

О влиянии черенковских потерь на связь тока со скоростью вихря в джозефсоновском переходе, связанном с волноводом

© А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, С.Г. Успенский

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
119991 Москва, Россия

E-mail: malish@sci.lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 15 ноября 2004 г.)

Без предположения о слабой связи джозефсоновского перехода и волновода изучено вынужденное движение медленного и быстрого вихрей под действием транспортного тока, протекающего через всю структуру. Для быстрого вихря выход за рамки приближения слабой связи позволил выявить условия, в которых осцилляции тока, обусловленные потерями энергии на черенковское излучение волн Свихарта, соизмеримы с величиной тока, компенсирующего омические потери энергии внутри джозефсоновского перехода, волновода и примыкающих к ним сверхпроводников. Для медленного вихря показано, что неслабое влияние волновода на джозефсоновский переход приводит к смещению осцилляций тока в область скоростей, меньших скорости Свихарта джозефсоновского перехода.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ НШ-1385.2003.2, МК-1809.2003.02 и в рамках Федеральной целевой научно-технической программы (государственный контракт № 40.012.1.1.1357 от 22.04.2003).

1. Введение

Изучение вынужденного движения вихрей в джозефсоновских структурах давно привлекает внимание специалистов (см., например, [1–9]). Закономерности движения вихрей существенно зависят от потерь энергии как в самом джозефсоновском переходе (ДП), так и во взаимодействующих с ним элементах структуры. Долгое время считалось, что диссипация энергии джозефсоновского вихря определяется омическими потерями, которые обусловлены конечной проводимостью ДП и малым сопротивлением сверхпроводников. Сравнительно недавно стало ясно, что важной причиной диссипации энергии вихря является черенковское излучение волн Свихарта, которое возникает благодаря пространственной дисперсии сверхпроводников [10,11]. В работе [11] изучено вынужденное движение вихря под действием тока, протекающего через изолированный ДП. В подходе [11], учитывающем омические и черенковские потери энергии вихря, найдена величина плотности транспортного тока через ДП, при протекании которого устанавливается движение вихря с постоянной скоростью. При этом влияние черенковских потерь проявилось в осцилляциях транспортного тока в зависимости от скорости вихря, которые имеют место на фоне монотонной зависимости тока от скорости, отвечающей учету только омических потерь. Влияние периодической в пространстве линии задержки на вынужденное движение вихря в ДП, а также возможность возбуждения линейных волн в такой линии рассмотрены в работе [7]. Вынужденное движение вихрей в ДП, связанном с плоским волноводом, изучалось в работах [12,13] в предположении, что транспортный ток протекает только через ДП. При этом в [12] пренебрегалось черенковскими потерями, а в [13] найдены вклады в ток, обусловленные не только омическими потерями в ДП и волноводе, но и потерями

на черенковское излучение волн Свихарта ДП и волновода. При этом скорость Свихарта волновода считалась значительно большей, чем в ДП, а связь между ними считалась слабой. Прогресс в описании черенковских потерь оказался возможным благодаря использованию предложенной Сакаи, Татено и Педерсеном [14,15] модельной связи тока Джозефсона с разностью фаз волновых функций сверхпроводников.

В настоящей работе в рамках модельного подхода Сакаи–Татено–Педерсена продолжено изучение влияния черенковских потерь на вынужденное движение вихрей в ДП, связанном с волноводом. С целью выявления условий, в которых черенковские потери существенно влияют на связь транспортного тока со скоростью вихря, рассмотрены омические потери как в ДП и волноводе, так и в трех сверхпроводниках слоистой структуры. При этом в отличие от [13] считается, что ток протекает через всю слоистую структуру, а связь ДП и волновода не предполагается слабой. Протекание тока через волновод, как показано в [16], позволяет поддерживать равномерное движение быстрого вихря при меньшей, чем в случае протекания тока только через ДП, плотности тока. Выход за рамки приближения слабой связи позволяет рассмотреть такие условия, когда черенковские потери видоизменяют связь тока со скоростью не только в области скоростей медленного вихря, но и в области скоростей быстрого вихря.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приведены основные уравнения для разностей фаз на ДП и волноводе. Приведены соотношения, позволяющие найти создаваемые вихрем электрические и магнитные поля во всем пространстве. В разд. 3 получены выражения для омических потерь вихря, возникающих из-за диссипации энергии в ДП, волноводе и сверхпроводниках. Определены диссипативная сила и сила Лоренца, действующие на движущийся с постоянной скоростью

вихрь. В разд. 4 получено выражение, описывающее черенковские потери движущегося вихря, а в разд. 5 и 6 для медленного и быстрого вихрей соответственно, получены выражения для плотностей транспортного тока, необходимого для поддержания движения вихря с постоянной скоростью. Выявлены условия, в которых черенковские потери соизмеримы с омическими и существенно влияют на связь транспортного тока со скоростью медленного и быстрого вихрей.

2. Поле вихря в связанных ДП и волноводе

Рассмотрим структуру, которая состоит из тонкого несверхпроводящего слоя с диэлектрической постоянной ϵ_d и проводимостью σ_d , расположенного в области $-d < x < d$, и несверхпроводящего волновода с диэлектрической постоянной ϵ_w и проводимостью σ_w , расположенного в области $L + d < x < L + d + 2d_w$. В областях $x < -d$, $x > L + d + 2d_w$, а также между двумя несверхпроводящими слоями ($d < x < d + L$) находятся одинаковые сверхпроводники с лондоновской длиной $\lambda \gg d_w, d$ и проводимостью нормальных электронов σ_n . Как известно (см. например, [3]), для плотности критического тока перехода SIS возможна оценка $j_c \sim \exp(-2d/d_{\text{eff}})$, где характерный масштаб d_{eff} зависит от величины эффективного потенциала, описывающего туннельный переход. Согласно [13], типичное значение d_{eff} для переходов составляет $\sim 5 \text{ \AA}$. При $2d \sim d_{\text{eff}}$ критический ток может быть не малым и возможен эффект Джозефсона. Напротив, толщину второго несверхпроводящего слоя $2d_w$ будем считать существенно большей d_{eff} . При этом плотность критического тока через второй слой оказывается экспоненциально малой и его можно рассматривать как волновод, в котором отсутствует ток Джозефсона. Таким образом, считается, что толщина волновода удовлетворяет условию $d_{\text{eff}} \ll 2d_w \ll \lambda$. В случае сверхпроводников, в которых лондоновская длина составляет $\lambda \sim 10^3 \text{ \AA}$, интервал допустимых значений толщин волновода достаточно широк. В этих условиях о рассматриваемой структуре можно говорить как о ДП, магнитосвязанном с волноводом.

