

# Анализ неупругого рассеяния квазидвумерных электронов сверхрешетки на акустических фононах с учетом дисперсии минизоны

© С.И. Борисенко<sup>¶</sup>

Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова,  
634050 Томск, Россия

(Получена 15 апреля 2002 г. Принята к печати 16 апреля 2002 г.)

Получены формулы для расчета эффективного времени релаксации импульса и подвижности квазидвумерных электронов сверхрешетки с учетом неупругого рассеяния на акустических фононах и дисперсии энергетического спектра минизоны по продольному волновому вектору. Проведен численный расчет для невырожденного газа квазидвумерных электронов симметричной сверхрешетки GaAs/Al<sub>0,36</sub>Ga<sub>0,64</sub>As с шириной квантовой ямы 5 нм при  $T = 77$  К. Показано, что учет неупругости рассеяния и дисперсии энергетического спектра минизоны приводит к существенному увеличению подвижности электронов.

Как известно, многие специфические свойства сверхрешеток (СР) проявляют себя при низких температурах, при которых рассеяние электронов на фононах носит неупругий характер. Неупругость данного рассеяния особенно актуальна для СР с квазидвумерным электронным газом, так как связана с большой неопределенностью продольного волнового вектора фононов, параллельного оси СР. При низких температурах, кроме неупругости рассеяния, неравновесная функция распределения электронов должна существенным образом зависеть от ширины минизоны, величина которой в этом случае становится сравнимой с энергией  $k_0T$ .

В литературе имеется лишь небольшое число работ, в которых рассматривается вопрос о рассеянии электронов СР акустическими фононами. Среди них можно выделить работу [1], в которой рассматривается квазиупругое рассеяние на деформационном потенциале акустических (АК) фононов с учетом дисперсии энергетического спектра минизоны. Неупругое рассеяние на АК фононах рассматривалось лишь в одной работе [2] для поперечного относительно оси симметрии СР переноса квазидвумерного электронного газа. Работы, в которых рассматривался бы вопрос о влиянии на продольную и поперечную подвижности электронов одновременно как дисперсии энергетического спектра минизоны, так и неупругости рассеяния на АК фононах, широко не известны.

В данной работе с учетом неупругого рассеяния электрона на АК фононах и дисперсии энергии электронов по продольному волновому вектору получены формулы для времени релаксации при поперечном относительно оси СР переносе и интегральное уравнение для эффективного времени релаксации при продольном переносе. Проведен численный анализ зависимости поперечного и продольного эффективного времени релаксации импульса от поперечной энергии и продольного волнового вектора электрона в СР типа GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As при  $T = 77$  К. Проведен сравнительный анализ значения

продольной и поперечной подвижностей, рассчитанных с учетом различных приближений. Показано, что при азотных температурах учет конечной ширины минизоны при рассеянии на АК фононах приводит к существенно увеличению подвижности квазидвумерных электронов сверхрешетки.

## 1. Основные формулы

Как известно, в приближении сильной связи для огибающей волновой функции электронов СР из бесконечно глубоких квантовых ям (КЯ) и в приближении объемного фононного спектра вероятность внутриминизонного перехода электрона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в состояние с  $\mathbf{k}'$  за счет рассеяния на продольных АК фононах в полупроводниках типа A<sup>III</sup>B<sup>V</sup> можно представить в виде

$$w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\pm} = \frac{\pi D^2}{\pi v_L V} \sum_n q_n S^2 \left( \frac{aq_{nz}}{2} \right) \times \left[ N(q_n) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right] \delta(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}} \pm \hbar v_L q_n), \quad (1)$$

где

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon = \epsilon_{\perp} + \frac{\Delta}{2} (1 - \cos k_z d), \quad \epsilon_{\perp} = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_{\perp}},$$

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{k}' - \mathbf{k} + \frac{2\pi n}{d} \mathbf{e}_z, \quad S(x) = \pi^2 x^{-1} (\pi^2 - x^2)^{-1} \sin x,$$

$$N(q) = \left[ \exp\left(\frac{\hbar v_L q}{k_0 T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad -\frac{N_z}{2} < n < \frac{N_z}{2},$$

$N_z$  — число периодов СР, которое считается бесконечно большим,  $D$  — константа деформационного потенциала продольных АК фононов,  $\rho$  — плотность вещества,  $v_L = \sqrt{\frac{c_L}{\rho}}$  — скорость продольных АК фононов,  $c_L = c_{11} + \frac{2}{5}(c_{12} + 2c_{44} - c_{11})$  — усредненный по углам

<sup>¶</sup> E-mail: sib@elefot.tsu.ru

модуль упругости продольных АК фононов,  $\Delta$  — ширина основной (нижней) минизоны,  $a$  — ширина КЯ,  $d$  — период СР,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор вдоль оси СР.

