphi_{\pm} = -a\Phi_{\pm}, \quad \rho_{-} = \theta - \arcsin(1/\sqrt{1+\theta^2}), \quad \rho_{+} = \rho_{-} + \pi, \\ d(\theta) = -\rho^3/3\theta^4 + (3\theta^2 + \pi^2)\rho/3\theta^4 - (2\theta^2 + 5)/3\theta(\theta^2 + 1)^2.$$

Везде далее индексы \pm у ρ и φ для краткости будем опускать. Записывая для ρ и φ с использованием (17) уравнения Эйлера–Лагранжа, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\perp}(\rho \mathbf{V}_{\perp}) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{V}_{\perp}^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} = F_{\perp}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{V}_{\perp} = \nabla_{\perp} \varphi, \quad \int \frac{dP}{\rho} = \frac{b}{2\gamma} \theta^2,$$

$$F_{\perp} = a_{\perp}^2 \gamma (1 + 1/\theta^2) [d(\theta) \Delta_{\perp} \theta + 0.5d'(\theta) (\nabla_{\perp} \theta)^2].$$

В одномерном случае ($\nabla_{\perp} = 0$) система (18) легко интегрируется. При этом $\theta = \operatorname{const}$, $\Phi = b\theta^2 t / 2\gamma a = \beta t / l^2$. Таким образом, как и следовало ожидать, пробное решение совпадает с точным одномерным решением.

Функции F_{\perp} описывают волновые свойства и соответствуют эффектам дифракции. Это можно пояснить следующим образом. Относительную роль дифракции можно описать безразмерным параметром $\delta \sim \lambda / D$, где λ — характерная длина волны импульса, D — характерный размер поперечных неоднородностей среды, создаваемых из-за нелинейности самим импульсом. В случае видеоимпульса в качестве длины волны выступает его пространственный размер в направлении распространения. Таким образом, имеем $\lambda \sim 1/l = \sqrt{\gamma} / \theta$, $\Delta_{\perp} \sim 1/D^2$. В нашем случае $F_{\perp} \sim \delta^2$.

На начальной стадии искривления фронта волновыми свойствами можно пренебречь и ограничиться эйкональным (геометрическим) приближением, когда $F_{\perp} = 0$.

Тогда система (18) совпадает по виду с уравнениями потенциального течения идеальной жидкости (уравнение неразрывности и интеграл Коши для нестационарного течения соответственно). Здесь φ является аналогом потенциала скорости \mathbf{V}_{\perp} , а P и ρ — давления и плотности. Тогда условие устойчивого течения жидкостей типа (18) $dP/d\rho > 0$ примет вид

$$b\rho(\theta^2 + 1)/\gamma\theta > 0. \quad (19)$$

Таким образом, на эйкональной стадии рассматриваемые импульсы устойчивы к поперечным возмущениям.

Пусть теперь в (18) $F \neq 0$, что соответствует учету дифракции импульсов в их поперечной динамике.

Рассмотрим сначала малые поперечные возмущения. При этом представим функции θ и φ в виде $\theta = \theta_0 + \theta_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_0 = -b\theta_0^2 t / 2\gamma$, $\theta_0 = \theta(0)$. После линеаризации системы уравнений (18) получим

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\rho(\theta_0)(1 + \theta_0^2)}{\theta_0^2} \Delta_{\perp} \varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{b\theta_0 \theta_1}{\gamma} - \frac{a^2 \gamma (1 + \theta_0^2) d(\theta_0)}{\theta_0^2} \Delta_{\perp} \theta_1 = 0. \quad (20)$$

Выбрав возмущения в виде плоских монохроматических волн $\theta_1 \varphi_1 \sim \exp(i\omega t + i\mathbf{k}_{\perp} r_{\perp})$, найдем связь между ω и \mathbf{k}_{\perp} :

$$\omega^2 = \mathbf{k}_{\perp}^2 \frac{b\rho(\theta_0)(\theta_0^2 + 1)}{\gamma\theta_0} \left(1 + \frac{a^2 \gamma^2 d(\theta_0)(\theta_0^2 + 1)}{b\theta_0^3} \mathbf{k}_{\perp}^2 \right). \quad (21)$$

Импульс является устойчивым к малым возмущениям, если при любом вещественном значении \mathbf{k}_{\perp} отсутствуют экспоненциально растущие во времени моды. Таким образом, для устойчивости ω должно быть вещественной. В случае волн растяжения $d(\theta_0) > 0$, т.е. они устойчивы к малым возмущениям. В случае же волн сжатия $d(\theta_0) > 0$ при $\theta_0 > 0.63$. Таким образом, из (21) следует, что для длительности импульсов сжатия, удовлетворяющих условию $\theta_0 < 0.63$, при $\mathbf{k}_{\perp}^2 > -b\theta_0^3/a^2\gamma^2 d(\theta_0)(1 + \theta_0^2)$ величина ω становится мнимой, т.е. импульс сжатия достаточно большой длительности может быть неустойчивым по отношению к малым возмущениям.

