01;03

Электромагнитное излучение, генерируемое линейными колебаниями заряженной капли

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.С. Голованов, М.В. Рыбакова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2001 г.)

Получено дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости в идеальной несжимаемой среде с учетом потерь на излучение электромагнитных волн. Проведена оценка интенсивности электромагнитного излучения для отдельной капли и для грозового облака.

1. Исследование капиллярных колебаний и устойчивости заряженной капли представляет значительный интерес в связи с разнообразием академических, технических и технологических приложений, в которых заряженная капля играет важную роль (см., например, [1–3] и указанную там литературу). В частности, вопросы, связанные с наличием электромагнитного излучения от колеблющихся заряженных облачных и дождевых капель, представляют интерес в связи с проблемами радиолокационного зондирования метеорологических объектов [4–8]. Сама проблема расчета интенсивности электромагнитного излучения от колеблющейся заряженной капли была сформулирована в [5], там же были приведены первые оценки применительно к конвекционным облакам. Важность обсуждаемой задачи приводит к необходимости развития теоретических представлений, а также уточнения полученных в [5] оценок.

2. Пусть капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1, коэффициентом поверхностного натяжения σ, имеющая заряд Q, находится в идеальной несжимаемой диэлектрической среде с проницаемостью ε и плотностью ρ_2. Будем искать спектр капиллярных колебаний поверхности капли, имея в виду возможность излучения электромагнитных волн, генерируемых перемещающимся в капле зарядом, при колебаниях поверхности, не меняющих положения центра масс капли и ее объема.

Уравнение возмущенной волновым движением поверхности капли в сферической системе координат, начало которой совпадает с положением центра масс капли, имеет вид

$$r(\Theta, t) = R + \xi(\Theta, t), \tag{1}$$

где R — радиус невозмущенной капли; $\xi(\Theta, t)$ — возмущение поверхности капли ($\max|\xi| \ll R$).

Движение жидкости в капле и среде будем полагать потенциальным и примем, что поля скоростей движения жидкости в капле и среде $\mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla\phi_j(\mathbf{r}, t)$ полностью определяются функциями потенциалов $\phi_j(\mathbf{r}, t)$ (индексом $j = 1$ пометим величины, характеризующие движение в капле, а индексом $j = 2$ — аналогичные величины для внешней среды). Математическая формулировка обсуждаемой задачи имеет вид

$$\Delta\phi_j(\mathbf{r}, t) = 0; \quad j = 1, 2; \tag{2}$$

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}; \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0; \tag{3}$$

$$r \to 0: \qquad \phi_1(\mathbf{r}, t) = \text{const}; \tag{4}$$

$$r \to \infty: \qquad \phi_2(\mathbf{r}, t) \to 0; \tag{5}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \to 0; \tag{6}$$

$$r = R + \xi(\Theta, t): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial n}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n_2} = \frac{\partial\phi}{\partial n}; \tag{8}$$

$$\Delta p - \rho_1\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathbf{E})^2 = \sigma\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}\left(2 + \hat{L}\right)\xi\right]; \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{10}$$

В выписанных соотношениях $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ — единичный вектор нормали к границе раздела сред; $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы нормали на границе раздела, внешние по отношению к капле и среде соответственно; $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)$ — единичный вектор касательной к поверхности капли; $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах; c — скорость света.

Для замыкания выписанной системы введем условия неизменности полного объема и положения центра масс капли, а также условие сохранения ее полного заряда

$$\int_V r^2\,dr\sin\Theta\,d\Theta\,d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V = \left[0 \le r \le R + \xi(\Theta, t),\ 0 \le \Theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi\right];$$

$$\oint_S \xi(\Theta, t)\mathbf{n}_r\sin\Theta\,d\Theta\,d\phi = 0;$$

$$S = \left[r = R + \xi(\Theta, t),\ 0 \le \Theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi\right];$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\nabla\Phi)dS = \frac{Q}{\varepsilon}. \tag{11}$$

В нижеследующем изложении все производные в граничных условиях в линейном по $|\xi|/R$ приближении будем относить к невозмущенной поверхности капли $r = R$, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды.