Неравновесную добавку к функции распределения электронов будем искать в обычном виде

$$g(\mathbf{k}) = e \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_i \tau_i(\mathbf{k}) E_i v_i(\mathbf{k}), \quad (2)$$

где  $E_i$  — компоненты напряженности электрического поля,  $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon / \hbar$  — скорость электрона,  $f_0(\varepsilon)$  — равновесная функция Ферми–Дирака. Функции  $\tau_i(\mathbf{k})$  по аналогии с решением линеаризованного уравнения Больцмана для упругих механизмов рассеяния в приближении параболического закона дисперсии носителей заряда будем называть эффективным временем релаксации.

Как следует из формулы (1), поперечными компонентами волнового вектора фонона  $\mathbf{q}_\perp$  по сравнению с продольной компонентой можно пренебречь. В этом случае вероятность рассеяния представляет собой четную функцию относительно поперечной компоненты волнового вектора конечного состояния электрона  $\mathbf{k}'_\perp$ . Это дает возможность получить формулу для поперечного времени релаксации как функцию поперечной энергии электрона  $\varepsilon_\perp$  и компоненты продольного волнового вектора  $k_z$ :

$$\tau_x^{-1} = \tau_y^{-1} = \tau_\perp^{-1}(\varepsilon_\perp, \varphi) = C_{AC} \sum_{l,m} \int_0^\infty x S^2(tx) \times \left[ N(x) + \frac{1}{2}(1-l) + f_0(\varepsilon + lk_0Tx) \right] \theta(\varepsilon'_m) dx, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon'_m = \varepsilon_\perp + \frac{\Delta}{2} [\cos \varphi_m - \cos \varphi] + lx k_0T, \\ \varphi = k_z d, \quad \varphi_m = \varphi + m \frac{k_0T d}{\hbar v_L} x, \quad t = \frac{k_0T}{\hbar v_L} \frac{a}{2}, \\ N(x) = (\exp x - 1)^{-1}, \quad C_{AC} = \frac{m_\perp D^2 (k_0T)^2}{4\pi \rho \hbar^4 v_L^3},$$

$\theta(\varepsilon)$  — тета-функция, отличная от нуля и равная единице при положительном значении аргумента; индексы  $l$  и  $m$  принимают значения  $+1$  и  $-1$ .

Согласно формуле (3), время поперечной релаксации изотропно в плоскости КЯ и анизотропно в плоскости, проходящей через ось СР. При  $\Delta = 0$  выражение (3) переходит в формулу, полученную авторами работы [2] и записанную с учетом распределения электронов по энергетическому спектру:

$$\tau_\perp^{-1}(\varepsilon) = 2C_{AC} \int_0^\infty x S^2(tx) \left\{ [N(x) + f_0(\varepsilon + k_0Tx)] + [N(x) + 1 - f_0(\varepsilon - k_0Tx)] \theta(\varepsilon - k_0Tx) \right\} dx, \quad (4)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_\perp$ . В приближении упругого рассеяния при

$$x = \frac{\hbar v_L q_z}{k_0T} \rightarrow 0,$$

для невырожденного электронного газа из формулы (4) следует известное выражение для изотропного и независимого от энергии времени релаксации:

$$\tau_\perp = \tau_\parallel = \tau = \frac{2}{3} \frac{ac_L \hbar^3}{m_\perp D^2 k_0T}. \quad (5)$$

В случае продольного переноса электронов эффективное время релаксации  $\tau_\parallel(\varepsilon_\perp, \varphi)$  является решением интегрального уравнения, которое следует из линеаризованного уравнения Больцмана и с учетом (1), (3) записывается в виде

$$\frac{\tau_\parallel(\varepsilon_\perp, \varphi)}{\tau_\perp(\varepsilon_\perp, \varphi)} = \frac{C_{AC}}{f'_0(\varepsilon) \sin \varphi} \times \sum_{l,m} \int_0^\infty x S^2(tx) \left[ N(x) + \frac{1}{2}(1+l) - l f_0(\varepsilon) \right] \times f'_0(\varepsilon + lk_0Tx) \tau_\parallel(\varepsilon'_m, \varphi_m) \theta(\varepsilon'_m) \sin \varphi_m dx + 1, \quad (6)$$

где  $f'_0(\varepsilon)$  — производная от равновесной функции распределения.