Будем считать, что электромагнитные поля не зависят от координаты y . Также предположим, что характерные пространственные масштабы изменения магнитного поля вдоль оси Oz велики по сравнению с лондоновской длиной λ . Наконец, полагаем, что магнитное поле внутри несверхпроводящих слоев не зависит от координаты x . Это предположение означает, что далее рассматриваются поля, характерные масштабы которых поперек ДП $\sim k_d^{-1}$ и волновода $\sim k_w^{-1}$ велики по сравнению с толщинами $2d$ и $2d_w$ соответственно

$$2dk_d \ll 1, \quad 2d_w k_w \ll 1.$$

Для типичных ДП и представляющих интерес полей неравенство $2dk_d \ll 1$ обычно выполнено с большим

запасом (см., например, [17,18]). Далее показано, что для рассматриваемых вихрей также выполнено и условие $2d_w k_w \ll 1$. Предположение о малой толщине волновода совместно с используемым условием малости масштабов вихрей по сравнению с лондоновской длиной позволяет описывать свойства вихрей в системе ДП–волновод в рамках слабонелокальной электродинамики, когда для разности фаз имеет место дифференциальное уравнение, приведенное в книге Абрикосова [19], а не более сложное интегральное уравнение, подобное приведенному в [7].

Непрерывность x -компоненты обобщенного тока на границах раздела сверхпроводящих и несверхпроводящих слоев позволяет записать уравнение, связывающее разности фаз волновых функций на ДП $\varphi(z, t)$ и волноводе $\varphi_w(z, t)$ с y -компонентами магнитного поля в них $H(z, t)$, $H_w(z, t)$. Пренебрегая токами, связанными с малой проводимостью несверхпроводящих слоев, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\phi_0} \lambda V_{s,w}^2 \frac{\partial}{\partial z} H_w(z, t), \quad (1)$$

$$\omega_j^2 F[\varphi] + \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\phi_0} \lambda V_s^2 \frac{\partial}{\partial z} H(z, t), \quad (2)$$

где $\omega_j = 4\pi \sqrt{c j_c d / \epsilon_d \phi_0}$ — джозефсоновская частота, $\phi_0 = \pi \hbar c / |e|$ — квант магнитного потока, а величины V_s и $V_{s,w}$ — скорости Свихарта невзаимодействующих ДП и волновода: $V_s^2 = c^2 d / (\epsilon_d \lambda)$, $V_{s,w}^2 = c^2 d_w / (\epsilon_w \lambda)$. Функция $F[\varphi]$ представляет собой безразмерную плотность туннельного тока через ДП. Уравнения (1) и (2) сходны, потому что ДП сам является волноводом с той спецификой, что через него течет сверхпроводящий ток, тогда как в волноводе такой ток пренебрежимо мал.

Система уравнений, связывающая поля с разностями фаз, следует из уравнений Максвелла и условий непрерывности магнитного поля и z -компоненты электрического поля на границах слоев. Согласно результатам работы [20] (см. также, [21]), уравнения, связывающие Фурье-компоненты полей $H(k, t)$, $H_w(k, t)$ и разностей фаз $\varphi(k, t)$, $\varphi_w(k, t)$, имеют вид

$$\begin{aligned} H(k, t) &= -ik \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{2\lambda^2 \sqrt{k^2 + \lambda^{-2}}} \\ &\times \left[\varphi(k, t) + e^{-L\sqrt{k^2 + \lambda^{-2}}} \varphi_w(k, t) \right], \\ H_w(k, t) &= -ik \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{2\lambda^2 \sqrt{k^2 + \lambda^{-2}}} \\ &\times \left[e^{-L\sqrt{k^2 + \lambda^{-2}}} \varphi(k, t) + \varphi_w(k, t) \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Когда характерные пространственные масштабы изменения магнитного поля и разностей фаз велики по сравнению с лондоновскими длинами, пренебрегая по-

правками $\sim k\lambda$, из (3) получим

$$H(z, t) = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial z} [\varphi(z, t) + e^{-L/\lambda} \varphi_w(z, t)],$$

$$H_w(z, t) = -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial z} [e^{-L/\lambda} \varphi(z, t) + \varphi_w(z, t)]. \quad (4)$$

Подставив приближенные выражения для магнитных полей в уравнения (1) и (2), описывающие волновод и ДП, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial t^2} = V_{s,w}^2 \frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial z^2} + e^{-L/\lambda} V_{s,w}^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2}, \quad (5)$$

$$\omega_j^2 F[\varphi] + \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + e^{-L/\lambda} V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Отметим, что в пренебрежении взаимодействием ДП и волновода уравнение (5) переходит в известное уравнение для волн Свихарта (см., например, [19]).