3. Представим возмущение равновесной сферической поверхности капли $\xi(\Theta, t)$, связанное с капиллярным волновым движением, в виде ряда по полиномам Лежандра $\mathfrak{F}_n(\cos\Theta) \equiv \mathfrak{F}_n(\mu)$

$$\xi(\Theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{F}_n(\mu) \exp(i\omega t),$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$\int\limits_{1}^{1} \mathfrak{F}_n(\mu)\, \mathfrak{F}_m(\mu)\, d\mu = \delta_{nm}.$$

В выражении для $\xi(\Theta, t)$ ограничение значения нижнего предела индекса суммирования двойкой определено условиями постоянства объема и неизменности положения центра масс, делающими невозможными колебания с $n = 0$ и $n = 1$; ω — комплексная частота капиллярных колебаний поверхности.

Аналогично в виде рядов по полиномам $\mathfrak{F}_n(\mu)$ будем искать решения уравнений (2) для гидродинамических потенциалов, удовлетворяющие граничным условиям (4) и (5),

$$\phi_1(r, \Theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n \mathfrak{F}_n(\mu) \exp(i\omega t), \tag{12}$$

$$\phi_2(r, \Theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} \mathfrak{F}_n(\mu) \exp(i\omega t). \tag{13}$$

Коэффициенты A_n и B_n являются малыми того же порядка, что и α_n. Связь между коэффициентами A_n, B_n и α_n легко находится из (7), (8)

$$A_n = -\alpha_n \frac{i\omega}{n} R^{1-n}; \quad B_n = \alpha_n \frac{i\omega}{(n+1)} R^{n+2}. \tag{14}$$

Для вывода дисперсионного уравнения задачи продифференцируем динамическое граничное условие (9) по времени (при $\Theta = \mathrm{const}$) и с учетом (7), (8) получим

$$-\rho_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{1}{R^2} (2 + \hat{L}) \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathbf{E})^2 \right) = 0. \tag{15}$$

В (15) остается неопределенной частная производная по времени от электрического давления на поверхность капли. Для ее нахождения необходимо решить электродинамическую задачу (3), (6), (10), (11), что и делается в Приложении, где найдено

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{8\pi} (\mathbf{E})^2 \right) = \frac{i\omega}{4\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon R^5} \sum_n \alpha_n \mathfrak{F}_n(\mu) \exp(i\omega t) \times \left((n-1) - \frac{i\omega R}{c} \frac{(n+1)}{n} \right). \tag{16}$$

Подставим (12)–(14) и (16) в (15) и после несложных преобразований получим искомое дисперсионное уравнение

$$\omega_n^2 - \frac{i\omega_n Q^2 (n+1)^2}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1] 4\pi c \varepsilon R^5} - \frac{(n+1)n(n-1)}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]} \times \frac{\sigma}{R^3} \left[(n+2) - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^3 \sigma} \right] = 0,$$

квадратичное относительно ω_n.

Коэффициент при ω_n во втором слагаемом этого уравнения определяет удвоенный декремент затухания капиллярных волн в рассматриваемой системе идеальных сред

$$\eta \equiv \frac{Q^2 (n+1)^2}{2[\rho_2 n + (n+1)\rho_1] 4\pi c \varepsilon R^5}.$$

Следовательно, второе слагаемое в дисперсионном уравнении обязано своим появлением потерям энергии капиллярных колебаний на излучение электромагнитных волн осциллирующей заряженной каплей. Отметим, что безразмерная комбинация физических параметров

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^3 \sigma}$$

характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду [1]. Согласно теории Рэлея, n-я мода капли теряет устойчивость при выполнении критерия $W \geq (n+2)$.

