

Затухание блоховских осцилляций в сверхрешетках из квантовых точек. Общий формализм

© И.А. Дмитриев[†], Р.А. Сурис

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 14 мая 2002 г. Принята к печати 16 мая 2002 г.)

В формализме матрицы плотности построено квантовое кинетическое уравнение, описывающее затухание блоховских осцилляций в идеальных сверхрешетках из квантовых точек различной размерности ($1D$, $2D$, $3D$). Продемонстрирована возможность полного подавления однофононного рассеяния на оптических фононах и существенного подавления рассеяния на акустических фононах в сверхрешетках из квантовых точек благодаря эффективному управлению спектром путем изменения величины и ориентации постоянного электрического поля. Получены условия, при соблюдении которых единственным каналом рассеяния на фононах, ответственным за затухание блоховских осцилляций, остается рассеяние на акустических фононах внутри поперечных минизон штарковской лестницы состояний носителей.

1. Введение

Общеизвестно, что экспериментальное наблюдение явления блоховских осцилляций (БО) крайне затруднительно из-за необходимости выполнения чрезвычайно жестких условий слабости рассеяния носителей за период осцилляций,

$$\tau_{\text{эф}}^{-1} < f_{\text{BO}} \equiv eFa/h. \quad (1)$$

Здесь $\tau_{\text{эф}}$ — эффективное время рассеяния, f_{BO} — частота БО, пропорциональная величине электрического поля F и длине пространственной периодичности в направлении электрического поля a . Первые наблюдения БО, теоретически описанные в фундаментальной работе Блоха еще в 1928 году [1], были выполнены только в начале 90-х годов прошлого века в совершенных сверхрешетках из квантовых ям (СРКЯ) на основе полупроводниковых соединений $A^{III}B^V$ [2,3]. Период сверхрешетки в десятки раз превосходит межатомные расстояния, и условие (1) может удовлетворяться уже при приемлемой величине электрического поля, составляющей десятки кВ/см, при этом частота БО оказывается порядка ТГц [4,5]. Отсюда огромный практический интерес к явлению БО в сверхрешетках — он обусловлен прежде всего возможностью создания источников и приемников излучения в терагерцовом частотном диапазоне.

Однако в СРКЯ, как и в объемных полупроводниках, при любой величине электрического поля остается сильное неустраняемое рассеяние носителей на колебаниях решетки, приводящее к быстрому затуханию БО. Даже в области очень низких температур, $T \approx 10$ К, время жизни БО составляет всего десяток периодов осцилляций [2,3,6–8], при комнатной же температуре время затухания становится порядка периода осцилляций [9].

Настоящая работа посвящена теоретическому описанию процессов, приводящих к затуханию блоховских осцилляций в сверхрешетках из квантовых точек (СРКТ). Изучаемая нами система — это массив слабо связан-

ных одинаковых квантовых точек (КТ), периодически расположенных в пространстве и образующих таким образом идеальную сверхрешетку из квантовых точек любой симметрии и размерности ($1D$, $2D$, $3D$). Мы показываем, что, в отличие от СРКЯ, в СРКТ есть возможность сильного подавления рассеяния носителей за счет эффективного управления спектром электронов путем изменения величины и направления постоянного электрического поля.

Известно, что в СРКЯ на основе полупроводниковых соединений $A^{III}B^V$ или $A^{II}B^{VI}$ быстрое затухание БО в основном обеспечивается переходами между электронными состояниями с участием оптических фононов [7,8]. Проведенное нами исследование спектра и волновых функций электрона в идеальной СРКТ в постоянном электрическом поле показало [10], что в СРКТ рассеяние на оптических фононах может быть полностью подавлено подходящим выбором величины электрического поля и его ориентации относительно кристаллографических осей СРКТ. В то же время рассеяние на акустических фононах в СРКТ должно становиться сильнее, чем в СРКЯ, поскольку электроны в квантовых точках локализованы во всех трех направлениях и плотность электронных состояний здесь существенно возрастает. В настоящей работе мы показываем, что эффективное управление спектром СРКТ путем изменения величины и направления электрического поля позволяет существенно подавить также и рассеяние на акустических фононах.

В работе выявлены условия, при выполнении которых главным каналом рассеяния в идеальной СРКТ становится рассеяние на акустических фононах внутри минизон поперечного движения носителей, образующихся на каждом уровне штарковской лестницы состояний электронов в СРКТ в электрическом поле. Отнюдь не очевидно, что такое рассеяние должно приводить к затуханию БО. Поэтому для оценки скорости затухания БО при рассеянии внутри поперечных минизон необходима более строгая и последовательная теория.

[†] E-mail: dmitriev@theory.ioffe.rssi.ru
Fax: 7(812)2471017

БО в штарковском представлении (представлении собственных волновых функций носителей в СРКТ в электрическом поле) суть квантовые биения между состояниями штарковской лестницы. БО возникают, когда создана когерентная суперпозиция штарковских состояний. Тогда затухание БО есть следствие потери когерентности между штарковскими состояниями при рассеянии носителей и наиболее естественным способом описания затухания БО является формализм матрицы плотности.

В работе из общего уравнения для матрицы плотности выведено квантовое кинетическое уравнение, описывающее затухание БО. Теория применима при любом способе возбуждения БО в изолированной минизоне идеальной СРКТ любой симметрии, находящейся в электрическом поле произвольной величины и ориентации.

2. Блоховские осцилляции в отсутствие рассеяния

Как следует из теоремы Блоха, в отсутствие электрического поля спектр электронов в сверхрешетке (СР) представляет собой набор минизон, образующихся в дополнительном периодическом потенциале СР, модулирующем дно зоны проводимости материала, в котором выращена СР [4,5]. Хаустон показал [11], что условие „изолированности“ минизоны, т.е. отсутствие переходов между минизонами под действием постоянного электрического поля, можно записать в виде

$$\frac{4eF\hbar^2}{mW^2a} \ll 1, \quad (2)$$

где m — эффективная масса электрона в материале СР, W — величина энергетической щели между минизонами, F — напряженность электрического поля. В этой работе величина электрического поля и резонансных интегралов между КТ предполагается настолько малой, что условие (2) выполнено и, таким образом, применимо одноминизонное приближение. Спектр выбранной минизоны ввиду периодичности всегда можно представить в виде разложения Фурье по собственным векторам СРКТ $\mathbf{R} = \sum n_i \mathbf{a}_i$, где \mathbf{a}_i — базисные кристаллографические вектора СРКТ:

$$\mathcal{E}(\mathbf{K}) = \sum_{\mathbf{R}} \frac{\Delta_{\mathbf{R}}}{4} \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}). \quad (3)$$

Здесь \mathbf{K} — волновой вектор, лежащий в первой зоне Бриллюэна СРКТ, величины $\Delta_{\mathbf{R}}/4$ в приближении сильной связи для электронов в минизоне СРКТ имеют смысл резонансных интегралов между квантовыми точками, удаленными на вектор СРКТ \mathbf{R} . Величина резонансных интегралов $\Delta_{\mathbf{R}}/4$ экспоненциально уменьшается с ростом расстояния между квантовыми точками $|\mathbf{R}|$ [10].

В отсутствие рассеяния при мгновенном включении электрического поля в такой системе возникают блоховские осцилляции. Далее мы приводим два эквивалентных способа их описания, которые будут использоваться в дальнейшем.

2.1. Блоховские осцилляции в хаустоновском представлении

Хаустоновское представление является наиболее естественным для описания блоховских осцилляций, возникающих в любом периодическом потенциале при мгновенном включении поля в отсутствие рассеяния и переходов между зонами разрешенных энергий носителей. Обозначим через $\Psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$ блоховские волновые функции выбранной минизоны, описываемой гамильтонианом $\hat{H}_0(\hbar\hat{\mathbf{K}}, \mathbf{r})$. Эти волновые функции нам удобно представить в виде разложения

$$\Psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} \phi(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}), \quad (4)$$

где $\phi(\mathbf{r})$ — функция Ванье [12,13], определяемая соотношением

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{\mathbf{K}} \Psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

(\mathcal{N} — количество узлов СРКТ в нормировочном объеме) и в пределе сильной связи совпадающая с волновой функцией электрона в изолированной квантовой точке.