Рассмотрим вихревые структуры, свободно движущиеся вдоль оси Oz с постоянной скоростью v . Для таких структур уравнения (5) и (6) принимают вид

$$e^{-L/\lambda} V_{s,w}^2 \psi''(\xi) + (V_{s,w}^2 - v^2) \psi''(\xi) = 0, \quad (7)$$

$$e^{-L/\lambda} V_s^2 \psi''(\xi) + (V_s^2 - v^2) \psi''(\xi) = \omega_j^2 F[\psi]. \quad (8)$$

Здесь $\psi(\xi) = \varphi(z, t)$, $\psi_w(\xi) = \varphi_w(z, t)$, где $\xi = z - vt$. После подстановки ψ'' из (7) в (8) получаем одно уравнение для функции $\psi(\xi)$

$$F[\psi] = \frac{2}{\pi} k_j^{-2}(v) \psi''(\xi), \quad (9)$$

где функция $k_j(v)$ определена как

$$k_j(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega_j \sqrt{\frac{V_{s,w}^2 - v^2}{(v_0^2 - v^2)(v_1^2 - v^2)}}. \quad (10)$$

Здесь v_0 и v_1 — меньший и больший корни уравнения

$$(V_s^2 - v^2)(V_{s,w}^2 - v^2) - e^{-2L/\lambda} V_s^2 V_{s,w}^2 = 0.$$

В дальнейшем для решения уравнения (9) будем использовать модель Сакаи–Татено–Педерсена, в которой функция $F[\varphi]$ имеет вид

$$f[\varphi] = \begin{cases} (2/\pi)\varphi, & 0 < \varphi < \pi/2, \\ (2/\pi)(\pi - \varphi), & \pi/2 < \varphi < 3\pi/2, \\ (2/\pi)(\varphi - 2\pi), & 3\pi/2 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (11)$$

При этом решение уравнения (9), соответствующее движущемуся с постоянной скоростью v устойчивому элементарному вихрю (2 π -кинк), имеет вид [11]

$$\psi(\xi) = \frac{\pi}{2} \exp\left[k_j(v)\xi + \frac{\pi}{4}\right], \quad \xi < -\frac{\pi}{4k_j},$$

$$\psi(\xi) = \pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin[k_j(v)\xi], \quad -\frac{\pi}{4k_j} < \xi < \frac{\pi}{4k_j},$$

$$\psi(\xi) = 2\pi - \frac{\pi}{2} \exp\left[-k_j(v)\xi + \frac{\pi}{4}\right], \quad \xi > \frac{\pi}{4k_j}. \quad (12)$$

Используя (12), запишем в явном виде условие, которое использовалось для получения системы (5), (6)

$$k_j(v)\lambda \ll 1. \quad (13)$$

Условие (13) означает, что характерный пространственный масштаб вихря должен быть заметно больше лондоновской длины. Из (12) также следует, что движение устойчивого вихря возможно только в том случае, когда функция $k_j(v)$ является действительной. Это условие накладывает ограничение на скорость вихря v . Из (10) следует, что движение элементарного вихря возможно в двух областях скоростей [12]. Например, если $V_{s,w} > V_s$, эти области таковы: первая — область скоростей медленного вихря $v < v_0 < V_s$, вторая — область скоростей быстрого вихря, простирающаяся от $V_{s,w}$ до v_1 .

Покажем, что условие малости толщины волновода $2d_w$ по сравнению с k_w^{-1} может быть выполнено как для медленного, так и для быстрого вихря. В рассматриваемом случае, когда скорость света в волноводе велика по сравнению со скоростями Свихарта, следуя [12], для k_w приближенно имеем

$$k_w = k_j(v) \sqrt{|1 - \varepsilon_w v^2/c^2|} \approx k_j(v).$$

С учетом такой оценки имеем $2d_w k_w \approx 2d_w k_j(v) = (2d_w/\lambda) \cdot (k_j(v)\lambda)$. Поскольку мы предполагаем выполненным условие (13), то $2d_w k_w \ll 1$ легко выполнимо.

Рассмотрим пространственное распределение полей движущегося вихря (12). После подстановки производной ψ'_w , получаемой из (7) однократным интегрированием, выражения (4) для магнитных полей внутри несверхпроводящих слоев примут вид

$$H(\xi) = -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \left[v^2 - (1 - e^{-2L/\lambda}) V_{s,w}^2 \right] \frac{\psi'(\xi)}{v^2 - V_{s,w}^2},$$

$$H_w(\xi) = -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} e^{-L/\lambda} \frac{v^2}{v^2 - V_{s,w}^2} \psi'(\xi). \quad (14)$$

Магнитные поля в сверхпроводниках связаны с полями в ДП и волноводе следующими соотношениями:

$$H(x > d + L + 2d_w, z, t) = H_w(z, t) \exp[-(x - L - d - 2d_w)/\lambda],$$

$$H(d < x < d + L, z, t) = H_w(z, t) \frac{\text{sh}[(x - d)/\lambda]}{\text{sh}(L/\lambda)} - H(z, t) \frac{\text{sh}[(x - d - L)/\lambda]}{\text{sh}(L/\lambda)},$$

$$H(x < -d, z, t) = H(z, t) \exp[(x + d)/\lambda]. \quad (15)$$

В обсуждаемом случае движущихся вихрей входящие в (15) магнитные поля в ДП и волноводе описываются соотношениями (14). Электрическое поле в сверхпроводниках связано с магнитным полем следующим

образом:

$$\mathbf{E}^{Sc} = \frac{\lambda^2}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}^{Sc}}{\partial t}. \quad (16)$$

Из (16) и условия (13) следует, что внутри сверхпроводящих слоев $|E_z^{Sc}| \gg |E_x^{Sc}|$. С учетом этого замечания для электрического поля в сверхпроводниках приближенно имеем

$$\begin{aligned} E_z^{Sc}(x < -d, \xi) &= v \frac{\psi_0}{4\pi c} [v^2 - (1 - e^{-2L/\lambda})V_{s,w}^2] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{x+d}{\lambda}\right] \frac{\psi''(\xi)}{v^2 - V_{s,w}^2}, \\ E_z^{Sc}(d < x < d+L, \xi) &= -v \frac{\psi_0}{4\pi c} \frac{1}{\operatorname{sh}(L/\lambda)} \\ &\quad \times \left\{ -e^{-2L/\lambda} v^2 \operatorname{ch}(L/\lambda) + [v^2 - (1 - e^{-2L/\lambda})V_{s,w}^2] \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{ch}\left[\frac{x-L-d}{\lambda}\right] \right\} \frac{\psi''(\xi)}{v^2 - V_{s,w}^2}, \\ E_z^{Sc}(x > d+L+2d_w, \xi) &= -v \frac{\psi_0}{4\pi c} e^{-L/\lambda} \frac{v^2}{v^2 - V_{s,w}^2} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{x-L-d-2d_w}{\lambda}\right] \psi''(\xi). \quad (17) \end{aligned}$$