4. Выражение для мощности излучения на частоте ω_n можно записать в виде [5]

$$I = -\frac{dw_n}{dt} \equiv w_n \frac{0.5\, Q^2 (n+1)^2}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1] 4\pi c \varepsilon R^5}, \tag{17}$$

где w_n — энергия поверхностных колебаний n-й моды, которую можно на основе теоремы вириала представить как удвоенную среднюю за период кинетическую энергию движения жидкости в капле, связанную с n-й модой, в виде [9]

$$w_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \omega_{n0}^2 \alpha_n^2}{n(2n+1)},$$

$$\omega_{n0}^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]} \frac{\sigma}{R^3} \Big[(n+2) - W \Big]. \tag{18}$$

Подставим (18) в (17) и запишем окончательное выражение для интенсивности электромагнитного излучения от единичной колеблющейся заряженной капли идеальной жидкости

$$I = \frac{(n+1)^2 \rho_1}{n(2n+1)[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]} \frac{Q^2 \omega_{n0}^2 \alpha_n^2}{4 c \varepsilon R^2} \equiv \frac{(n+1)^2 (n^2-1) \rho_1}{(2n+1)[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]^2} \left(\frac{Q^2}{R^3} \right) \left(\frac{\alpha_n^2}{R^2} \right) \times \frac{\sigma}{4 c \varepsilon} \Big[(n+2) - W \Big]. \tag{19}$$

Рассмотрим два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель в грозовом облаке.

4. a) Первый возможный источник электромагнитного излучния связан с колебаниями мелких заряженных капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 μm. Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^3\,\mathrm{cm}^{-3}$. Осцилляции облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие в результате столкновительных процессов или в результате реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды α_n колебаний облачных капель, согласно данным натурных наблюдений [6–8], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. Иными словами, отношение (α_n/R), входящее в (19), можно принимать не зависящим от радиуса и имеющим величину порядка десятых долей единицы. Данные натурных измерений средних зарядв на каплях в грозовых облаках [10] показывают, что отношение (Q^2/R^3) можно считать примерно постоянным для капель разных размеров. Величина параметра W для средних зарядов на каплях, согласно [10], много меньше единицы, т.е. бóльшая часть облачных капель находится достаточно далеко от предела неустойчивости по отношению к собственному заряду. В итоге при $\rho_1 \gg \rho_2$, согласно (19), интенсивность электромагнитного излучения от осциллирующей облачной капли наиболее сильно зависит от номера моды n реализующихся осцилляций и их относительной амплитуды (α_n/R). Для численных оценок примем $\varepsilon = 1$, $n = 2$, $\sigma = 73$ dyn/cm, $\rho_1 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$, $\alpha_n = 0.1\,R$, $R = 30\,\mu\mathrm{m}$, $Q = 2.5 \cdot 10^{-6}$ CGSE. Тогда из (19) несложно получить $I \approx 10^{-21}$ W на частоте ≈ 100 kHz. Интенсивность электромагнитного излучения из объема в cm^3 будет примерно в тысячу раз больше, если учесть сказанное о постоянстве отношение (Q^2/R^3), т.е. $\approx 10^{-18}$ W, и будет приходиться на полосу частот от 100 kHz до 3 MHz. Интегральная же интенсивность электромагнитного излучения из грозового облака диаметром 5 km будет уже значительной: $I_{in} \approx 70$ mW. В проведенной оценке мы принимали, что осцилляции всех капель связаны с основной модой $n = 2$. Если учесть возбуждение более высоких мод, то интегральная интенсивность будет увеличиваться $\sim n^2$.