Пусть в момент времени $t = 0$ включается электрическое поле \mathbf{F} , которое мы введем в гамильтониан через векторный потенциал:

$$\hat{H}_F \equiv \hat{H}_0 \left(\hbar\hat{\mathbf{K}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \mathbf{r} \right) = \hat{H}_0(\hbar\hat{\mathbf{K}} + e\mathbf{F}t, \mathbf{r}). \quad (6)$$

Хаустон показал [11], что для изолированной минизоны (2) решением нестационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом \hat{H}_F являются функции

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) &= \Psi_{\mathbf{K}(t)}(\mathbf{r}) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int^t \mathcal{E}[\mathbf{K}(\tau)] d\tau \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{R}} \phi(\mathbf{r} - \mathbf{R}) e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} + \Omega_{\mathbf{R}} t)} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int^t \sum_{\mathbf{R}'} \frac{\Delta_{\mathbf{R}'}}{4} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}' + \Omega_{\mathbf{R}'} \tau)} d\tau \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Электрон движется в \mathbf{K} -пространстве с постоянной скоростью, задаваемой электрическим полем, $\hbar\mathbf{K}(t) = \hbar\mathbf{K} + e\mathbf{F}t$, и претерпевает брэгговские отражения на границе зоны Бриллюэна СРКТ. Движение электрона представляет собой наложение колебаний со штарковскими частотами, являющимися комбинацией нескольких основных частот: $\Omega_{\mathbf{R}} \equiv (e/\hbar)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{R}) = (e/\hbar) \sum n_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i) = \sum n_i \Omega_i$. Такое движение периодически, если все отношения Ω_i/Ω_k рациональны, и квазипериодично, если хотя бы одно из этих отношений —

иррациональное число (поскольку сколь угодно близко всегда найдется рациональное).

Электронные осцилляции сопровождаются осцилляциями тока. В случае мгновенного включения электрического поля изначально электроны равномерно распределены по блоховским состояниям минизоны. Ток $\mathbf{j}(t)$ в этом случае однороден и правильно описывается в квазиклассическом приближении. Применяя к электронам законы квазиклассической динамики

$$\hbar \mathbf{v}(\mathbf{K}) = \nabla_{\mathbf{K}} \mathcal{E}(\mathbf{K}), \quad \frac{\partial}{\partial t} (\hbar \mathbf{K}) = e \mathbf{F}, \quad (8)$$

с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= en_e \int d\mathbf{K} \mathbf{v}(\mathbf{K} + e\mathbf{F}t/\hbar) f(\mathbf{K}) \\ &= \sum_{\mathbf{R}} \frac{en_e \Delta_{\mathbf{R}} \mathbf{R}}{2\hbar} \langle \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}) \rangle \sin(\Omega_{\mathbf{R}} t), \end{aligned} \quad (9)$$

где n_e — концентрация электронов; $f(\mathbf{K})$ — функция начального распределения электронов, нормированная на один электрон; \mathbf{v} — групповая скорость электрона; угловые скобки означают усреднение с функцией распределения.

Из (9), (7) можно увидеть существенные преимущества использования СРКТ для практических применений блоховских осцилляций перед сверхрешетками, образованными квантовыми ямами. В СРКЯ осцилляции происходят на одной частоте $\Omega = eFa/\hbar$, где a — период сверхрешетки, F — проекция электрического поля на ось СРКЯ. В СРКТ спектр осцилляций состоит из двух (2D СРКТ) или трех (3D СРКТ) основных частот Ω_i [14] (резонансные интегралы $\Delta_{\mathbf{R}}/4$ экспоненциально убывают с ростом расстояния между КТ $|\mathbf{R}|$, соответственно амплитуда других гармоник экспоненциально меньше амплитуд базовых слагаемых). Изменяя ориентацию электрического поля относительно базовых векторов СРКТ и его величину, мы имеем возможность независимо изменять основные частоты.

2.2. Штарковские состояния электрона в сверхрешетках из квантовых точек

Другой способ описания блоховских осцилляций основан на штарковском представлении собственных функций гамильтониана \hat{H}_F СРКТ в постоянном электрическом поле [10]. Здесь мы приведем основные результаты [10], необходимые для дальнейшего. Будем искать волновые функции в виде разложения по функциям Ванье (5):

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum C_{\rho} \phi(\mathbf{r} - \rho), \quad (10)$$

где ρ — вектора СРКТ. Тогда уравнение для коэффициентов C_{ρ} имеет вид

$$(E + e\mathbf{F} \cdot \rho) C_{\rho} - \sum_{\rho_1} \Delta_{\rho - \rho_1} C_{\rho_1} = 0. \quad (11)$$

Решения уравнения (11) качественно различны для двух классов ориентаций электрического поля относительно базовых векторов СРКТ.

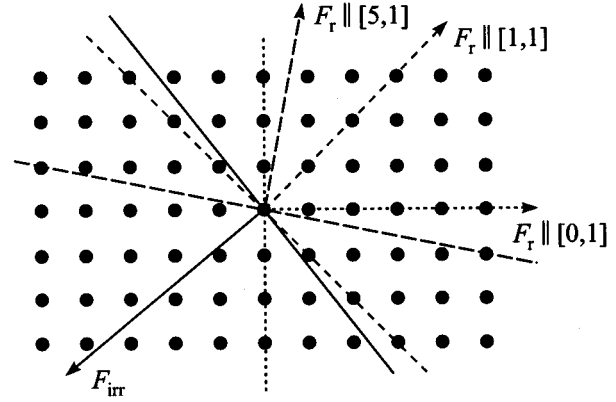


Рис. 1. Рациональные (F_r) и иррациональные (F_{irr}) направления поля в 2D СРКТ.

Если все отношения проекций электрического поля на базисные вектора СРКТ $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i)/(\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_k) = \Omega_i/\Omega_k$ — иррациональные числа (иррациональные направления поля), то электрический потенциал всех узлов СРКТ различен (рис. 1). Спектр в этом случае дискретен и образует в зависимости от размерности СРКТ одномерную, двумерную или трехмерную штарковскую лестницу:

$$E_{\mathbf{R}} = -e\mathbf{F} \cdot \mathbf{R} = -\sum n_i \hbar \Omega_i. \quad (12)$$

Электрон в таких состояниях локализован во всех направлениях.

В случае, когда хотя бы одно из отношений Ω_i/Ω_k становится рациональным числом (рациональные направления поля), в перпендикулярной к полю плоскости образуются цепочки (или плоскости) квантовых точек, электрический потенциал которых одинаков (рис. 1). В [10] показано, что снятие вырождения, которое дает (12) для таких ориентаций поля, возможно только при учете резонансных интегралов, связывающих квантовые точки в поперечных цепочках (плоскостях). При этом на каждой ступени штарковской лестницы образуется поперечная минизона и спектр приобретает вид

$$E_{\mathbf{R}}(K_{\perp}) = -e\mathbf{F} \cdot \mathbf{R} + \sum_{\rho \perp \mathbf{F}} \frac{\Delta_{\rho}}{4} \cos(\mathbf{K} \cdot \rho). \quad (13)$$

Поскольку расстояние между КТ в поперечных цепочках (плоскостях) различно для разных рациональных направлений поля (рис. 1), а резонансные интегралы экспоненциально зависят от расстояния между КТ, ширина поперечной минизоны в (13) также экспоненциально зависит от направления поля (рис. 2). Общее точное выражение для спектра (13) с учетом экспоненциальной зависимости резонансных интегралов от расстояния между КТ для каждого рационального направления поля может быть представлено в виде

$$\epsilon_N^k = -N\hbar\Omega + \frac{\Delta_{\perp}}{2} \cos(ka_{\perp}), \quad (14)$$

где введено используемое везде далее обозначение для волнового вектора поперечного движения $\mathbf{k} \equiv \mathbf{K}_{\perp}$;

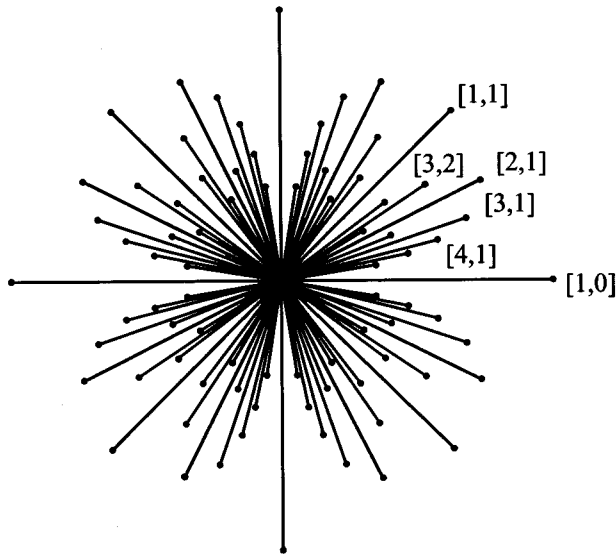


Рис. 2. Зависимость ширины поперечных минизон от ориентации электрического поля относительно кристаллографических осей 2D СРКТ (длины лучей соответствуют ширине поперечных минизон в логарифмическом масштабе при данном направлении электрического поля).