Внутри несверхпроводящих слоев из соотношения Джексона следует

$$\begin{aligned} E_x(-d < x < d, z, t) &= \frac{\phi_0}{4\pi c} \frac{1}{d} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t}, \\ E_x(L+d < x < L+d+2d_w, z, t) &= \frac{\phi_0}{4\pi c} \frac{1}{d_w} \frac{\partial \varphi_w(z, t)}{\partial t}. \quad (18) \end{aligned}$$

Из (18) и (13) легко видеть, что в ДП и волноводе $|E_x| \gg |E_z|$. Полученные в этом разделе электрические и магнитные поля в структуре ДП-волновод позволяют рассмотреть потери энергии, обусловленные конечной проводимостью несверхпроводящих слоев и малым сопротивлением сверхпроводников.

3. Диссипация энергии вихря

Рассмотрим омические потери энергии вихря, движущегося в слоистой структуре с постоянной скоростью v . Изменение энергии вихря W вследствие омических потерь описывается соотношением

$$\frac{dW}{dt} = - \int dx dz \sigma E^2, \quad (19)$$

где интегрирование необходимо проводить по всей плоскости xOz . Интеграл по x в (19) состоит из пяти частей, возникающих от интегрирования по двум несверхпроводящим слоям с проводимостями σ_d и σ_w и трем сверхпроводящим слоям с проводимостью нормальных электронов σ_n . Последняя, в частности, обусловлена тем, что при не нулевой температуре часть электронов сверхпроводника находится в нормальном состоянии. Воспользо-

вавшись (18), напишем вклад в (19) от несверхпроводящих слоев $-d < x < d$ и $L+d < x < L+d+2d_w$

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{d,d_w}}{dt} &= \frac{\pi^2}{16} \left(1 + \frac{4}{\pi}\right) \left(\frac{\phi_0}{4\pi c}\right)^2 \\ &\quad \times \left\{ \beta + \beta_w e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2 V_{s,w}^2}{(V_{s,w}^2 - v^2)} \right\} \frac{\varepsilon_d}{d} v^2 k_j(v), \quad (20) \end{aligned}$$

где $\beta = 4\pi\sigma_d/\varepsilon_d$, $\beta_w = 4\pi\sigma_w/\varepsilon_w$. Отдельно запишем вклады в интеграл от каждого слоя сверхпроводника. Используя первую формулу (17), находим потери в области $x < -d$

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{Sc,1}}{dt} &= \frac{\pi^3}{16} \sigma_n \left(\frac{\phi_0}{4\pi c}\right)^2 \\ &\quad \times v^2 \left[\frac{v^2 - V_{s,w}^2 (1 - e^{-2L/\lambda})}{v^2 - V_{s,w}^2} \right]^2 \lambda k_j^3(v). \quad (21) \end{aligned}$$

Пользуясь второй формулой (17), находим потери в слое $d < x < d+L$

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{Sc,2}}{dt} &= \frac{\pi^3}{16} \sigma_n \left(\frac{\phi_0}{4\pi c}\right)^2 \left\{ \left(\frac{L}{\lambda} + \frac{\operatorname{sh}(2L/\lambda)}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[v^4 e^{-2L/\lambda} + (v^2 - V_{s,w}^2 (1 - e^{-2L/\lambda}))^2 \right] \\ &\quad \left. - 2v^2 e^{-L/\lambda} \left(\frac{L}{\lambda} + \frac{\operatorname{sh}(2L/\lambda)}{2}\right) (v^2 - V_{s,w}^2 (1 - e^{-2L/\lambda})) \right\} \\ &\quad \times \frac{v^2}{(v^2 - V_{s,w}^2)^2} \frac{\lambda k_j^3(v)}{\operatorname{sh}^2(L/\lambda)}, \quad (22) \end{aligned}$$

а из третьей формулы (17) находим, что потери в области $x > d+L+2d_w$ имеют вид

$$-\frac{dW_{Sc,3}}{dt} = \frac{\pi^3}{16} \sigma_n \left(\frac{\phi_0}{4\pi c}\right)^2 \frac{v^6 e^{-2L/\lambda}}{(v^2 - V_{s,w}^2)^2} \lambda k_j^3(v). \quad (23)$$

Зная потери энергии в структуре, можно определить диссипативную силу F_{diss} , действующую на вихрь, движущийся со скоростью v

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_{d,d_w}}{dt} + \frac{dW_{Sc,1}}{dt} + \frac{dW_{Sc,2}}{dt} + \frac{dW_{Sc,3}}{dt} = -v F_{\text{diss}}. \quad (24)$$

Когда однородный транспортный ток имеет плотность j , на вихрь будет действовать сила Лоренца, плотность которой на единицу длины вдоль оси Oy имеет вид

$$F_z = - \int dx dz \frac{jH(x, z, t)}{c}, \quad (25)$$

где интегрирование ведется по всей плоскости xOz . Принимая во внимание явные выражения для магнитного поля (14), (15) и разности фаз (12), из (25) находим [16]

$$F_z = \frac{j}{c} \phi_0 \left(1 - e^{-L/\lambda} \frac{V_{s,w}^2}{V_{s,w}^2 - v^2}\right). \quad (26)$$

Движение вихря с постоянной скоростью возможно в том случае, когда диссипативная сила F_{diss} уравновешивает

вается силой Лоренца, действующей на вихрь при пропускании тока через структуру вдоль оси Ox . Величина транспортного тока, необходимого для поддержания движения вихря с постоянной скоростью, находится из приравнивания силы Лоренца и диссипативной силы.