Рассмотрим теперь влияние нелинейных поперечных возмущений. Пусть поле деформации аксиально-симметрично. Представим θ в автомодельном виде

$$\theta = \theta_m(t) (1 - r^2/R_T^2(t)), \quad (22)$$

где R_T — характерный поперечный радиус, пропорциональный радиусу импульса R .

Функцию φ также запишем в виде разложения [28]

$$\varphi = f_1(t) + f_2(t)r^2/2. \quad (23)$$

Подставляя (22), (23) в (18), получим

$$f_2 = -\partial(\ln\rho(\theta_m))/\partial t, \\ R_T^2 = C_0 \theta_m^3 / \rho^3(\theta_m)(1 + \theta_m^2), \quad (24)$$

где константа C_0 определяется начальным радиусом $R(0) = R_0$ и протяженностью импульса. При этом,

следуя [1,29], используем приосевое приближение ($(r/R)^2 \ll 1$), ограничиваясь учетом слагаемых до второго порядка r/R .

Найдем зависимость поперечного радиуса импульса R от времени. Поперечное распределение интенсивности аналогично (22) представим в виде $I_m = I_{\max}(t) \times (1 - r^2/R(t)^2)$. Поскольку $I \sim \varepsilon^2$, имеем $I_m^{(\pm)}(\theta) = I_0 \theta^4 / (\sqrt{1 + \theta^2} \mp 1)^2$. Подставив сюда (22), с учетом (24) найдем выражение для поперечного радиуса импульса

$$R = R_0 \sqrt{\psi(\theta)/\psi(\theta_0)},$$

где

$$\psi_{\pm}(\theta) = \frac{\theta^3(\sqrt{1 + \theta^2} \mp 1)}{\rho^3(\theta^2 + 2 \mp 2\sqrt{1 + \theta^2})\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

Из (9) после приравнивания в левой и правой частях слагаемых при нулевой и второй степенях r получим

$$f'_1(t) = -\frac{b}{2\gamma} \left(\theta_m^2 + \mu \frac{\psi(\theta_0)d(\theta_m)\rho(\theta_m)^3(1 + \theta_m^2)}{\theta_m^2} \right), \quad (25)$$

$$\theta_m''(\tau) + k_1(\theta_m(\tau))(\theta_m'(\tau))^2 + k_2(\theta_m(\tau), \theta_0, \mu) = 0, \quad (26)$$

где

$$\tau = t/t_c, \quad t_c = \sqrt{\gamma/bR_0}, \quad \mu = a_{\perp}^2 \gamma^2 / bR_0^2,$$

$$k_1 = 2(1 - \theta_m^5/\rho(\theta_m)^3) [\theta_m(1 + \theta_m^2)]^{-1},$$

$$k_2 = 2\rho(\theta_m)^4(1 + \theta_m^2)^2 \theta_m^{-3} \psi(\theta_0) \{1 + 2\mu\rho(\theta_m)^3(1 + \theta_m^2) \times \theta_m^{-6} \psi(\theta_0) [3\theta_m(1 + \theta_m^2)d'(\theta_m) - 2d(\theta_m)]\}.$$

Считая фронт импульса плоским на входе в среду, т.е. $f_2(0) = 0$ (см. (23) и (24)), дополним уравнение (26) начальными условиями $\theta_m(0) = \theta_0 \equiv \sqrt{\gamma/l(0)}$, $\theta_m'(0) = 0$.

Из решения уравнения (26) легко определяются зависимости параметров импульса (длительности, радиуса, скорости и т.д.) от времени.

Анализ уравнения (26) в случае импульсов растяжения показывает наличие устойчивого состояния равновесия, что в терминах теории динамических систем соответствует стационарной точке типа центр. Условия, определяющие стационарное значение θ_{st} , имеют вид

$$k_2(\theta_{st}, \mu_{st}) = 0, \quad \partial k_2(\theta, \mu_{st})/\partial \theta|_{\theta=\theta_{st}} > 0.$$

При этом подразумевается $\theta_0 = \theta_{st}$. Значения входных параметров θ и μ , при которых осуществляется стационарный режим, приведены на рис. 1. При малом отклонении от них будут реализоваться колебания, вид которых показан на рис. 2. Это отвечает режиму самоканалирования импульса. Очевидно, период малых колебаний $T_{osc} = 2\pi t_c (\partial k_2(\theta, \mu_{st})/\partial \theta|_{\theta=\theta_{st}})^{-1/2}$. Пусть $\tau_p \sim 300$ ps, тогда с учетом оценок параметров среды, приведенных в конце раздела 2, $\theta_0 \sim 1$. Этому значению соответствует $\mu \sim 0.01$. Поперечный радиус импульса при этом $R_0 \sim 1 \mu\text{m}$. Величина периода таких колеба-