$\Omega = eFa_{\parallel}/\hbar$ — минимальная штарковская частота, соответствующая разности электростатического потенциала между соседними поперечными цепочками квантовых точек (рис. 1) (все остальные собственные частоты являются целым кратным от Ω); a_{\parallel} — расстояние между поперечными цепочками (заметим, что оно не совпадает с периодом СРКТ в направлении электрического поля (рис. 1)), a_{\perp} — расстояние между КТ в поперечных цепочках, $\Delta_{\perp}/4$ — резонансные интегралы между ближайшими КТ в цепочке, так что Δ_{\perp} — ширина поперечных минизон.

В [10] также найдены волновые функции электронов в состояниях (13) для произвольной ориентации электрического поля в виде разложения (10) по функциям Ванье (5), $|\rho\rangle = \phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})$. В случае рациональных направлений поля (14)

$$\hat{H}_F|N, k\rangle = \hat{H}_F \sum \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) C_{\rho}^{N,k} |\rho\rangle = \hbar \varepsilon_N^k |N, k\rangle. \quad (15)$$

Здесь мы не будем приводить общие выражения для коэффициентов $C_{\rho}^{N,k}$, которые довольно сложны, и приведем выражения лишь для случая, когда электрическое поле \mathbf{F} направлено вдоль одной из главных осей прямоугольной 2D СРКТ. В этом случае для описания СРКТ применимо приближение ближайших соседей, спектр и собственные функции \hat{H}_F имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \hat{H}_F|N, k\rangle &= \hat{H}_F \sum C_{n_{\parallel}, n_{\perp}}^{N,k} |n_{\parallel}, n_{\perp}\rangle = \hbar \varepsilon_N^k |N, k\rangle, \\ \hbar \varepsilon_N^k &= -N\hbar\Omega + \Delta_{\perp}/2 \cos(ka_{\perp}), \\ C_{\rho}^{N,k} &= e^{ika_{\perp}n_{\perp}} J_{n_{\parallel}-N} \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{2\hbar\Omega} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и везде далее все величины, относящиеся к направлению электрического поля, имеют индекс \parallel , а величины, относящиеся к направлению поперечного движения — индекс \perp ; $|n_{\parallel}, n_{\perp}\rangle = |\rho\rangle = \phi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})$ — функции Ванье рассматриваемой минизоны (5), центрированные в узлах СРКТ с координатами $\boldsymbol{\rho} = n_{\parallel}a_{\parallel} + n_{\perp}a_{\perp}$, где a_{\parallel} , a_{\perp} — периоды СРКТ в направлении электрического поля и в перпендикулярном направлении; k — величина волнового вектора движения электрона в перпендикулярной к направлению поля цепочке квантовых точек в 2D СРКТ; $\Omega = eFa_{\parallel}/\hbar$ — штарковская частота; $\Delta_{\perp}/4$ — резонансный интеграл между соседними КТ в поперечных цепочках, определяющий ширину поперечной минизоны, $\Delta_{\parallel}/4$ — резонансный интеграл между соседними КТ в направлении поля; J_n — функции Бесселя первого рода.

Единственное, но весьма существенное отличие выражений (16) от спектра и волновых функций штарковской лестницы в СРКЯ заключается в узости поперечных минизон, образующихся здесь за счет резонансного туннелирования электронов в поперечных цепочках КТ. Как и в СРКЯ, длина локализации электрона в электрическом поле L_{loc} определяется отношением резонансного интеграла между ближайшими КТ в направлении поля и разностью электрических потенциалов этих КТ $\lambda = \Delta_{\parallel}/\hbar\Omega$: при $\lambda \gg 1$ $L_{\text{loc}} = \lambda a_{\parallel}$; если $\lambda \ll 1$, то электрон в основном локализуется в одной цепочке КТ, перпендикулярной электрическому полю, а амплитуда волновой функции в соседних цепочках при этом пропорциональна λ .

2.3. Блоховские осцилляции в штарковском представлении

Используя решение стационарного уравнения Шредингера (16), легко проследить динамику электрона при различных начальных условиях в отсутствие рассеяния. Далее мы покажем, что в этом формализме блоховские осцилляции представляют собой квантовые биения между состояниями штарковской лестницы.

Пусть в начальный момент времени волновая функция электрона образует когерентную смесь штарковских состояний (16):

$$\Psi(t=0) = \sum \chi_{N,k}^0 |N, k\rangle. \quad (17)$$

Временная эволюция штарковских состояний (16) известна, и можно сразу написать решение нестационарного уравнения Шредингера в виде

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \sum \chi_{N,k}^0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_N^k t\right) |N, k\rangle = \sum_{\rho} \xi_{\rho}(t) |\rho\rangle, \\ \xi_{\rho}(t) &= \sum_{N,k} \chi_{N,k}^0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_N^k t\right) C_{\rho}^{N,k}. \end{aligned} \quad (18)$$

В частности, если начальные условия факторизуются, $\chi_{N,k}^0 = \alpha_N \cdot \beta_k$, то для вероятности обнаружить электрон

в слое с индексом n получим

$$w_n = \sum_{n_{\perp}} |\xi_{n,n_{\perp}}|^2 = \sum_{N,N'} \alpha_N \alpha_{N'}^* J_{n-N} \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{2\hbar\Omega} \right) \times J_{n-N'} \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{2\hbar\Omega} \right) \exp[i(N - N')\Omega t]. \quad (19)$$

Отсюда видно, что в результате квантовых биений электронная плотность в каждой КТ осциллирует со штарковской частотой. Электронные осцилляции сопровождаются осцилляциями тока в направлении поля

$$j_n = \sum_{n_{\perp}} \frac{en_e \Delta_{\parallel} a_{\parallel}}{\hbar} \text{Im} \{ \xi_{n+1,n_{\perp}}^* \xi_{n,n_{\perp}}(t) \}. \quad (20)$$

Рассмотрим несколько способов создания когерентной смеси штарковских состояний.

2.3.1. Мгновенное включение поля. При мгновенном увеличении поля от нулевого значения изначально электроны равномерно распределены по блоховским состояниям минизоны СРКТ. Блоховскому состоянию с волновым вектором \mathbf{K}^0 в штарковском представлении соответствует $\chi_N^0 = \exp(iN\mathbf{K}_{\parallel}^0 \mathbf{a}_{\parallel}) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{K}^0}$. В этом случае суммирование в выражении для тока (20) с последующим усреднением по начальным волновым векторам с функцией распределения дает простой результат

$$j = \frac{en_e \Delta_{\parallel} a_{\parallel}}{2\hbar} \langle \cos K_{\parallel}^0 a_{\parallel} \rangle \sin(\Omega t), \quad (21)$$

совпадающий с полученным ранее в квазиклассическом приближении выражением для произвольного направления поля (9).

2.3.2. Мгновенное уменьшение поля. Пусть теперь в начальный момент времени электрон локализован в плоскости $\rho \cdot \mathbf{F} = 0$, что реализуется в очень сильном поле $eFa_{\parallel} \gg \Delta_{\parallel}$. Тогда $\chi_{N,k}^0 = J_N(\Delta_{\parallel}/2\hbar\Omega) \beta_k$ (как мы убедились в (19), зависимость от поперечного волнового вектора при факторизации начальных условий несущественна), и при резком уменьшении величины поля образуется так называемая „дышащая мода“,

$$j_n = \frac{en_e \Delta_{\parallel} a_{\parallel}}{\hbar} \cos(\Omega t/2) J_n \left[\frac{\Delta_{\parallel}}{\hbar\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \times J_{n+1} \left[\frac{\Delta_{\parallel}}{\hbar\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]. \quad (22)$$

Ток в этом случае антисимметричен: $j_n = -j_{-n-1}$, центр электронной плотности остается в плоскости $\rho \cdot \mathbf{F} = 0$, дипольный момент отсутствует. Расплывшись по области локализации $L_{\text{loc}} = a_{\parallel}(\Delta_{\parallel}/\hbar\Omega)$, через время $T = 2\pi/\Omega$ электрон опять локализуется в плоскости $\rho \cdot \mathbf{F} = 0$.