b) Второй возможный источник электромагнитного излучения связан, согласно [5], со свободно падающими в облаке гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и потому непрерывно колеблющимися и, следовательно, излучающими. Однако в [5] на роль излучающих гидрометеоров предлагались сильно заряженные капли радиуса $R = 1$ mm, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [10,11], весьма мала — $\sim 1\,\mathrm{m}^{-3}$. В итоге оценки интенсивности электромагнитного излучения из грозового облака, основанные на обсуждаемом механизме, проведенные для экстремальных численных значений зарядов и концентраций капель с $R = 1$ mm, по всей видимости, существенно завышены. Тем не менее сам механизм, предложенный в [5], несомненно, должен работать, если в его основу положить на порядок более мелкие капли с $R = 100\,\mu$m, концентрация которых в грозовом облаке, согласно данным наблюдений [10,11], достаточно высока $\sim 10^3\,\mathrm{m}^{-3}$, а скорость их свободного падения имеет величину ≈ 78 cm/s. При такой скорости падения сквозь облако капель с радиусами от 3 до 30 μm с максимумом концентрации, приходящимся на диапазон от 3 до 7 μm, гидрометеор будет испытывать ежесекундно около 22 столкновений, при которых в нем будут возбуждаться осцилляции мод с $n \approx 20$. Принимая для оценки $\alpha_n = 0.1\,R$, $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ CGSE [10], несложно оценить по (19) интенсивность электромагнитного излучения единичного гидрометеора $I \approx 1.5 \cdot 10^{-16}$ W, частота которого будет ≈ 25 kHz. Интегральную интенсивность электромагнитного излучения от всех гидрометеоров из грозового облака диаметром 5 km легко найти: $I_{in} \approx 10$ mW.

Таким образом, из двух вышеразобранных возможных источников электромагнитного излучения осциллирующих капель в грозовом облаке первый, связанный с осцилляциями низких мод мелких капелек, имеет бóльшую интенсивность и идет в области более высоких частот, чем второй, связанный с осцилляциями высоких мод крупных капель, свободно падающих в облаке в поле сил тяжести (гидрометеоров).

Следует отметить, что все проведенные оценки относятся к идеально проводящей жидкости, поэтому существенно завышены (по крайней мере для воды). Для получения более реалистичных оценок следует необходимо учитывать конечную проводимость реальных жидкостей, или, что то же самое, эффект релаксации заряда в жидкости. Это в свою очередь подразумевает решение задачи для вязкой жидкости, поскольку лишь в этом случае можно скомпенсировать возникающие из-за релаксации заряда касательные напряжения на границе раздела сред. Но это дело будущего.

Заключение

Фоновое шумовое излучение заряженных облаков естественного и искусственного происхождения может быть частично объяснено излучением в линейном по амплитудам мод приближении электромагнитных волн при капиллярных колебаниях капель, составляющих облако, как крупных с $R \approx 100\,\mu$m, так и мелких с $R \approx 3\,\mu$m.

Приложение.

Расчет напряженности электрического поля у поверхности колеблющейся заряженной капли и производной по времени от давления электрического поля на ее поверхность

1. Для нахождения электрического поля, создаваемого во внешней среде заряженной проводящей сферической каплей, поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением, необходимо решить систему уравнений, содержащую условие неразрывности электрического поля и волновые уравнения, которые имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \Delta\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{1П}$$

с граничными условиями

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \to 0;$$

$$r = R + \xi: \qquad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S (\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla}\Phi)\,dS = \frac{Q}{\varepsilon},$$

$$S = \left[r = R + \xi(\Theta, t),\ 0 \le \Theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi\right].$$

Будем искать решения уравнений (1П) в сферических координатах с началом в центре масс капли в виде суперпозиции

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r) + \mathbf{E}_1(r, \Theta, t), \tag{2П}$$

где $\mathbf{E}_0(r)$ — напряженность электрического поля в окрестности невозмущенной сферы; $\mathbf{E}_1(r, \Theta, t)$ — добавка к напряженности поля, вызванная капиллярными колебаниями поверхности капли, имеющая тот же порядок малости, что и возмущение поверхности $\mathbf{E}_1 \sim \xi$.