С учетом формулы (1) для закона дисперсии энергетического спектра электронов и формулы (2) для неравновесной добавки к функции распределения выражения для продольной и поперечной подвижностей электронов можно представить в обычном виде через усредненное значение эффективного времени релаксации

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_\perp = e \langle \tau_\perp \rangle / m_\perp, \quad (7)$$

$$\mu_{zz} = \mu_\parallel = e \langle \tau_\parallel \rangle / \langle m_\parallel \rangle,$$

где

$$\langle \tau_\perp \rangle = \frac{\int [-f'_0(\varepsilon)] \tau_\perp(\varepsilon_\perp, \varphi) \varepsilon_\perp d\varepsilon_\perp d\varphi}{\int f_0(\varepsilon) d\varepsilon_\perp d\varphi}; \quad (8)$$

$$\langle \tau_\parallel \rangle = \frac{\int [-f'_0(\varepsilon)] \tau_\parallel(\varepsilon_\perp, \varphi) \sin^2 \varphi d\varepsilon_\perp d\varphi}{\int [-f'_0(\varepsilon)] \sin^2 \varphi d\varepsilon_\perp d\varphi}; \quad (9)$$

$$\frac{1}{\langle m_\parallel \rangle} = \left( \frac{\Delta d}{2\hbar} \right)^2 \frac{\int [-f'_0(\varepsilon)] \sin^2 \varphi d\varepsilon_\perp d\varphi}{\int f_0(\varepsilon) d\varepsilon_\perp d\varphi} \quad (10)$$

— среднее значение продольной эффективной массы электронов. В случае невырожденного электронного газа формулы (7)–(9) упрощаются. Учитывая, что при этом

$$\langle \tau \rangle = \int_0^\infty e^{-x} \tau(x) dx, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\langle m_\parallel \rangle} = \frac{2}{k_0T} \left( \frac{\Delta d}{2\hbar} \right)^2 \frac{\int_0^\pi e^{\delta \cos \varphi} \sin^2 \varphi d\varphi}{\int_0^\pi e^{\delta \cos \varphi} d\varphi}, \quad (12)$$

где

$$x = \varepsilon_\perp / k_0T, \quad \delta = \Delta / 2k_0T,$$

для времен релаксации получаем выражения:

$$\tau_{\perp}(x) = \frac{\int_0^{\pi} e^{\delta \cos \varphi} \tau_{\perp}(x, \varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi} e^{\delta \cos \varphi} d\varphi}, \quad (13)$$

$$\tau_{\parallel}(x) = \frac{\int_0^{\pi} e^{\delta \cos \varphi} \tau_{\parallel}(x, \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi} e^{\delta \cos \varphi} \sin^2 \varphi d\varphi}. \quad (14)$$

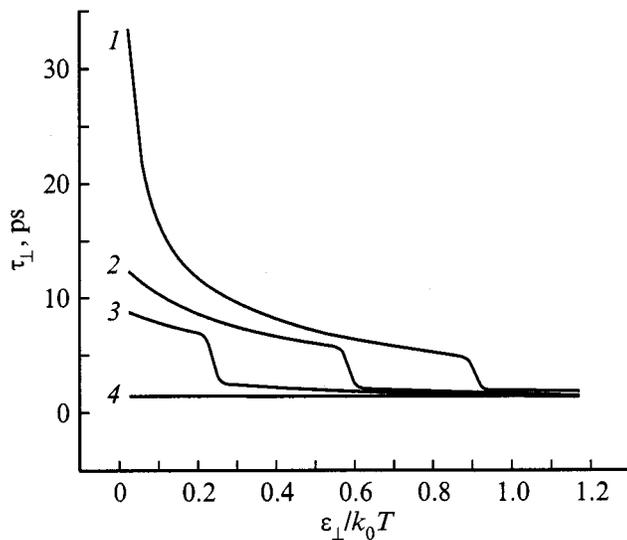
## 2. Численный анализ результатов расчета

Влияние неупругости рассеяния на АК фонах, а также, дисперсии продольной энергии на эффективное время релаксации импульса и подвижность электронов было исследовано для сверхрешетки GaAs/Al<sub>0.36</sub>Ga<sub>0.64</sub>As с невырожденным электронным газом при  $T = 77$  К. Рассматривалась симметричная СР в параметрах  $a = 5$  нм,  $d = 10$  нм. Ширина минизоны  $\Delta = 7.2$  мэВ была рассчитана в модели Кронига–Пенни [3]. В расчете для параметров КЯ были использованы значения параметров, соответствующие GaAs [4]:

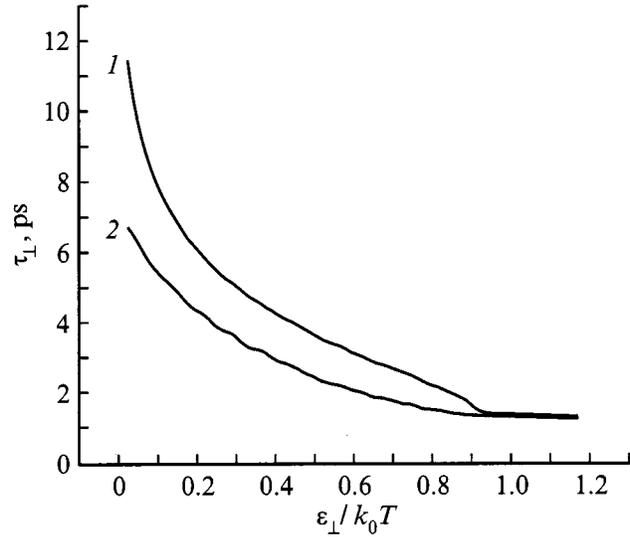
$$m_{\perp} = 0.067m_0, \quad \rho = 5.3 \text{ г/см}^3,$$

$$c_L = 14.4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad D = 17.5 \text{ эВ}.$$

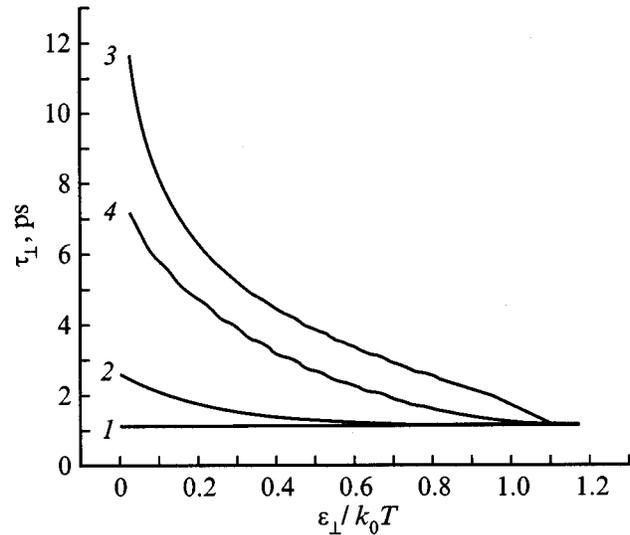
Численный расчет  $\tau_{\perp}$  по формуле (3) и  $\tau_{\parallel}$  из решения (6) итерационным способом показал, что при азотной температуре эти функции приближенно равны, т.е.  $\tau_{\perp} \approx \tau_{\parallel}$ . На рис. 1 приведены зависимости функции  $\tau_{\perp}(\varepsilon_{\perp}, \varphi)$  от поперечной энергии электрона при



**Рис. 1.** Зависимости времени релаксации импульса электрона  $\tau_{\perp}(\varepsilon_{\perp}, \varphi)$  от поперечной энергии электрона  $\varepsilon_{\perp}$  и угла  $\varphi$ : 1 — 0, 2 —  $-\pi/4$ , 3 —  $3\pi/8$ , 4 —  $\pi$ .



**Рис. 2.** Зависимости усредненных по углу  $\varphi$  эффективных времен релаксации импульса электрона от поперечной энергии электрона: 1 —  $\tau_{\perp}$ , 2 —  $\tau_{\parallel}$ .



**Рис. 3.** Зависимости усредненных по углу  $\varphi$  эффективных времен релаксации импульса электрона от поперечной энергии электрона (приближенные вычисления): 1 —  $\tau_{\perp} = \tau_{\parallel} = \text{const}$  ( $\Delta = 0, \nu_L = 0$ ), 2 —  $\tau_{\perp} \approx \tau_{\parallel}$  ( $\Delta = 0, \nu_L \neq 0$ ), 3 —  $\tau_{\perp}$  ( $\Delta \neq 0, \nu_L = 0$ ), 4 —  $\tau_{\parallel}$  ( $\Delta \neq 0, \nu_L \neq 0$ ).

различных значениях угла  $\varphi = k_z d$ . Согласно графикам, представленным на этом рисунке, наблюдается существенная дисперсия времени релаксации в области малых значений продольного волнового вектора, наличие которой определяется дисперсией энергетического спектра минизоны.