3. Каналы рассеяния в сверхрешетках из квантовых точек и слоистых сверхрешетках

Проведем теперь сравнительный анализ возможностей подавления рассеяния в слоистых СР и СРКТ. Из рис. 3 видно, что в сверхрешетках из квантовых ям

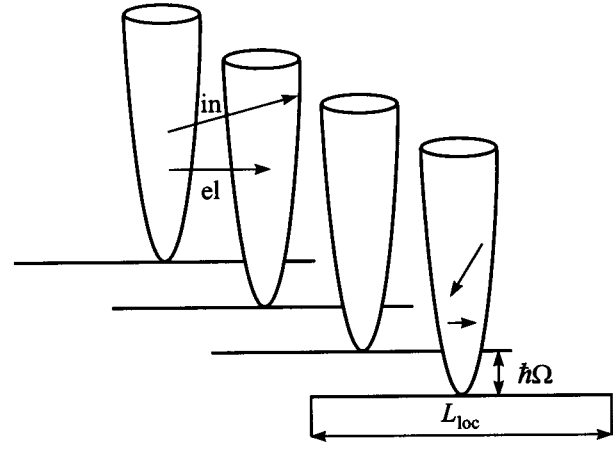


Рис. 3. Спектр СРКЯ в электрическом поле. Каналы неупругого (in) и упругого (el) рассеяния в СРКЯ.

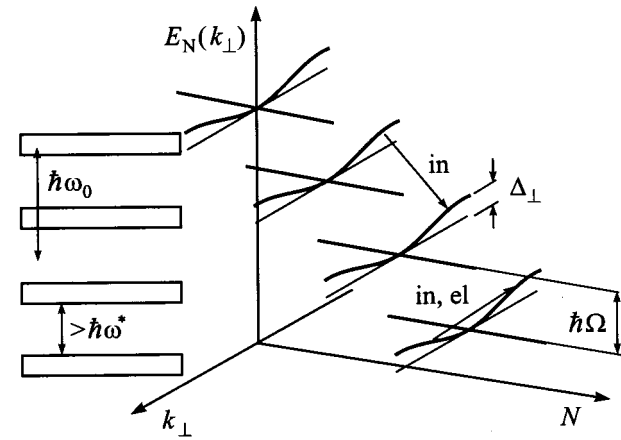


Рис. 4. Спектр 2D СРКТ в электрическом поле. Каналы неупругого (in) и упругого (el) рассеяния в 2D СРКТ.

благодаря широкому поперечному спектру рассеяние остается сильным при любой величине электрического поля. Энергетическое перекрытие состояний различных ступеней штарковской лестницы делает возможным как упругое рассеяние, так и рассеяние с участием оптических и акустических фононов.

Ситуация кардинально меняется в сверхрешетках из квантовых точек. Здесь имеется возможность изменять ширину поперечной минизоны, меняя ориентацию поля относительно осей СРКТ, и таким образом эффективно управлять спектром СРКТ в электрическом поле, а следовательно, и рассеянием.

Действительно, из рис. 4 видно, что однофононные процессы рассеяния с участием оптических фононов внутри поперечных минизон невозможны, если ширина поперечной минизоны Δ_{\perp} становится меньше энергии оптических фононов:

$$\Delta_{\perp} < \hbar\omega_0. \quad (23)$$

Пусть теперь поперечные зоны не перекрываются энергетически и для всех натуральных n выполнено условие

$$n\Omega + \frac{\Delta_{\perp}}{2\hbar} < \omega_0 < (n+1)\Omega - \frac{\Delta_{\perp}}{2\hbar}, \quad (24)$$

где $\hbar\Omega = eFa_{\parallel}$ — расстояние между соседними ступенями штарковской лестницы, Δ_{\perp} — ширина поперечных минизон. Тогда межминизонные однофононные процессы рассеяния с учетом оптических фононов также оказываются полностью подавленными (рис. 4).

Боле того, оказывается возможным сколь угодно сильно подавить межминизонные процессы рассеяния и на акустических фононах. Чтобы убедиться в этом, необходимо принять во внимание некоторые особенности взаимодействия с акустическими фононами в СРКТ.

3.1. Взаимодействие с акустическими фононами в сверхрешетках из квантовых точек

При учете взаимодействия с деформационными акустическими фононами гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - e\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} + \sum_q \hbar\omega_q b_q^+ b_q + i \sum_q A_q (b_q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - b_q^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}), \quad (25)$$

где b_q^+ , b_q — операторы рождения и уничтожения фонона с волновым вектором \mathbf{q} ; $\mathbf{A}_q = \mathbf{q}G\sqrt{\hbar/2\omega_q v_0 \rho_a}$, G — константа потенциала деформации, v_0 , ρ_a — объем элементарной ячейки и массовая плотность материала сверхрешетки. Для простоты здесь мы рассматриваем взаимодействие с объемными продольными деформационными колебаниями материала СРКТ, т.е. не учитываем влияния различия материалов внутри и снаружи КТ на спектр фононов. Соответственно нам удобно использовать волновые вектора фононов, определенные в зоне Бриллюэна материала СРКТ. Таким образом, в приближении линейного изотропного спектра $\omega_q = sq$, $q < 2\pi/a_0$, где s и a_0 — соответственно скорость звука и постоянная решетка материала СРКТ.

Матричные элементы электрон-фононного взаимодействия в штарковском представлении $|N, k\rangle$ для электронов (15) и представлении чисел заполнения $|\{v_q\}\rangle$ для фононов имеют вид

$$\begin{aligned} \langle N, k; \mathbf{0}_q | \hat{V}_{e-ph} | N', k', \mathbf{1}_q \rangle &= V_{Nk, N'k'}^{01} \\ &= V_{N-N'}^q \exp \left[\frac{i q_{\parallel} a_{\parallel}}{2} (N + N') \right] \sum_l \delta_{k', k + q_{\perp} + 2\pi l / a_{\perp}}, \\ V_{N-N'}^q &= i \mathbf{A}_q Q(q) \\ &\times \sum_{\rho} C_{\rho}^{N, k} \exp \left\{ i q_{\parallel} \left(\rho_{\parallel} - a_{\parallel} \frac{N + N'}{2} \right) \right\} C_{\rho}^{N', k}, \quad (26) \end{aligned}$$

где суммирование по l обеспечивает учет процессов переброса в поперечных минизонах,

$$Q(q) \equiv \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (27)$$

— формфактор, описывающий тонкую структуру волновых функций (15), построенных на функциях Ванье $|\rho\rangle = \phi(\mathbf{r}-\rho)$ минизоны СРКТ (5). В случае направления электрического поля вдоль базисного вектора прямоугольной 2D СРКТ расчет величин $V_{N-N'}^q$ дает

$$V_{N-N'}^q = i \mathbf{A}_q Q(q) (-i)^{N'-N} J_{N'-N} \left(\frac{\Delta_{\parallel}}{\hbar\Omega} \sin \frac{q_{\parallel} a_{\parallel}}{2} \right). \quad (28)$$

Для получения формфактора $Q(q)$ вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \langle \rho | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | \rho' \rangle &= \int d\mathbf{r} \phi^*(\mathbf{r}-\rho) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}-\rho') \\ &= e^{i\mathbf{q}\cdot\rho} \int d\mathbf{r}' \phi^*(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}-\rho' - \rho). \quad (29) \end{aligned}$$