ний составляет $T \sim 0.3t_c \sim 10^{-8} \text{ s} \sim 10^2 \tau_p$. Поскольку $\theta \sim \tau_p^{-1}$, $\mu \sim R_0^{-2}$, с увеличением длительности средний поперечный радиус при самоканалировании, как видно из рис. 1, будет расти. Если отклонения от стационарных значений θ и μ велики, колебания будут нелинейными. При достаточно большой их амплитуде радиус импульса может сильно уменьшиться, что фактически приведет к самофокусировке.

В случае импульсов сжатия состояние равновесия неустойчиво, что соответствует стационарной точке типа седло. Величина θ_m может только уменьшаться. При этом происходит расплывание импульса с уменьшением амплитуды и скорости, т.е. его дефокусировка (рис. 3).

Как отмечалось выше, существование волны растяжения возможно благодаря наличию сильной кубической нелинейности, возникающей вследствие спин-фононного взаимодействия. В то же время при формировании волны сжатия принципиально присутствие именно квадратичной нелинейности. Из аналогичных расчетов для оптических ПКИ [28] известно, что при наличии только кубической нелинейности влияние дифракции вызывает

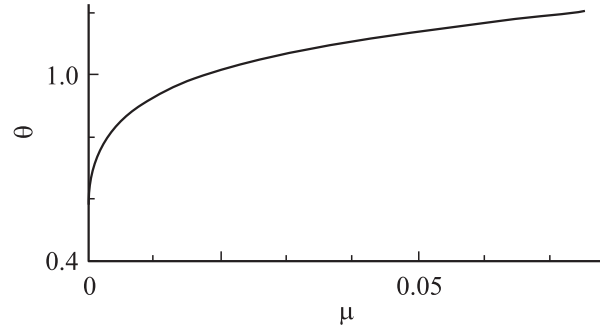


Рис. 1. Значения параметров импульса растяжения, при которых осуществляется режим самоканалирования.

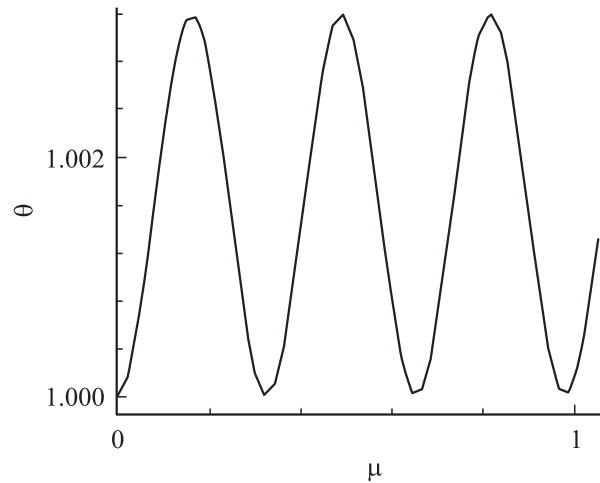


Рис. 2. Эволюция величины θ , пропорциональной обратной длительности, в режиме самоканалирования для волны растяжения при входных параметрах импульса, близких к стационарным ($\theta_0 = 1$, $\mu = 0.018$). Поперечный размер импульса осциллирует в противофазе по отношению к θ .

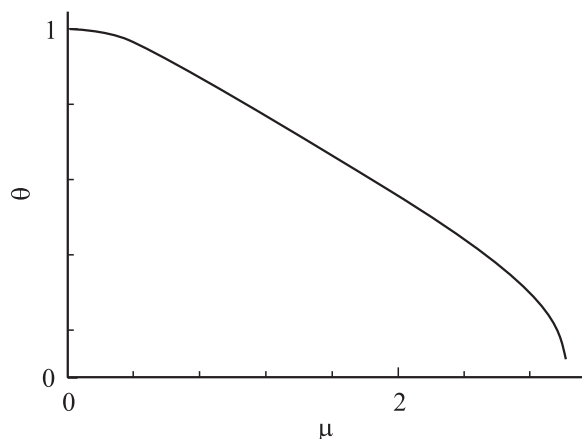


Рис. 3. Эволюция величины θ для волны сжатия в режиме дефокусировки при входных параметрах импульса $\theta_0 = 1$, $\mu = 0.018$.

фокусирующий эффект. В случае же квадратичной нелинейности среды эффект противоположный. Пусть импульс дефокусируется на эйкональной стадии. В первом случае влияние дифракции может привести к его самоканалированию, а во втором лишь усилит дефокусировку. В рассматриваемой задаче именно так и происходит: для волн растяжения осуществляется каналирование, а для волн сжатия — дефокусировка.