В силу линейности уравнений (1П) и разложения (2П) вектора $\mathbf{E}_0(r)$ и $\mathbf{E}_1$ будут решениями систем уравнений, аналогичных (1).

2. Для отыскания напряженности поля в нулевом приближении $\mathbf{E}_0(r)$ имеем задачу

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = 0; \tag{3П}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 0; \tag{4П}$$

$$r = R: \qquad \mathbf{E}_0\boldsymbol{\tau} = 0; \tag{5П}$$

$$\oint_S \mathbf{E}_0\,d\mathbf{S} = \frac{4\pi Q}{\varepsilon}; \tag{6П}$$

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) \to 0.$$

Будем искать $\mathbf{E}_0$ в виде $\mathbf{E}_0 = \boldsymbol{\nabla}\Psi$. Уравнение (3П) при этом удовлетворяется тождественно, а уравнение (4П) преобразуется в уравнение Лапласа для потенциала Ψ

$$\Delta\Psi = 0. \tag{7П}$$

В силу центральной симметрии задачи нулевого порядка малости уравнение (7П) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0,$$

имеющего решение

$$\Psi = -\frac{A}{r}.$$

Тогда для напряженности поля $\mathbf{E}_0$ получим

$$\mathbf{E}_0 = \frac{A}{r^2}\,\mathbf{e}_r. \tag{8П}$$

Граничное условие (5П) выполняется при произвольном значении константы A, так как $\mathbf{e}_r \perp \boldsymbol{\tau}$. Чтобы найти значение этой постоянной, подставим (8П) в граничное условие (6П) и получим $A = Q/\varepsilon$. Окончательно выражение для напряженности поля $\mathbf{E}_0$ принимает вид

$$\mathbf{E}_0(r) = \frac{Q}{\varepsilon r^2}\,\mathbf{e}_r.$$

3. Для определения добавки первого порядка малости к напряженности электрического поля проведем скаляризацию уравнений (1П). Представим вектор $\mathbf{E}_1$ в виде разложения

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1 + \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3, \tag{9П}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\mathbf{N}}_1 = \boldsymbol{\nabla};\ \hat{\mathbf{N}}_2 = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r};\ \hat{\mathbf{N}}_2 = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r}) \\ &\hat{\mathbf{N}}_1^+ = -\boldsymbol{\nabla};\ \hat{\mathbf{N}}_2^+ = \mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla};\ \hat{\mathbf{N}}_3^+ = (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{\nabla} \end{aligned}\right\}$$

$$\times\ \hat{\mathbf{N}}_j^+\hat{\mathbf{N}}_m = 0 \qquad (m \ne j), \tag{10П}$$

а Ψ_j — неизвестные скалярные функции.

С учетом свойства (10П) первое из уравнений системы (1П) преобразуется в уравнение Лапласа для функции Ψ_1

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\mathbf{E}_1 &= -\hat{\mathbf{N}}_1^+\mathbf{E}_1 = -\hat{\mathbf{N}}_1^+\left(\hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1 + \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3\right) \\ &= -\hat{\mathbf{N}}_1^+\hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1 = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\Psi_1 = \Delta\Psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{11П}$$

Несложно убедиться, что операторы $\hat{\mathbf{N}}_j$ коммутируют с оператором Лапласа, т. е. $\hat{\mathbf{N}}_j\Delta = \Delta\hat{\mathbf{N}}_j$, благодаря чему второе уравнение системы (1П) преобразуется в систему трех скалярных уравнений. Подставим разложение (9П) в волновое уравнение из системы (1П)

$$\sum_{j=1}^{3}\hat{N}_j\left[\Delta\Psi_j - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial t^2}\right] = 0.$$

Умножая слева последнее выражение последовательно на $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ и учитывая, что $\hat{\mathbf{N}}_j^+\hat{\mathbf{N}}_j \ne 0$, получим

$$\Delta\Psi_j - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_j}{\partial t^2} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{12П}$$

Поскольку мы решаем задачу об излучении каплей электромагнитных волн, естественно принять $\Psi \sim \exp(-i\omega t)$, то уравнения (12П) сведутся к уравнениям Гельмгольца.