На рис. 2 представлены зависимости усредненных по углу  $\varphi$  эффективных времен релаксации от поперечной энергии электрона, рассчитанные с учетом неупругости рассеяния и дисперсии энергетического спектра мини-

Значения подвижностей и усредненных по волновому вектору эффективных времен релаксации импульса электронов для сверхрешетки GaAs/Al<sub>0.36</sub>Ga<sub>0.64</sub>As, рассчитанных для случая рассеяния на акустических фононах при  $T = 77$  К

Расчетные величины	Характер приближения			
	$\Delta = 0, v_L = 0$	$\Delta = 0, v_L \neq 0$	$\Delta \neq 0, v_L = 0$	$\Delta \neq 0, v_L \neq 0$
$\langle \tau_{\perp} \rangle$ , пс	1.11	1.12	1.77	1.69
$\langle \tau_{\parallel} \rangle$ , пс	1.11	1.36	2.87	2.72
$\mu_{\perp}$ , м <sup>2</sup> /(В·с)	2.93	2.95	4.64	4.45
$\mu_{\parallel}$ , м <sup>2</sup> /(В·с)	0.25	0.31	0.62	0.59

зоны. Как видно из рисунка, в области  $\varepsilon_{\perp} < \Delta$  имеет место существенная дисперсия функции  $\tau_{\parallel}(x)$  и  $\tau_{\perp}(x)$ , где  $x = \varepsilon_{\perp}/k_0T$ , в зависимости от поперечной энергии, связанная с различием в формулах усреднения этих величин (13), (14).

На рис. 3 представлены функции  $\tau_{\parallel}(x)$  и  $\tau_{\perp}(x)$ , рассчитанные при различных приближениях относительного угла неупругости рассеяния ( $v_L \neq 0$ ) и дисперсии энергетического спектра минизоны ( $\Delta \neq 0$ ). Согласно этим зависимостям для СР с указанными параметрами при азотной температуре учет дисперсии энергетического спектра минизоны является намного более существенным по сравнению с учетом неупругости рассеяния. Причина этого состоит в том, что средняя энергия продольного акустического фонона, участвующего в рассеянии электронов,  $h\nu_L/d \approx 2$  мэВ существенно меньше ширины минизоны.

В таблице приведены значения усредненных по волновому вектору эффективных времен релаксации импульса и подвижностей, рассчитанных при различных приближениях по формулам (7)–(9) с усредненной по формуле (12) продольной эффективной массой  $\langle m_{\parallel} \rangle = 0.81m_0$ . Согласно данным, приведенным в таблице, учет дисперсии энергетического спектра существенно увеличивает значение подвижности, тогда как учет неупругости рассеяния при рассматриваемой температуре можно пренебречь. Следует отметить, что относительное увеличение численного значения продольной подвижности за счет учета дисперсии продольной энергии превышает увеличение поперечной подвижности в 1.6 раза.

С учетом вышесказанного следует ожидать, что неупругость рассеяния носителей заряда в сверхрешетке на акустических фононах может оказаться существенной, если

$$\Delta, k_0T \leq h\nu_L/d, \quad (15)$$

т. е. для квазидвумерного электронного газа при низких температурах. Для сверхрешетки рассматриваемого типа условие (15) выполняется при  $T \leq 23$  К и  $\Delta \leq 2$  мэВ.

## Список литературы

- [1] L. Fridman. Phys. Rev. B, **32**, 955 (1985).
- [2] Ю.В. Иванов, М.В. Ведерников, Ю.И. Равич. Письма ЖЭТФ, **69**, 290 (1999).
- [3] С.И. Борисенко, Г.Ф. Караваев. ФТП, **32**, 607 (1998).
- [4] Landolt-Börnstein. *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*, ed. O. Madelung (Springer Verlag, Berlin, 1987) New Series III, v. 22a.

Редактор Т.А. Полянская

## The analysis of non-elastic scattering of quasi-2D electrons of a superlattice on acoustic phonons with the account of a minizone dispersion

S.I. Borisenko

Siberian Physical and Technical Institute,  
634050 Tomsk, Russia

**Abstract** Formulas for calculating the effective relaxation time and mobility of quasi-2D electrons of a superlattice are obtained when taking into consideration non-elastic scattering on acoustic phonons and the dispersion of a minizone energy spectrum due to a longitudinal wave vector. The numerical calculation for a non-degenerate quasi-2D electron gas of a symmetric superlattice GaAs/Al<sub>0.36</sub>Ga<sub>0.64</sub>As with a quantum well width 5 nm is carried out at  $T = 77$  K. It is shown that the account of a non-elastic scattering and the minizone dispersion results in essential increase of electron mobility.