В приближении сильной связи функции Ванье, относящиеся к различным узлам СРКТ, перекрываются слабо и диагональные элементы (29) много больше недиагональных. Действительно, при малых волновых векторах фонона $q \ll q^* = \pi/R_D$, где R_D — размер КТ, ортонормированность дает $\langle \rho | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | \rho' \rangle \approx e^{i\mathbf{q}\cdot\rho} \delta_{\rho, \rho'}$, а при $q \gg q^*$ интеграл (29) быстро убывает с ростом q , причем недиагональные элементы $\rho \neq \rho'$ к тому же всюду содержат туннельную малость. Таким образом,

$$\langle \rho | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | \rho' \rangle \approx e^{i\mathbf{q}\cdot\rho} \delta_{\rho, \rho'} Q(q),$$

$$Q(q) = \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \approx \begin{cases} 1, & q \ll q^*, \\ (q/q^*)^{-\beta}, & q \gg q^*. \end{cases} \quad (30)$$

Например, для сферической КТ радиуса R_D с бесконечно высокими стенками зависимость $Q(q)$ вычисляется аналитически и имеет вид

$$\begin{aligned} Q(q) &= \\ &= \frac{\text{Si}(\pi q/q^*) - (1/2) [\text{Si}(\pi q/q^* - 2\pi) + \text{Si}(\pi q/q^* + 2\pi)]}{\pi q/q^*}, \\ Q(q/q^* > 1) &\approx \frac{8 \cos(\pi q/q^*)}{\pi^2 (q/q^*)^4}, \quad (31) \end{aligned}$$

где $\text{Si}(x) = \int_0^x [\sin(y)/y] dy$ — интегральный синус.

В случае сферической ямы с конечными стенками и равенства эффективных масс внутри и снаружи квантовой точки

$$Q(q/q^* > 1) \approx \left[\left(\frac{2R_D}{\pi} \right)^3 |\phi(R_D)|^2 \frac{2mR_D^2 U_0}{\hbar^2} \right]^2 \frac{\cos^2(\pi q/q^*)}{(q/q^*)^4}, \quad (32)$$

где U_0 — глубина потенциала КТ, m — эффективная масса электрона в материале СРКТ.

В общем случае КТ произвольной формы можно показать, что показатель степени в (30) $\beta = 4$, если $|\phi(\mathbf{r})|^2$ экспоненциально спадает за пределами КТ и не имеет разрывов первой производной. Если же эффективные массы электрона внутри и снаружи квантовой точки различаются и возникает разрыв первой производной, то волна обрыва дает $\beta = 3$.

Такое сильное убывание формфактора с ростом волнового вектора фонона позволяет очень сильно подавить рассеяние на акустических фононах между поперечными минизонами штарковской лестницы (рис. 4). Действительно, из (30) следует, что если энергетический зазор между поперечными минизонами превышает энергию актуальных акустических фононов $\hbar\omega^* \equiv \hbar s\pi/R_D$, определяемому формфактором,

$$\hbar\Omega - \Delta_{\perp} > \hbar\omega^*, \quad (33)$$

то с увеличением энергетического зазора вероятность рассеяния на акустических фононах между минизонами, пропорциональная $Q^2(q)$, падает как $(\hbar\Omega - \Delta_{\perp})^{-2\beta}$, $\beta \geq 3$.

При выполнении условий (23), (24), (33) главным каналом рассеяния в идеальной СРКТ становится рассеяние на акустических фононах внутри поперечных минизон. Вообще говоря, отнюдь не очевидно, что такое рассеяние должно приводить к затуханию осцилляций, поскольку БО происходят вдоль направления электрического поля, а рассеивается в этом канале лишь поперечное движение носителей. Поэтому для оценки скорости затухания БО при рассеянии внутри поперечных минизон совершенно недостаточно вычисления вероятностей переходов, необходима более строгая и последовательная теория. Поскольку БО в штарковском представлении суть квантовые биения между состояниями штарковской лестницы, затухание БО в этом представлении есть следствие потери когерентности между этими состояниями при переходах электронов с излучением или испусканием фонона. Тогда естественным способом описания затухания блоховских осцилляций является формализм матрицы плотности, недиагональные элементы которой как раз и описывают степень когерентности состояний.

4. Квантовое уравнение релаксации

При построении квантового уравнения релаксации, описывающего затухание осцилляций, мы в основном следуем процедуре, развитой Коном и Латтинджером [15] и затем, в частности, примененной для анализа кинетики носителей в слоистых СР [16–19]. Мы будем считать, что эффективное время затухания БО намного превосходит период осцилляций:

$$\tau_{\text{eff}} \gg \Omega^{-1}. \quad (34)$$

Покажем, каким образом это условие позволяет построить квантовое уравнение релаксации. Уравнение для матрицы плотности (МП) системы с гамильтонианом (25)

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (35)$$

записанное в штарковском представлении (15) для электронов, $|Nk\rangle$, и представлении чисел заполнения для фононов, $|\{\eta_q\}\rangle$, после преобразования Лапласа по времени приобретает вид

$$\begin{aligned} i\hbar \left[s + i \sum_q \omega_q (\eta_q - \eta'_q) + i\Delta \varepsilon_{NN'}^{kk'} \right] \rho \{ Nk\eta_q | N'k'\eta'_q \} \\ = V_{Nk, N_1k_1}^{\eta_q, \eta_q \pm 1} \rho \{ N_1k_1, \eta_q \pm 1 | N'k', \eta'_q \} \\ + \rho \{ Nk, \eta_q | N_1k_1, \eta'_q \pm 1 \} V_{N_1k_1, N'k'}^{\eta'_q \pm 1, \eta'_q} \\ + \rho \{ Nk, \eta_q | N'k', \eta'_q \} \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (36)$$

где s — параметр преобразования Лапласа, $\Delta \varepsilon_{NN'}^{kk'} = \varepsilon_N^k - \varepsilon_{N'}^{k'}$ (15) и справа подразумевается суммирование по промежуточным индексам и волновым векторам фононов, а также суммирование слагаемых со знаками „+“ и „–“.

Это уравнение связывает элементы МП с фоновыми числами заполнения, отличающимися на единицу. Подставим в правую часть уравнения для диагональных по числам заполнения элементов МП выражения для недиагональных. После этого справа останутся элементы МП, диагональные по фоновым числам заполнения, и с числами заполнения, отличающимися на двойку. Последние отвечают переходам с изменением числа фононов на двойку, при учете только однофононных процессов их необходимо отбросить [18,19]. Это дает

$$\begin{aligned} i\hbar^2 \left[s + i\Delta \varepsilon_{NN'}^{kk'} \right] \rho \{ Nk, \eta_q | N'k', \eta_q \} - \rho \{ Nk, \eta_q | N'k', \eta_q \} \Big|_{t=0} \\ = V_{Nk, N_1k_1}^{\eta_q, \eta_q \pm 1} \left(\frac{V_{N_1k_1, N_2k_2}^{\eta_q \pm 1, \eta_q} \rho \{ N_2k_2, \eta_q | N'k', \eta_q \}}{is - \Delta \varepsilon_{N_1N'}^{k_1k'}} \mp \omega_q \right) \\ - \frac{\rho \{ N_1k_1, \eta_q \pm 1 | N_2k_2, \eta_q \pm 1 \} V_{N_2k_2, N'k'}^{\eta_q \pm 1, \eta_q}}{is - \Delta \varepsilon_{N_1N'}^{k_1k'}} \\ - \left(\frac{V_{Nk, N_1k_1}^{\eta_q, \eta_q \pm 1} \rho \{ N_1k_1, \eta_q \pm 1 | N_2k_2, \eta_q \pm 1 \}}{is - \Delta \varepsilon_{NN_2}^{kk_2} \pm \omega_q} \right) \\ - \frac{\rho \{ Nk, \eta_q | N_1k_1, \eta_q \} V_{N_1k_1, N_2k_2}^{\eta_q, \eta_q \pm 1}}{is - \Delta \varepsilon_{NN_2}^{kk_2} \pm \omega_q} \Big) V_{N_2k_2, N'k'}^{\eta_q \pm 1, \eta_q}. \end{aligned} \quad (37)$$

После этого, считая, что скорость термализации фононной подсистемы выше частоты столкновений $\rho \{ Nk, \eta_q | N'k', \eta_q \} = Z^{-1} \prod_q e^{-\eta_q \hbar \omega_q / T} \rho_{NN'}^{kk'}$, и усредняя