Из уравнения (12П) при значении индекса $j = 1$ и уравнения (11П) получим $(\omega^2/c^2)\Psi_1 = 0$, и поскольку частота колебаний ω отлична от нуля, то, следовательно, скалярная функция $\Psi_1 = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля $\mathbf{E}_1$, создаваемого колебаниями поверхности заряженной капли, будет записываться следующим образом:

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3. \tag{13П}$$

Функции Ψ_2 и Ψ_3 будут являться решениями скаляризованного уравнения Гельмгольца, имеющего вид

$$\Delta\Psi_j + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi_j = 0; \qquad j = 2, 3. \tag{14П}$$

В сферической системе координат в общем случае отдельные компоненты $\mathbf{E}_1$, согласно (13П), записываются следующим образом:

$$\hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 = 0\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial\Psi_2}{\partial\phi}\mathbf{e}_\Theta - \frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\phi, \tag{15П}$$

$$\hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3 = -\frac{1}{r}\hat{L}\Psi_3\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Psi_3}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\Theta + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Psi_3}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi. \tag{16П}$$

В силу того что решается осесимметричная задача, в выражениях (15П) и (16П) следует отбросить слагаемые, содержащие производные по ϕ. Тогда имеем

$$\hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 \equiv -\frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\phi,$$

$$\hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3 = -\frac{1}{r}\hat{L}\Psi_3\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Psi_3}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\Theta. \tag{17П}$$

4. Решение для неизвестных функций Ψ_j запишется в виде

$$\Psi_j = \sum_n D_n^{(j)}(kr)^{-1/2}H^{(2)}_{n+1/2}(kr)\mathfrak{F}_n(\mu); \; j = 2, 3, \tag{18П}$$

где $H^{(2)}_{n+1/2}(kr)$ — вторая функция Ханкеля, выбираемая из тех соображений, чтобы на асимптотике $(r \to \infty)$ электромагнитная волна расходилась; $k = (\omega/c)$ — волновое число.

Неизвестные константы $D_n^{(j)}$ в решениях (18П) определяются из граничных условий эквипотенциальности поверхности капли и сохранения полного заряда. Заметим, что для тороидальной компоненты поля $\mathbf{E}_1$, определяемой функцией Ψ_2, эти граничные условия приведут к следующим соотношениям:

$$r = R + \xi: \qquad \left(\hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2\right)\boldsymbol{\tau} = 0, \tag{19П}$$

$$\oint_S \left[\left(\hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2\right)\mathbf{n}\right]ds = 0, \tag{20П}$$

где $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ — единичные орты касательной и нормали к поверхности капли.

Поскольку величина $\mathbf{E}_1$, а следовательно, согласно (11П), и функции Ψ_j имеют первый порядок малости, то выражения (19П) и (20П) следует брать на невозмущенной поверхности капли, т.е. при $r = R$. При этом вектором $\boldsymbol{\tau}$ могут служить орты сферической системы координат $\mathbf{e}_\Theta$ и $\mathbf{e}_\phi$, а вектор нормали $\mathbf{n}$ будет совпадать с ортом $\mathbf{e}_r$.