4. Черенковские потери при вынужденном движении вихря

Рассмотрим влияние черенковских потерь на вынужденное движение вихря. Полагая омические и черенковские потери энергии достаточно малыми, их можно учитывать аддитивно. Поэтому при определении черенковских потерь в уравнениях, описывающих движения вихрей в системе, омическими потерями будем пренебрегать. Как показано в [11], для описания черенковских потерь необходимо учесть пространственную дисперсию, связанную с учетом высших членов в разложении по малому отношению лондонской длины λ к характерному размеру вихря $\sim 1/k_j$. Считая лондонскую длину малой по сравнению с характерным размером вихря, удержим в (3) квадратичные по $k\lambda$ поправки. С учетом такого разложения по $k\lambda$ для определения разностей фаз имеем систему уравнений (ср. (5), (6))

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial t^2} + \frac{(4\pi)^2 \lambda V_{s,w}^2}{\phi_0 c} j \\ &= V_{s,w}^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial z^2} + e^{-L/\lambda} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} \right] \\ &+ \lambda^2 \frac{V_{s,w}^2}{2} \left[\frac{\partial^4 \varphi_w(z, t)}{\partial z^4} + e^{-L/\lambda} (1 + L/\lambda) \frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^4} \right], \quad (27) \\ & \omega_j^2 F[\varphi] + \frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial t^2} + \omega_j^2 \frac{j}{j_c} \\ &= V_s^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + e^{-L/\lambda} V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_w(z, t)}{\partial z^2} \right] \\ &+ \lambda^2 \frac{V_s^2}{2} \left[\frac{\partial^4 \varphi(z, t)}{\partial z^4} + e^{-L/\lambda} (1 + L/\lambda) \frac{\partial^4 \varphi_w(z, t)}{\partial z^4} \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

Рассмотрим вихревые структуры, движущиеся с постоянной скоростью v . Тогда, используя формулу (7), находим (ср. (9))

$$\begin{aligned} F[\psi] &= \frac{2}{\pi} k_j^{-2}(v) \psi''(\xi) - \frac{j}{j_c} \left(1 - e^{-L/\lambda} \frac{V_{s,w}^2}{V_{s,w}^2 - v^2} \right) \\ &+ \frac{\lambda_j^2 \lambda^2}{2} \left[1 + e^{-2L/\lambda} \frac{V_{s,w}^4}{(V_{s,w}^2 - v^2)^2} \right. \\ &\left. - 2e^{-2L/\lambda} (1 + L/\lambda) \frac{V_{s,w}^2}{V_{s,w}^2 - v^2} \right] \psi^{IV}(\xi), \quad (29) \end{aligned}$$

где $\lambda_j = V_s/\omega_j$. Уравнение, подобное (29), решено в работе [11], где рассматривались черенковские потери

в изолированном ДП. Уравнение (29) отличается от рассмотренного в [8] видом множителей перед током и производными. Это позволяет при получении решения уравнения (29) воспользоваться решением из работы [11], заменив только соответствующие множители на новые. С учетом такой замены из (29) получим связь тока со скоростью вихря

$$\frac{j(v)}{j_c} = \frac{\varepsilon^4}{8} \left(\sin \frac{\pi}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2 \left(1 - e^{-L/\lambda} \frac{V_{s,w}^2}{V_{s,w}^2 - v^2} \right)^{-1}, \quad (30)$$

где величина ε определена как

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\pi} \lambda \lambda_j k_j^2(v) \left(1 + e^{-2L/\lambda} \frac{V_{s,w}^4}{(V_{s,w}^2 - v^2)^2} \right. \\ &\left. - 2e^{-2L/\lambda} (1 + L/\lambda) \frac{V_{s,w}^2}{V_{s,w}^2 - v^2} \right)^{1/2}. \quad (31) \end{aligned}$$

Формула (30) справедлива, если $\varepsilon^2 \ll 1$ и $\lambda_j^2 k_j^2 \ll \varepsilon^2$ (подробнее см. [11]). Выражение (30) отличается от полученного ранее в [13] наличием последнего множителя в круглых скобках. Появление этого множителя является следствием того, что ток протекает через всю структуру, а не только через ДП, как в [13]. Важно подчеркнуть, что входящая в (30) величина ε (31) записана без предположения о слабой связи ДП и волновода, использовавшегося в [13].

5. Медленный вихрь

Рассмотрим случай, когда скорость Свихарта волновода значительно превышает скорость Свихарта ДП: $V_{s,w} \gg V_s$. Как показано в [12], в этом случае скорость движущегося вихря должна лежать в одной из двух областей разрешенного движения. В этом разделе рассмотрим первую из этих областей — область медленного вихря, т. е. вихря, скорость которого меньше v_0

$$0 < v < v_0 \approx V_s (1 - e^{-2L/\lambda})^{1/2}. \quad (32)$$

При таких скоростях для потерь энергии медленного вихря в ДП и волноводе из (20) находим

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{d,dw}}{dt} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{\phi_0}{4\pi c} \right)^2 \\ &\times \left\{ \beta + \beta_w e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{V_{s,w}^2} \right\} \frac{\varepsilon_d}{d} v^2 \frac{\omega_j}{\sqrt{v_0^2 - v^2}}, \quad (33) \end{aligned}$$

а для суммы потерь в сверхпроводниках имеем

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{sc}}{dt} &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \sigma_n \left(\frac{\phi_0}{4\pi c} \right)^2 \frac{v^2}{(v_0^2 - v^2)^{3/2}} \\ &\times \lambda \omega_j^3 \left(1 - e^{-2L/\lambda} + 2 \frac{L}{\lambda} e^{-2L/\lambda} \right). \quad (34) \end{aligned}$$

Подставив (33) и (34) в (24) и сравнив с (26), получим транспортный ток, необходимый для поддержания движения медленного вихря с постоянной скоростью v

$$\begin{aligned} \frac{j(v)}{j_c} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \left[\left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \left(\beta + \beta_w e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{V_{s,w}^2} \right) \right. \\ & \left. + \eta \frac{2}{\pi} \frac{V_s^2}{v_0^2 - v^2} \left(1 - e^{-2L/\lambda} + 2 \frac{L}{\lambda} e^{-2L/\lambda} \right) \right] \\ & \times \frac{v}{\omega_j} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - v^2}} \left(1 - e^{-L/\lambda} \frac{V_{s,w}^2}{V_{s,w}^2 - v^2} \right)^{-1}, \quad (35) \end{aligned}$$

где $\eta = 2\pi\lambda^2\sigma_n\omega_j^2/c^2V_s^2$.