уравнение по фоновым степеням свободы, получим для приведенной электронной матрицы плотности следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& i\hbar^2 [s + i\Omega(N - N')] \rho_{NN'}^{kk} - \rho_{NN'}^{kk} \Big|_{t=0} \\
& = [(v_q + 1) V_{Nk, N_1 k'}^{01} V_{N_1 k', N_2 k}^{10} \rho_{N_2 k}^{kk} \\
& - v_q V_{Nk, N_1 k'}^{01} \rho_{N_1 N_2}^{k' k'} V_{N_2 k', N' k}^{10}] (is - \Delta \varepsilon_{N_1 N'}^{k' k} - \omega_q)^{-1} \\
& + [v_q V_{Nk, N_1 k'}^{10} V_{N_1 k', N_2 k}^{01} \rho_{N_2 N'}^{kk} - (v_q + 1) \\
& \times V_{Nk, N_1 k'}^{10} \rho_{N_1 N_2}^{k' k'} V_{N_2 k', N' k}^{01}] (is - \Delta \varepsilon_{N_1 N'}^{k' k} + \omega_q)^{-1} \\
& - [v_q V_{Nk, N_1 k'}^{01} \rho_{N_1 N_2}^{k' k'} V_{N_2 k', N' k}^{10} - (v_q + 1) \\
& \times \rho_{N N_1}^{kk} V_{N_1 k, N_2 k'}^{01} V_{N_2 k', N' k}^{10}] (is - \Delta \varepsilon_{N N_2}^{k k'} + \omega_q)^{-1} \\
& - [(v_q + 1) V_{Nk, N_1 k'}^{10} \rho_{N_1 N_2}^{k' k'} V_{N_2 k', N' k}^{01} \\
& - v_q \rho_{N N_1}^{kk} V_{N_1 k, N_2 k'}^{10} V_{N_2 k', N' k}^{01}] (is - \Delta \varepsilon_{N N_2}^{k k'} - \omega_q)^{-1}, \quad (38)
\end{aligned}$$

где $v_q = (e^{\hbar\omega_q/T} - 1)^{-1}$. Здесь мы также исключили из правой части уравнения недиагональные по поперечным импульсам элементы МП, которые при слабом рассеянии много меньше диагональных [15].

В отсутствие рассеяния решением уравнения (38) является $\rho_{NN'}^{kk} = \rho_{NN'}^{kk} \Big|_{t=0} \exp[-i(N - N')\Omega t]$. При слабом рассеянии, $\tau_{\text{eff}}^{-1} \ll \Omega$, особенности $\rho_{NN'}^{kk}$ сосредоточены вблизи полюса $s = -i\Omega(N - N')$. Соответственно справа существенны только слагаемые с элементами МП вида $\rho_{N+n, N'+n}^{kk}$. Если к тому же τ_{eff}^{-1} меньше актуальных фоновых частот, то в правой части (38) можно перейти к пределу $s + i\Omega(N - N') \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{is - \Omega(N - N') + \Lambda} \rightarrow i\pi\delta(\Lambda) + P\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (39)$$

Вкладом возникающих здесь интегралов в смысле главного значения, соответствующих сдвигу частоты осцилляций, мы будем пренебрегать, поскольку подразумеваем рассеяние на имеющих широкий спектр акустических колебаниях решетки. Уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned}
& - [s + i\Omega(N - N')] \rho_{NN'}^{kk} + \rho_{NN'}^{kk} \Big|_{t=0} \\
& = \frac{\pi}{\hbar^2} (|V_{Nk, N+nk'}^{01}|^2 + |V_{N'k, N'+nk'}^{01}|^2) \\
& \times \{(v_q + 1)\delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega + \omega_q] \\
& + v_q \delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega - \omega_q]\} \rho_{NN'}^{kk} \\
& - \frac{2\pi}{\hbar^2} V_{Nk, N+nk'}^{01} V_{N'+nk, N'k'}^{10} \{v_q \delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega + \omega_q] \\
& + (v_q + 1)\delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega - \omega_q]\} \rho_{N+n, N'+n}^{k' k'}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Уравнение (40) описывает потерю когерентности между состояниями $|N, k\rangle$ и $|N', k\rangle$ при переходах электронов с поглощением или излучением фонона, причем первый член соответствует уходу электрона из этих состояний, а второй — приходу из состояний с другими штарковскими индексами и волновыми векторами поперечного движения.

Структура и физический смысл члена, описывающего уход, абсолютно ясны: он содержит полусумму вероятностей ухода электронов из состояний $|N, k\rangle$ и $|N', k\rangle$, и потеря когерентности здесь происходит за счет уменьшения количества электронов, образующих когерентную смесь, фазовый множитель отсутствует.

Структура члена, описывающего приход электронов, существенно сложнее. Из (26) следует, что $V_{Nk, N+nk'}^{01} V_{N'+nk, N'k'}^{10} = \exp[iq_{\parallel} a_{\parallel} (N - N')] |V_n^q|^2$. Мы видим, что в члене, описывающем приход электронов, переходы могут приводить как к ослаблению, так и к усилению когерентности между состояниями N и N' в зависимости от величины фазового сдвига между $\rho_{NN'}^{kk}$ и $\rho_{N+n, N'+n}^{k' k'}$ и набега фазы фонона $q_{\parallel} a_{\parallel} (N - N')$ между соответствующими узлами СРКТ (вид фазового множителя будет пояснен далее). Как будет строго показано в [20], из-за наличия фазового множителя в члене, описывающем приход электронов, интегрально уход превалирует над приходом, что приводит к затуханию БО со временем.

Необходимо отметить, что при выводе квантового кинетического уравнения (40) предполагалось, что в нулевой момент времени образована когерентная смесь штарковских состояний, и, следовательно, ввиду условия (34), амплитуда тока блоховских осцилляций существенно больше постоянного тока. Последний возможен лишь в меру рассеяния и не учитывается в полученном уравнении. Однако по мере затухания БО величина постоянного тока становится сравнимой с амплитудой тока БО. На больших временах, когда когерентность между штарковскими состояниями уже полностью разрушена, в правой части уравнений (38) главными становятся диагональные элементы матрицы плотности, а недиагональные отличны от нуля лишь в меру рассеяния. Соответственно использованная нами процедура непригодна для вычисления постоянного тока. Процедура получения уравнений для матрицы плотности на больших временах и вычисления постоянного тока в СРКЯ с учетом разогрева электронов электрическим полем подробно изложена в [19]. Эта процедура с тем же успехом может использоваться и для вычисления статической вольт-амперной характеристики СРКТ.

Уравнения (40) при произвольных начальных условиях все еще достаточно сложны для анализа, поэтому в оставшейся части работы мы ограничимся рассмотрением пространственно однородного начального состояния системы.

4.1. Пространственно однородный случай

В случае пространственно однородного начального распределения

$$\rho_{N+n, N'+n}^{kk} = \rho_{NN'}^{kk} \quad (41)$$

уравнения (40) сильно упрощаются — система уравнений, связывающих элементы матрицы плотности вида $\rho_{N+n, N'+n}^{kk}$ с различными n , переходит в систему независимых замкнутых уравнений.

Более того, в случае, когда электрическое поле направлено вдоль одного из базисных направлений прямоугольной 2D СРКТ (или тетрагональной 3D СРКТ), применимо приближение ближайших соседей, и для описания затухания блоховских осцилляций достаточно решить только одно из этих уравнений. Действительно, выразив плотность тока в узельном представлении Ванье (20) через матрицу плотности в штарковском представлении

$$j = -\frac{en_e \Delta_{\parallel} a}{\hbar} \times \text{Im} \left(\sum_{N, k, N', k', n_{\parallel}} \langle N, k | n_{\parallel}, n_{\perp} \rangle \langle n_{\parallel} + 1, n_{\perp} | N', k' \rangle \rho_{NN'}^{kk'} \right) \quad (42)$$

и используя ортогональность штарковских состояний, получим, что при условии (41) плотность тока в приближении ближайших соседей выражается через единственный элемент матрицы плотности $\rho_{N, N+1}^{kk}$, описывающий когерентные переходы между соседними штарковскими состояниями:

$$j = \frac{en_e \Delta_{\parallel} a^2}{4\pi \hbar} \int dk \text{Im} \rho_{N, N+1}^{kk}. \quad (43)$$

Однородность (41) реализуется, в частности, при мгновенном включении электрического поля. Для невырожденного электронного газа это дает

$$\begin{aligned} \rho_{N, N+1}^{kk} |_{t=0} &= \int d\mathbf{K}^0 \exp(iK_{\parallel}^0 a_{\parallel}) F(\mathbf{K}^0) \delta(K_{\perp}^0 - k) \\ &= \langle \cos(K_{\parallel}^0 a_{\parallel}) \rangle f(k), \\ \langle \cos(K_{\parallel}^0 a_{\parallel}) \rangle &= \frac{I_1(\Delta_{\parallel}/T)}{I_0(\Delta_{\parallel}/T)}, \end{aligned} \quad (44)$$

где I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя; $F(\mathbf{K}^0), f(k)$ — бoльцмановские функции распределения по полной энергии в минизоне СРКТ (3) и энергии поперечного движения соответственно.