Согласно (17П), тороидальная компонента поля $\mathbf{E}_1(\hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2)$ имеет лишь составляющую $\sim \mathbf{e}_\phi$, и, значит, соотношения (20П) и (19П) при $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\Theta$ удовлетворяются тождественно при любых константах $D_n^{(2)}$ в решении (18П). Из условия (19П) при $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\phi$ и (17П) получим

$$r = R: \qquad \frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta} = 0.$$

Поскольку это соотношение должно быть справедливым при любом значении угла Θ, то необходимо потребовать обращения в нуль всех констант $D_n^{(2)}$ в решении для Ψ_2. Таким образом, поле $\mathbf{E}_1$ полностью определяется скалярной функцией Ψ_3

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3 \equiv \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r})\Psi_3$$

или с учетом (17П) и (18П) получим

$$\mathbf{E}_1 = \sum_n \exp(i\omega t)\left\{E_{nr}n(n+1)\mathfrak{F}_n(\mu)\,\mathbf{e}_r + E_{n\Theta}\frac{\partial\mathfrak{F}_m(\mu)}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\Theta\right\},$$

$$E_{nr} = D_n k^{-1/2} r^{-3/2} H^{(2)}_{n+1/2}(kr),$$

$$E_{n\Theta} = 2E_{nr} + r\frac{\partial E_{nr}}{\partial r}. \tag{21П}$$

5. Полная напряженность электрического поля, создаваемого каплей, запишется в виде

$$\mathbf{E}_1 = -\boldsymbol{\nabla}\frac{Q}{r} + \sum_n \exp(-i\omega t) \times \left\{E_{nr}n(n+1)\mathfrak{F}_n(\mu)\,\mathbf{e}_r + E_{n\Theta}\frac{\partial\mathfrak{F}_n(\mu)}{\partial\Theta}\mathbf{e}_\Theta\right\}. \tag{22П}$$

Для нахождения поля вблизи поверхности капли необходимо разложить функцию Ханкеля при малом значении аргумента $(kr \ll 1)$. Согласно [12], вторая функция Ханкеля может быть представлена в виде

$$H^{(2)}_{n+1/2}(kr) = i^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp(-iz)y_n\left(-\frac{1}{iz}\right),$$

где полином $y_n(\xi)$ определяется формулой Родрига

$$y_n(\xi) = 2^{-n}\exp\left(\frac{2}{\xi}\right)\frac{d^n}{d\xi^n}\left[\xi^{2n}\exp\left(-\frac{2}{\xi}\right)\right].$$

Пользуясь этими соотношениями, несложно получить требуемое разложение для функции Ханкеля при малом значении аргумента

$$H^{(2)}_{n+1/2}(kr) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(-1)^n C_n}{r^{n+1/2}}\left(\frac{c}{\omega}\right)^{n+1/2}\left(1 - i\,\frac{\omega}{c}\,r\right), \tag{23П}$$

где $C_n \equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)$.

В силу (23П) выражения для E_{nr} и $E_{n\Theta}$ перепишутся следующим образом:

$$E_{nr} = D_n\,\frac{i(-1)^n C_n}{r^{n+2}}\left(\frac{c}{\omega}\right)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - i\,\frac{\omega}{c}\,r\right), \tag{24П}$$

$$E_{n\Theta} = -D_n\,\frac{i(-1)^n C_n n}{r^{n+2}}\left(\frac{c}{\omega}\right)^{n+1} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1 - ir\,\frac{\omega}{c}\,\frac{(n-1)}{n}\right]. \tag{25П}$$

Для определения неизвестной константы D_n учтем, что поверхность проводящей капли эквипотенциальна, т.е. проекция вектора $\mathbf{E}$ на орт касательной к поверхности $\boldsymbol{\tau}$ есть нуль

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{26П}$$

Чтобы найти орт касательной к возмущенной поверхности капли, сначала найдем орт нормали к поверхности капли в виде

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla} F}{|\boldsymbol{\nabla} F|},$$

где $F = r - R - \xi(\Theta, t) = 0$ — уравнение возмущенной поверхности капли.