Рассмотрим влияние черенковских потерь на движение медленного вихря. Соответствующий вклад в ток описывается формулой (30) с тем отличием, что величина (31) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda_j} \frac{V_s^2}{v_0^2 - v^2} \sqrt{1 - (1 + 2L/\lambda)e^{-2L/\lambda}}. \quad (36)$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей плотности тока от скорости медленного вихря. Все три графика построены вблизи правой границы зоны разрешенного движения медленного вихря от скорости v , которая соответствует отношению $\lambda_j k_j / \varepsilon \approx 0.3$, до v , отвечающей $\varepsilon \approx 0.3$. При таких скоростях вклад в ток от черенковских потерь можно описывать формулой (30). Рис. 1, *a* отвечает случаю $L/\lambda = 3$, когда $\exp(-L/\lambda) \approx 0.05$, т.е. связь между волноводом и ДП мала. Этот рисунок аналогичен рис. 2 работы [11], где изучался изолированный ДП. Так же как и в [11], на фоне монотонно растущей функции (35), описывающей омические потери, видны осцилляции, отвечающие черенковским потерям (30). Амплитуда этих осцилляций растет по мере приближения скорости вихря к правой границе зоны разрешенного движения. Отметим, что в случае связанных ДП и волновода зона разрешенных скоростей движения вихрей простирается не до скорости Свихарта ДП, а до меньшей скорости $v_0 < V_s$. Штриховая кривая на рис. 1, *a* отвечает случаю, когда нет омических потерь в сверхпроводниках. Поскольку для случая $L/\lambda = 3$ связь ДП и волновода мала, штриховая кривая совпадает с кривой рис. 2 работы [11]. Сплошная кривая на рис. 1, *a* учитывает омические потери в сверхпроводниках, что приводит к увеличению значения функции $j(v)$ по сравнению с представленной в [11].

Влияние волновода на вынужденное движение вихря становится существенным при меньших L/λ . На рис. 1, *b* представлена зависимость тока от скорости вихря для $L/\lambda = 1$. Влияние волновода в этом случае привело к сужению зоны разрешенного движения вихря: $0 < v < v_0 \approx 0.93V_s$. График, как и в предыдущем случае, построен до $\varepsilon \approx 0.3$. Можно видеть, что, как и на рис. 1, *a*, вблизи правой границы зоны на фоне

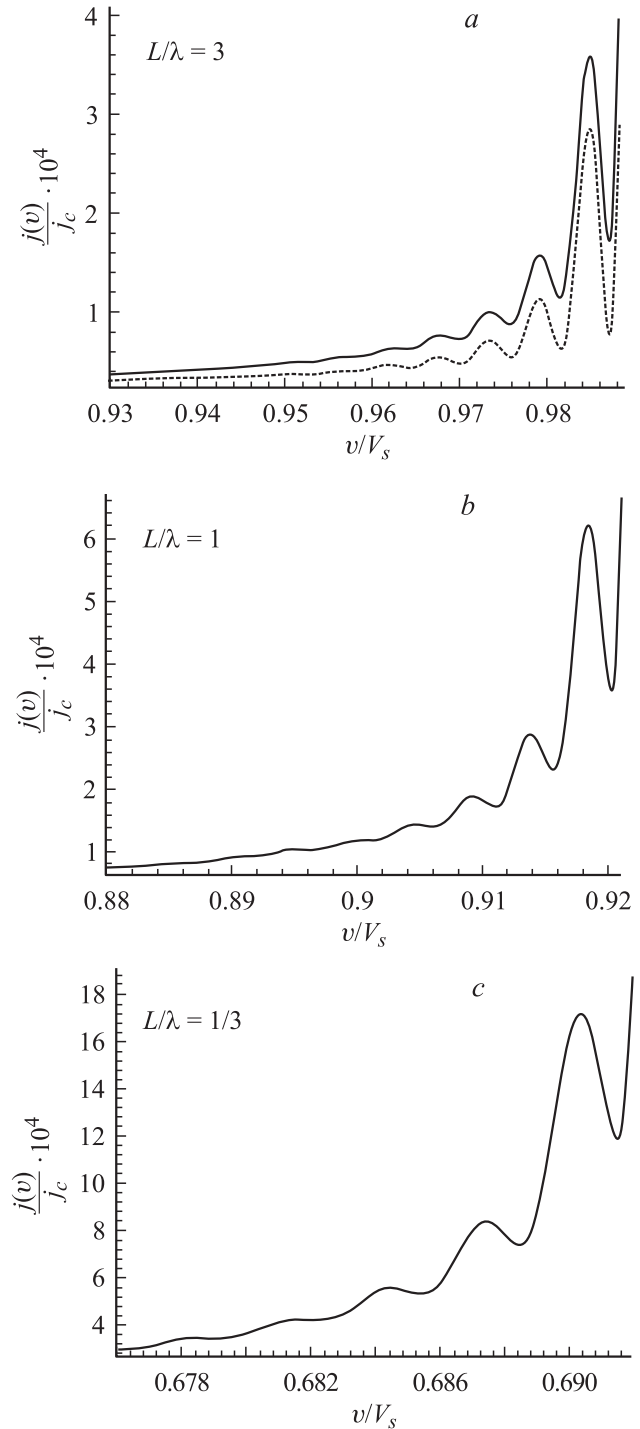


Рис. 1. Зависимость плотности транспортного тока от скорости медленного вихря при $V_{s,w} = 5V_s$, $\lambda/\lambda_j = 5 \cdot 10^{-3}$, $\beta/\omega_j = 10^{-5}$, $\beta_w = \beta$, $\eta = \beta/10$. $L/\lambda = 3$ (*a*), $L/\lambda = 1$ (*b*), $L/\lambda = 1/3$ (*c*). Штриховая кривая отвечает случаю $\eta = 0$.