Положим теперь $\rho_{N, N+1}^{kk}(t) \equiv \exp(-i\Omega t) \langle \cos(k_{\parallel}^0 a_{\parallel}) \rangle \times g_k(t)$. Тогда (40) с учетом соотношений (26), (41) дает для медленно меняющейся амплитуды $g_k(t)$ следующее замкнутое уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} g_k(t) &= \int dk' [W_{k, k'}^{\text{out}} g_k(t) - W_{k', k}^{\text{in}} g_{k'}(t)], \\ W_{k, k'}^{\text{out}} &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{l, n, q} |V_n^q|^2 \{ (v_q + 1) \delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega + \omega_q] \\ &+ v_q \delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega - \omega_q] \} \delta\left(k' - k - q_{\perp} + \frac{2\pi l}{a_{\perp}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{k, k'}^{\text{in}} &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{l, n, q} \cos(q_{\parallel} a_{\parallel}) |V_n^q|^2 \\ &\times \{ (v_q + 1) \delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega - \omega_q] \\ &+ v_q \delta[\varepsilon(k') - \varepsilon(k) + n\Omega + \omega_q] \} \\ &\times \delta\left(k' - k - q_{\perp} + \frac{2\pi l}{a_{\perp}}\right), \end{aligned} \quad (45)$$

где суммирование по l обеспечивает учет процессов переброса в поперечных минизонах, q изменяется в пределах зоны Бриллюэна материала СРКТ, а волновой вектор поперечного движения электрона k — в пределах первой зоны Бриллюэна поперечной цепочки квантовых точек в 2D СРКТ (или поперечной плоскости квантовых точек в 3D СРКТ).

Это основное уравнение теории, которое будет использоваться во второй части работы (см. [20]) при расчете скорости затухания БО в СРКТ различной размерности. Полученное уравнение удобно использовать в случае сильного электрического поля, когда электрон локализован на небольшом количестве КТ в направлении поля: $L_{\text{loc}} = \Delta_{\parallel}/eF \approx a_{\parallel}$. В слабом электрическом поле, при большой длине локализации, $L_{\text{loc}} \gg a_{\parallel}$, уравнение (45) становится неудобным из-за необходимости суммирования по большому числу переходов n . Между тем суммирование по n можно провести аналитически, используя представление δ -функции через интеграл от мнимой экспоненты и выражение (26) для матричных элементов взаимодействия. При этом естественным образом (см. [19]) получается уравнение, описывающее затухание осцилляций в хаустоновском представлении (7):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} g_k(t) &= \int d\mathbf{K}_{\parallel} \int d\mathbf{K}' \int_0^t dt' \\ &\times [W(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}'_t) g_k(t) - \cos[(K_{\parallel} - K'_{\parallel}) a_{\parallel}] W(\mathbf{K}', \mathbf{K}) g_{k'}(t)], \\ W(\mathbf{K}, \mathbf{K}') &= (v_q + 1) w^+(\mathbf{K}, \mathbf{K}') + v_q w^-(\mathbf{K}, \mathbf{K}'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{\pm}(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}'_t) &= \frac{2}{\hbar} \sum_{l, q} |A_q|^2 Q^2(q) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{t'} dt_1 [\mathcal{E}(\mathbf{K} - e\mathbf{F}t_1) \right. \\ &\left. - \mathcal{E}(\mathbf{K}' - e\mathbf{F}t_1) \pm \hbar\omega_q] \right\} \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}' - \mathbf{q}_l), \end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = K_{\parallel}, k, \quad \hbar\mathbf{K}_t = \hbar\mathbf{K} + e\mathbf{F}t',$$

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{q} + l_1 \frac{2\pi}{a_{\parallel}^2} \mathbf{a}_{\parallel} + l_2 \frac{2\pi}{a_{\perp}^2} \mathbf{a}_{\perp}. \quad (46)$$

Здесь \mathbf{K} — полный волновой вектор электрона в минизоне СРКТ, $\mathcal{E}(\mathbf{K}) = (\Delta_{\parallel}/2) \cos(K_{\parallel} a_{\parallel}) + (\Delta_{\perp}/2) \cos(ka_{\perp})$ описывает спектр минизоны СРКТ (3), $iA_q Q(q)$ — матричный элемент электрон-фононного взаимодействия

на блоховских волновых функциях минизоны (см. (4), (26)). Величины $W(\mathbf{K}, \mathbf{K}')$ в (46) есть обычные вероятности перехода между состояниями \mathbf{K}_t и \mathbf{K}'_t в хаустовском представлении (7) (см. [19]), при этом временная экспонента строго учитывает влияние электрического поля на электрон-фононные столкновения.

Если в (46) формально перейти к пределу $F \rightarrow 0$, то временная экспонента дает δ -функцию по энергии и мы получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} g_k(t) = \int dK_{\parallel} \int dK' \times [W_{cl}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') g_k(t) - \cos[(K_{\parallel} - K'_{\parallel})a_{\parallel}] W_{cl}(\mathbf{K}', \mathbf{K}) g_{k'}(t)],$$

$$W_{cl}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = (v_q + 1)w_{cl}^+(\mathbf{K}, \mathbf{K}') + v_q w_{cl}^-(\mathbf{K}, \mathbf{K}'),$$

$$w_{cl}^{\pm}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \frac{2}{\hbar} \sum_{l,q} |A_q|^2 \mathcal{Q}^2(q) \delta[\varepsilon(\mathbf{K} - \varepsilon(\mathbf{K}') \pm \hbar\omega_q)] \times \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}' - \mathbf{q}). \quad (47)$$

В уравнениях (46), (47) становится ясен физический смысл фазового множителя $\cos[(K_{\parallel} - K'_{\parallel})a_{\parallel}] = \cos(q_{\parallel}a_{\parallel})$ в части, описывающей приход электронов. Действительно, фаза функции $g_k(t)$ не зависит от волнового вектора поперечного движения, поскольку представляет диагональный по k элемент матрицы плотности $\rho_{N,N+1}^{kk}$ (44). Электрону в блоховском состоянии с волновым вектором \mathbf{K} соответствует

$$\rho_{N,N+1}^{kk} = \exp\{iK_{\parallel}a_{\parallel}[N - (N+1)]\} = \exp(-iK_{\parallel}a_{\parallel}), \quad (48)$$

а сам волновой вектор в присутствии поля изменяется, согласно (7), как $\hbar\mathbf{K}_t = \hbar\mathbf{K}^0 + e\mathbf{F}t$. После усреднения по начальным волновым векторам мы видим, что функция $g_k(t) = \exp(i\Omega t) \langle \cos(K_{\parallel}^0 a_{\parallel}) \rangle^{-1} \rho_{N,N+1}^{kk}(t)$ в начальный момент времени действительна, т.е. ее фаза одинакова для всех состояний поперечного спектра k .

При переходах электронов из состояний $|N, k\rangle$, $|N+1, k\rangle$ в любые другие состояния g_k уменьшается просто за счет уменьшения числа электронов с поперечным волновым вектором k , участвующих в когерентной смеси. Соответственно в члене, описывающем уход электронов, (46), (47) фазовый множитель отсутствует. Напротив, при переходе электронов в состояния $|N, k\rangle$, $|N+1, k\rangle$ важна фаза, которую они приобретают при взаимодействии с фононом. Приход электронов соответствует уменьшению или увеличению степени когерентности между состояниями $|N, k\rangle$, $|N+1, k\rangle$ в зависимости от величины продольного импульса $\hbar(K_{\parallel} - K'_{\parallel})$, потерянного (приобретенного) при испускании (поглощении) фонона. Учитывая (48) и то обстоятельство, что до взаимодействия фаза g_k одинакова для всех k , получаем в члене, описывающем приход, фазовый множитель $\exp(\pm i q_{\parallel} a_{\parallel})$ (мнимая, антисимметричная часть экспоненты не дает вклада в интеграл по q_{\parallel} и может быть отброшена).