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрено распространение предельно коротких акустических импульсов в парамагнитном кристалле, помещенном в магнитное поле. Присутствие в кристалле парамагнитных примесей порождает дополнительные нелинейные и дисперсионные эффекты, а именно: перенормирует коэффициенты ангармонизма четвертого порядка и акустической дисперсии. В случае только упругих механизмов нелинейности (в отсутствие парамагнитных примесей) возможно существование только одного вида солитоноподобных решений волнового уравнения в виде импульсов сжатия. Увеличение ангармонизма четвертого порядка за счет спин-фононного взаимодействия приводит к возможности появления и другого типа волн — импульсов растяжения.

Основной целью настоящей работы было исследование влияния поперечных возмущений на динамику импульсов. На эйкональной стадии оба вида волн устойчивы к поперечным возмущениям (самофокусировке). Учет влияния волновых свойств (дифракции) показывает наличие различных режимов распространения. В случае импульсов сжатия возможна только дефокусировка. Если исходные длительность и радиус импульса растяжения близки к стационарным, осуществляется самоканалирование. При этом параметры солитона меняются в колебательном режиме. При значительном отклонении

исходных длительности и радиуса от стационарных значений радиус может сильно уменьшаться при нелинейных колебаниях, что приводит к самофокусировке.

В данной работе поперечные эффекты были учтены минимальным образом (в параксиальном приближении). Однако эффекты непараксиальности могут оказаться существенными при сильном искривлении фронта импульса. Мы надеемся, что дальнейшие исследования смогут пролить свет на данный вопрос.

Список литературы

- [1] С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемто-секундных лазерных импульсов. Наука, М. (1988).
- [2] В.Э. Гусев, А.А. Карабутов. Лазерная оптоакустика. Наука, М. (1991).
- [3] H.-Y. Hao, H.J. Maris. Phys. Rev. B. **64**, 064 302 (2001).
- [4] S.V. Sazonov. J. Phys.: Cond. Matter **6**, 31, 6295 (1994).
- [5] С.В. Сазонов. ЖЭТФ **118**, 1, 20 (2000).
- [6] С.В. Воронков, С.В. Сазонов. ЖЭТФ **120**, 2, 269 (2001).
- [7] A.V. Gulakov, S.V. Sazonov. J. Phys.: Cond. Matter **16**, 10, 1733 (2004).
- [8] Ч. Киттель. Введение в физику твердого тела. Физматгиз, М. (1963).
- [9] Дж. Такер, В. Рэмpton. Гиперзвук в физике твердого тела. Мир, М. (1975).
- [10] S.V. Sazonov. J. Phys.: Cond. Matter **4**, 30, 6485 (1992).
- [11] С.В. Сазонов. Изв. Вузов. Физика. **36**, 7, 94 (1993).
- [12] С.В. Воронков, С.В. Сазонов. ФТТ **43**, 11, 1969 (2001).
- [13] А.А. Заболотский. Письма в ЖЭТФ **76**, 11, 709 (2002).
- [14] А.А. Заболотский. ЖЭТФ **123**, 4, 560 (2003).
- [15] A.A. Zabolotskii. Phys. Rev. E **67**, 10, 066 606 (2003).
- [16] А.В. Гулаков, С.В. Сазонов. ФТТ **46**, 9, 1640 (2004).
- [17] А.А. Заболотский. ЖЭТФ **126**, 1, 155 (2004).
- [18] Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. Наука, М. (1966).
- [19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 6. Теория упругости. Наука, М. (1987).
- [20] В.А. Красильников, В.В. Крылов. Введение в физическую акустику. Наука, М. (1984).
- [21] E.H. Jacobsen, K.W.H. Stevens. Phys. Rev. **129**, 5, 2036 (1963).
- [22] N.S. Shiren. Phys. Rev. B **2**, 7, 2471 (1970).
- [23] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин, В.А. Ушаповский. ЖЭТФ **100**, 3, 762 (1991).
- [24] М.Б. Виноградов, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. Наука, М. (1990).
- [25] В.А. Голенищев-Кутузов, В.В. Самарцев, Н.К. Соловаров, Б.М. Хабибулин. Магнитная квантовая акустика. Наука, М. (1977).
- [26] D. Anderson. Phys. Rev. A **27**, 6, 3135 (1983).
- [27] С.К. Жданов, Б.А. Трубников. Квазигазовые неустойчивые среды. Наука, М. (1991).
- [28] С.В. Сазонов. ЖЭТФ **125**, 6, 1419 (2004)ю
- [29] Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. Колебания, волны, структуры. Физматлит, М. (2001).