монотонно растущего тока, отвечающего омическим потерям, появляются и становятся все более заметны с ростом v осцилляции, отвечающие черенковским потерям. Влияние волновода здесь помимо сужения зоны разрешенного движения привело к увеличению величины функции $j(v)$.

Наконец, на рис. 1, *c* представлена связь тока со скоростью вихря в случае $L/\lambda = 1/3$, что отвечает сравнительно сильной связи между ДП и волноводом. В этом случае ширина зоны разрешенного движения медленного вихря составляет около $0.7V_s$. На графике, который также построен до $\varepsilon \approx 0.3$, можно видеть заметный вклад от черенковских потерь. Из сопоставления рис. 1, *a-c* видно, что с увеличением связи ДП и волновода имеет место смещение области осциллирующий тока в область скоростей, меньших V_s , и увеличение функции $j(v)$.

6. Быстрый вихрь

В этом разделе рассмотрим быстрый вихрь, т.е. вихрь, движущийся со скоростью v , лежащей в узкой области скоростей

$$V_{s,w} < v < v_1 \approx V_{s,w} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{V_{s,w}^2} \right). \quad (37)$$

В области скоростей (37) и (20) находим

$$-\frac{dW_{d,dw}}{dt} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{\phi_0}{4\pi c} \right)^2 \times \left\{ \beta + \beta_w e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{4(v - V_{s,w})^2} \right\} \frac{\varepsilon_d}{d} v^2 \frac{\omega_j}{V_{s,w}} \sqrt{\frac{v - V_{s,w}}{v_1 - v}}, \quad (38)$$

а выражение для суммарных потерь в сверхпроводниках принимает вид

$$-\frac{dW_{Sc}}{dt} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \sigma_n \left(\frac{\phi_0}{4\pi c} \right)^2 \times \lambda \omega_j^3 \frac{v^2 e^{-2L/\lambda}}{4V_{s,w}(v_1 - v)^{3/2}(v - V_{s,w})^{1/2}}. \quad (39)$$

Подставив (38) и (39) в (24) и сравнивая с (26), находим выражение для транспортного тока, необходимого для поддержания движения быстрого вихря со скоростью v при наличии омических потерь

$$\frac{j(v)}{j_c} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \left[\left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \left(\beta + \beta_w e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{4(v - V_{s,w})^2} \right) + \eta \frac{2}{\pi} e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{4(v - V_{s,w})(v_1 - v)} \right] \times \frac{1}{\omega_j} \sqrt{\frac{v - V_{s,w}}{v_1 - v}} \left(1 - e^{-L/\lambda} \frac{V_{s,w}}{2(V_{s,w} - v)} \right)^{-1}. \quad (40)$$

Черенковские потери энергии быстрого вихря описываются формулой (30), где ε имеет вид

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda_j} \frac{V_s^2}{V_{s,w}^2} \frac{v - V_{s,w}}{v_1 - v} \times \sqrt{1 + e^{-2L/\lambda} \frac{V_s^2}{4(v - V_{s,w})^2} - e^{-2L/\lambda} (1 + L/\lambda) \frac{V_{s,w}}{v - V_{s,w}}}. \quad (41)$$

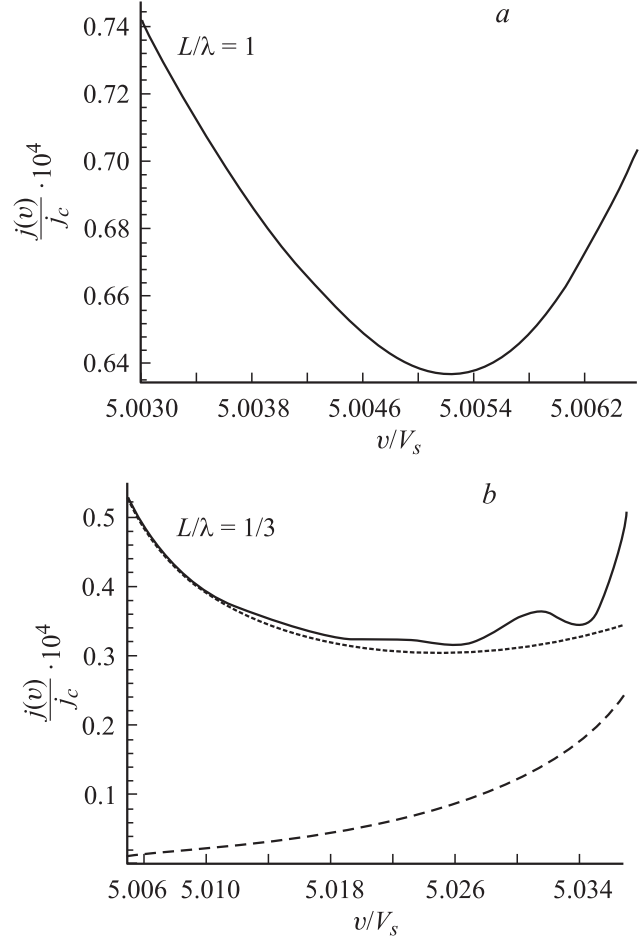


Рис. 2. Зависимость плотности транспортного тока от скорости быстрого вихря при $\lambda/\lambda_j = 5 \cdot 10^{-2}$. Остальные параметры те же, что и на рис. 1. $L/\lambda = 1$ (*a*), $L/\lambda = 1/3$ (*b*). Пунктирная кривая описывает вклад в плотность тока, обусловленный диссипацией в несверхпроводящих слоях. Штриховая кривая — увеличенный в 10 раз вклад в плотность тока, обусловленный диссипацией в сверхпроводниках.