Переход к пределу $F \rightarrow 0$ в (46) возможен только при условии $\tau_{\text{eff}}^{-1} \ll \Omega \ll \Delta_{\parallel}/\hbar$. При этом соблюдается условие слабого рассеяния осцилляций, используемое при выводе уравнений, и в то же время электрон слабо локализован электрическим полем, что позволяет пренебречь влиянием поля на электрон-фононные столкновения.

5. Заключение

В работе из общего уравнения для матрицы плотности выведено квантовое кинетическое уравнение (40), описывающее затухание БО. Теория применима при любом способе возбуждения БО в изолированной минизоне СРКТ любой симметрии, находящейся в электрическом поле произвольной величины и ориентации.

Показано, что в СРКТ, изменяя величину электрического поля и его ориентацию относительно осей СРКТ, можно полностью подавить однофононное рассеяние на оптических фононах (условия (24), (23)), которое является основной причиной быстрого затухания блоховских осцилляций в слоистых сверхрешетках на основе полупроводниковых соединений $A^{\text{III}}B^{\text{V}}$ или $A^{\text{II}}B^{\text{VI}}$. Показано, что управление спектром СРКТ электрическим полем позволяет сильно подавить рассеяние на акустических фононах между различными состояниями штарковской лестницы (условие (33)). Тогда единственным оставшимся каналом рассеяния носителей в идеальных $2D$ и $3D$ СРКТ является рассеяние на акустических фононах внутри поперечных минизон штарковской лестницы.

Подробный анализ уравнений (45)–(47) для СРКТ различной размерности проведен в следующей работе авторов, опубликованной в этом же номере журнала [20], сейчас же мы хотим обратить внимание на наиболее существенное свойство этих уравнений, отличающее их от обычного кинетического уравнения и показывающее специфику фазового рассеяния.

Предположим, что масштаб неоднородности рассеивающего потенциала (в частности, для нашего случая это длина волны фононов) в направлении электрического поля существенно превышает период СРКТ. Тогда продольный волновой вектор электрона практически не изменяется при рассеянии и фазовый множитель $\cos[(K_{\parallel} - K'_{\parallel})a_{\parallel}] = \cos(q_{\parallel}a_{\parallel})$ в уравнениях (45)–(47) близок к единице. Учитывая теперь, что ток осцилляций (43) пропорционален интегралу от функции g_k по поперечным квазиимпульсам, и интегрируя обе части любого из уравнений (45)–(47) по k при условии $q_{\parallel} = 0$, получим, что интеграл от правых частей этих уравнений обращается в тождественный ноль — ток БО в этих условиях не затухает. В этом отражается специфика фазового рассеяния — потери когерентности между штарковскими состояниями не происходит, если возмущение одинаково действует на оба состояния. В частности, затухания БО нет, если при рассеянии изменяется лишь волновой вектор электрона в поперечном к электрическому полю направлении, а $K_{\parallel} - K'_{\parallel} = q_{\parallel} = 0$. Таким

образом, скорость затухания БО по своему физическому смыслу близка к скорости рассеяния продольного квазиимпульса электрона.

Такое представление, однако, может привести к недоразумениям. В сильном электрическом поле движение вдоль электрического поля квантуется и понятие продольного квазиимпульса теряет физический смысл. Тем не менее, казалось бы, из вышесказанного следует, что рассеяние внутри поперечных зон штарковской лестницы в отсутствие переходов между ними не должно приводить к затуханию БО, поскольку это рассеяние поперечного движения носителей. Однако это не так. При переходах внутри поперечных минизон продольная компонента импульса фонона, который испускает или поглощает электрон, может быть любой, $q_{\parallel} \neq 0$. Закон сохранения продольной компоненты импульса для СРКТ в целом соблюдается по-прежнему, но импульс отдачи получает уже не локализованный электрическим полем электрон, а вся сверхрешетка в целом. Таким образом, при рассеянии внутри поперечных минизон $\cos[(K_{\parallel} - K'_{\parallel})a_{\parallel}] = \cos(q_{\parallel}a_{\parallel}) \neq 1$, и такое рассеяние приводит к затуханию БО. Более того, при соблюдении условий (24), (23) и (33) этот канал рассеяния в идеальной СРКТ становится главным и затухание БО полностью обуславливается рассеянием на акустических фононах внутри поперечных минизон штарковской лестницы. Анализу возможностей уменьшения скорости затухания БО при переходах электронов внутри поперечных минизон с участием акустических фононов в 2D и 3D СРКТ посвящена следующая работа авторов [20]. В ней также проведен общій анализ уравнений (45)–(47) для СРКТ различной размерности и проделаны численные расчеты скорости затухания БО.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-02-16796), Государственной программой поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96812) и программой „Физика твердотельных наноструктур“.

Список литературы

- [1] F. Bloch. *Z. Phys.*, **52**, 555 (1928).
- [2] J. Feldmann, K. Leo, J. Shah, D.A.B. Miller, J.E. Cunningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Schulze, P. Thomas, S. Schmitt-Rink. *Phys. Rev. B*, **46**, 7252 (1992).
- [3] K. Leo, P.H. Bolivar, F. Bruggeman, R. Schwedler, K. Kohler. *Sol. St. Commun.*, **84**, 943 (1992).
- [4] Л.В. Келдыш. *ФТТ*, **4**, 2265 (1962).
- [5] L. Esaki, R. Tsu. *IBM J. Res. Dev.*, **14**, 61 (1970).
- [6] C. Washke, H.G. Roskos, K. Leo, H. Kurz, K. Kohler. *Semicond. Sci. Technol.*, **9**, 416 (1994).
- [7] K. Leo. *Semicond. Sci. Technol.*, **13**, 249 (1998).
- [8] F. Rossi. *Semicond. Sci. Technol.*, **13**, 147 (1998).
- [9] T. Dekorsy, R. Ott, H. Kurz, K. Kohler. *Phys. Rev. B*, **51**, 17275 (1995).
- [10] И.А. Дмитриев, Р.А. Сурис. *ФТП*, **35**, 219 (2001).
- [11] W.V. Houston. *Phys. Rev.*, **57**, 184 (1940).
- [12] G.H. Wannier. *Phys. Rev.*, **117**, 432 (1960).
- [13] Дж. Каллуэй. *Теория энергетической зонной структуры* (Мир, 1969).
- [14] R.A. Suris. In: *Future Trends in Microelectronics. Reflections on the Road to Nanotechnology*, ed. by S. Luryi, J. Xu and A. Zaslavski [NATO ASI Series, Ser. E: Applied Sciences (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1996) p. 197].
- [15] W. Kohn, J.M. Luttinger. *Phys. Rev.*, **108**, 590 (1957).
- [16] Р.Ф. Казаринов, Р.А. Сурис. *ФТП*, **5**, 797 (1971).
- [17] Р.Ф. Казаринов, Р.А. Сурис. *ФТП*, **6**, 148 (1972).
- [18] Р.Ф. Казаринов, Р.А. Сурис. *ФТП*, **7**, 488 (1973).
- [19] Р.А. Сурис, Б.С. Цамхалова. *ФТП*, **18**, 1178 (1984).
- [20] И.А. Дмитриев, Р.А. Сурис. *ФТП*, **36** (12), 1460 (2002).

Редактор Л.В. Шаронова

Damping of Bloch oscillations in quantum dot superlattices. General approach

I.A. Dmitriev, R.A. Suris

loffe Phisicotechnical Institute,
Russian Academy of Sciences,
194021 St. Petersburg, Russia

Abstract Quantum kinetic equation has been built within the framework of the density matrix formalism that describes damping of the Bloch oscillations in ideal quantum dot superlattices of various dimensionality (1D, 2D, 3D QDSL). We show a possibility of total suppression of the optic one-phonon scattering and that of substantial suppression of the acoustic phonon scattering by the effective controlling of QDSL spectrum by constant electric field value and orientation. Conditions have been formulated when the only remaining channel of carrier scattering, leading to oscillation damping, is the acoustic phonon scattering within transverse minibands of the Stark ladder states.