Получим

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\xi}{\partial\Theta}\,\mathbf{e}_\Theta. \tag{27П}$$

В силу осевой симметрии задачи орт касательной к параллелям совпадает с соответствующим ортом сферической системы координат $\boldsymbol{\tau}_\phi = \mathbf{e}_\phi$. Орт касательной в меридианальном направлении найдем, воспользовавшись известным векторным соотношением

$$\boldsymbol{\tau}_\Theta = \mathbf{n}\times\boldsymbol{\tau}_\phi. \tag{28П}$$

С учетом (27П) выражение для орта касательной запишется в виде

$$\boldsymbol{\tau}_\Theta = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\xi}{\partial\Theta}\,\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\Theta. \tag{29П}$$

Подставив (29П) и (22П) в (26П), получим условие эквипотенциальности проводящей капли

$$E_0\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial\xi}{\partial\Theta} + E_{n\Theta}\,\frac{\partial\mathfrak{F}_n(\mu)}{\partial\Theta} = 0. \tag{30П}$$

Подстановка выражений (8П) для E_0 и (25П) для $E_{n\Theta}$ в (30П) дает значение неизвестной константы D_n

$$D_n = \frac{Q\alpha_n R^{n-1}}{in(-1)^n C_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}}\left(\frac{\omega}{c}\right)^{n+1}\left[1 + iR\,\frac{\omega}{c}\,\frac{(n-1)}{n}\right]. \tag{31П}$$

Используя (31П), (24П), (25П), из (22П) найдем выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E}(r, \Theta, t)$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon r^2}\,\mathbf{e}_r + \sum_n \exp(i\omega t)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{Q\alpha_n}{R^3} \times\left\{\left[1 + i\,\frac{\omega}{c}\,(R-r) - i\,\frac{\omega}{c}\,R\,\frac{1}{n}\right](n+1)\mathfrak{F}_n(\mu)\,\mathbf{e}_r - \left[1 + i\,\frac{\omega}{c}\,(R-r)\frac{(n-1)}{n}\right]\frac{\partial\mathfrak{F}_n(\mu)}{\partial\Theta}\,\mathbf{e}_\Theta\right\}.$$

6. На основе полученного выражения можно найти давление электрического поля P_* на поверхности капли

$$r = R + \xi: \qquad P_* = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,(\mathbf{E})^2. \tag{32П}$$

Определенное таким образом давление поля относится к возмущенной поверхности капли $r = R + \xi$. А в гидродинамике волн бесконечно малой амплитуды динамическое граничное условие (9) мы относим к невозмущенной поверхности капли $r = R$. Поэтому разложим (32П) в окрестности $r = R$ с точностью до слагаемых первого порядка малости по отношению $|\xi|/R$

$$r = R: \qquad P_* \approx \frac{\varepsilon}{8\pi}\,(\mathbf{e})^2 + (\xi\boldsymbol{\nabla})\,\frac{\varepsilon}{8\pi}\,(\mathbf{E})^2.$$

Продифференцируем это выражение один раз по времени (при $\Theta = \mathrm{const}$) и найдем производную по времени от давления на поверхность капли собственного электрического поля

$$r = R:$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\,(\mathbf{E})^2\right) = \frac{i\omega}{4\pi}\,\frac{Q^2}{\varepsilon R^5}\sum_n \alpha_n\mathfrak{F}_n(\mu) \times\exp(i\omega t)\left((n-1) - \frac{i\omega R}{c}\,\frac{(n+1)}{n}\right).$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ 00-15-9925).

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

[2] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.

[3] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЭОМ. 2000. № 4. С. 17–28.

[4] *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.

[5] *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.

[6] *Beard K.V.* // Rev. Geophys. 1987. Vol. 25. N 1. P. 357–370.

[7] *Стерлядкин В.В.* // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.

[8] *Beard K.V., Ali Tokay.* // Geophys. Res. Lett. 1991. Vol. 18. N 12. P. 2257–2260.
[9] *Schweizer J.W., Hanson D.N.* // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
[10] Облака и облачная атмосфера. Справочник / Под ред. И.П. Мазина, А.Х. Хргиана, И.М. Имянитова. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
[11] *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 280 с.
[12] *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.