На рис. 2, *a* представлен график зависимости плотности тока от скорости быстрого вихря вблизи правой границы разрешенной зоны (37). График построен для случая $L/\lambda = 1$ до скоростей v , при которых $\varepsilon \approx 0.3$; при этом малые омические и черенковские потери учитывались аддитивно. Можно видеть, что влияние черенковских потерь на фоне омических незаметно даже при сравнительно больших ε . Иная картина имеет место при $L/\lambda = 1/3$, что отвечает более сильной связи ДП и волновода. Зависимость тока от скорости быстрого вихря в случае $L/\lambda = 1/3$ представлена сплошной кривой на рис. 2, *b*. Предельное значение v на этом рисунке отвечает $\varepsilon \approx 0.3$. Пунктирная кривая на рис. 2, *b* описывает вклад в плотность тока, обусловленный диссипацией в несверхпроводящих слоях, а штриховая — вклад в плотность тока, обусловленный диссипацией в сверхпроводниках. Из рис. 2, *b* видно, что при наличии сравнительно сильной связи между ДП и волноводом

становится возможным наблюдение осцилляций, обусловленных черенковскими потерями.

7. Заключение

Для слоистой структуры, состоящей из ДП и магнитосвязанного с ним волновода, найдены черенковские потери движущегося вихря без предположения о слабой связи ДП и волновода. Показано, что сильная связь ДП и волновода приводит к тому, что осцилляции тока, обусловленные черенковскими потерями быстрого вихря, можно сравнительно легко различить на фоне вкладов в ток, связанных с омическими потерями в несверхпроводящих слоях и в сверхпроводящих электродах. Влияние сильной связи установлено и для медленного вихря. Оно приводит к смещению пиков на кривой $j(v)$ в область скоростей, меньших скорости Свихарта ДП.

Приложение

Рассмотрим омические потери в сверхпроводниках и несверхпроводящих слоях в том случае, когда ДП описывается уравнением с синусной нелинейностью. Уравнение (9) в этом случае имеет вид

$$\sin \psi(\xi) = \frac{2}{\pi} k_j^{-2}(v) \psi''(\xi), \quad (42)$$

а его решение, описывающее движущийся с постоянной скоростью v , устойчивый элементарный вихрь (2π -кинк), имеет вид

$$\psi(\xi) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} k_j(v) \xi \right) \right\}. \quad (43)$$

При этом все формулы для малых омических потерь в модели с синусной нелинейностью отличаются от приведенных выше для модели Сакаи–Татено–Педерсена лишь заменой численных коэффициентов. Так, диссипация энергии в несверхпроводящих слоях будет описываться формулой (20), в которой вместо численного коэффициента $(\pi^2/16) \times (1 + 4/\pi)$ следует подставить $2 \times (2/\pi)^{1/2}$. Диссипация энергии в сверхпроводниках будет описываться формулами (21)–(23), в которых вместо $\pi^3/16$ следует подставить $(4/3) \times (\pi/2)^{3/2}$. В формулах (33) и (38), описывающих потери в несверхпроводящих слоях для медленного и быстрого вихря соответственно, вместо коэффициента $(1/4) \times (\pi/2)^{3/2} \times (1 + 4/\pi)$ следует подставить $4/\pi$. Для диссипации энергии вихрей в сверхпроводниках справедливы формулы (34) и (39), в которых необходимо $(\pi/2)^{3/2}$ заменить на $8/3$. Для транспортного тока, необходимого для поддержания движения вихрей, зависимости плотности тока от скорости вихря описываются формулами (35), (40), в которых в коэффициенте перед β следует произвести ту же замену, что в (33) и (38), а в коэффициенте перед η — ту же замену, что в (34) и (39).

Список литературы

- [1] И.О. Кулик, И.К. Янсон. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. Наука, М. (1970). 272 с.
- [2] М.Б. Минеев, В.В. Шмидт. ЖЭТФ **79**, 3, 893 (1980).
- [3] К.К. Лихарев. Введение в динамику джозефсоновских переходов. Наука, М. (1985). С. 27.
- [4] A.V. Ustinov. Physica D **123**, 1–4, 315 (1998).
- [5] V. Kurin, A. Yulin, E. Goldobin, A. Klushin, H. Kohlstedt, M. Levicev, N. Thyssen. IEEE Trans. on Appl. Supercon. **9**, 2, 3733 (1999).
- [6] J. Zitzmann, A.V. Ustinov, M. Levicev, S. Sakai. Phys. Rev. B **66**, 6, 064 527 (2002).
- [7] V.V. Kurin, A.V. Yulin. Phys. Rev. B **55**, 17, 11 659 (1997).
- [8] N. Martucciello, J. Mygind, V.P. Koshelets, A.V. Shchukin, L.V. Filipenko, R. Monaco. Phys. Rev. B **57**, 9, 5444 (1998).
- [9] E. Goldobin, A. Wallraff, N. Thyssen, A.V. Ustinov. Phys. Rev. B **57**, 1, 130 (1998).
- [10] R.G. Mints, I.B. Shapiro. Phys. Rev. B **52**, 13, 9691 (1995).
- [11] В.П. Силин, А.В. Студенов. ЖЭТФ **117**, 6, 1230 (2000).
- [12] A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin. Phys. Lett. A **306**, 2–3, 153 (2002).
- [13] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **125**, 3, 673 (2004).
- [14] S. Sakai, H. Tateno. Jpn. J. Appl. Phys. **22**, 9, 1374 (1983).
- [15] S. Sakai, N.F. Pedersen. Phys. Rev. B **34**, 5, 3506 (1986).
- [16] А.С. Малишевский, С.А. Урюпин. ФТТ **46**, 7, 1165 (2004).
- [17] Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин. Сверхпроводимость: физика, химия, техника **5**, 2, 228 (1992).
- [18] А. Бароне, Дж. Патерно. Эффект Джозефсона: физика и применения. Мир, М. (1984). 640 с.
- [19] А.А. Абрикосов. Основы теории металлов. Наука, М. (1987). 520 с.
- [20] В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **108**, 6, 2163 (1995).
- [21] Ю.М. Алиев, К.Н. Овчинников, В.П. Силин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ **107**, 3, 972 (1995).