Стабилизация формы солитона в сверхрешетке со спектром, выходящим за рамки учета "ближайших соседей", в поле нелинейной волны

© С.В. Крючков, Э.Г. Федоров¶

Волгоградский государственный педагогический университет,
400013 Волгоград, Россия

(Получена 18 июня 2001 г. Принята к печати 4 сентября 2001 г.)

Исследовано влияние электрического поля нелинейной (кноидальной) электромагнитной волны (поля накачки) на форму уединенной электромагнитной волны (солитона) в квантовой полупроводниковой сверхрешетке, энергетический спектр электронов которой содержит вторую гармонику. Показано, что распространение электромагнитных волн в данной ситуации описывается модифицированным двойным уравнением *sine*-Gordon. Отмечено, что в облучаемой кноидальной электромагнитной волной сверхрешетке возможны усиление импульса и трансформация его в диссипативный солитон, на значения скорости и ширины которого влияет учет второй гармоники в электронном энергетическом спектре сверхрешетки. Отмечена также зависимость параметров диссипативного солитона от температуры и амплитуды поля накачки. Выявлено, что при определенных условиях в сверхрешетке с рассматриваемым спектром возможно распространение электромагнитных волн, описываемых решениями модифицированного уравнения *sine*-Gordon.

1. Известно, что в твердых телах могут распространяться уединенные электромагнитные (ЭМ) волны (солитоны) [1–3]. Для формирования солитонов в квантовых полупроводниковых сверхрешетках (СР) требуются поля вполне умеренных значений напряженности ($\sim 10^3$ В/см) [4]. Именно поэтому СР является весьма подходящей средой для экспериментального изучения солитонов, вызывающих не только фундаментальный интерес. Явления, связанные с возможностью распространения солитонов в СР, могут быть положены в основу принципов работы новых твердотельных электронных приборов, например сдвиговых солитонных регистров памяти. Задачи создания таких устройств требуют, в частности, поиска простых и эффективных способов усиления и стабилизации формы распространяющихся в СР солитонов, поскольку сформированная в СР уединенная волна интенсивно затухает [5].

Ранее было предложено стабилизировать форму солитона путем воздействия на СР внешнего однородного высокочастотного электрического поля [6]. Аналогичная ситуация рассмотрена в работе [7], где показано, что учет второй гармоники в энергетическом спектре электронов СР приводит к принципиально новым результатам.

Эффект стабилизации формы солитона может быть получен при облучении СР электромагнитной волной. Однако известно, что падающая на СР волна преобразуется в объеме образца в нелинейную (кноидальную) волну [4]. В этой связи представляется актуальным исследовать влияние заданного поля нелинейной ЭМ волны (поля накачки) на характер распространения солитона в СР, закон дисперсии электронов которой может быть представлен в виде [7,8]

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \frac{p_\perp^2}{2m} + \varepsilon_0[1 - \cos(p_x d/\hbar)] - \varepsilon_2 \cos(2p_x d/\hbar), \quad (1)$$

где m — эффективная масса электрона, соответствующая движению в плоскости образующих СР слоев; $0x$ — ось СР (перпендикулярная слоям), $\varepsilon_0 = \Delta$ (Δ — полуширина нижней минизоны зоны проводимости), d — период СР, $p_\perp$ и p_x — поперечная и продольная (относительно оси СР) составляющие квазиимпульса электрона в минизоне.

2. Пусть де-бройлевская длина волны электрона и период СР малы по сравнению с характерной длиной, на которой происходит изменение электромагнитного поля распространяющейся в сверхрешетке ЭМ волны; время свободного пробега электрона велико по сравнению с характерным временем изменения поля волны. Будем также считать столкновения электронов с нерегулярностями кристаллической решетки пренебрежимо редкими. В этом случае распространение ЭМ волны в СР будет описываться двойным уравнением *sine*-Gordon (DSG) [7,8]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \omega_0^2(\sin \Phi + \lambda \sin 2\Phi) = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\omega_0 = \frac{\omega_p d}{\hbar} \sqrt{\varepsilon_0 m \frac{I_1}{I_0}}, \quad (3)$$

$$\lambda = 2 \frac{\varepsilon_2 I_2}{\varepsilon_0 I_1}, \quad (4)$$

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \exp\left[\frac{\varepsilon_0}{\Theta}\left(\cos x + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \cos 2x\right)\right] dx, \quad (5)$$

$\Phi = A_x ed/c\hbar$; $\mathbf{A}$ — векторный потенциал поля ЭМ волны, связанный с напряженностью ее электрического поля известным соотношением $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$; v — скорость волны в отсутствие электронов; ω_0 — обобщенная плазменная частота электронов в нижней минизоне зоны проводимости; ω_p — ленгмюровская частота; $\Theta = kT$ — температура, выраженная в энергетических единицах.

¶ E-mail: eduard-f@mail.ru

Рассмотрим влияние поля кноидальной ЭМ волны на форму распространяющегося в СР импульса. В настоящей работе нас будет интересовать уединенная волна, описываемая кинковым решением уравнения (2) [9]:

$$\Phi(t,z) = -2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{2\lambda+1}}{\mathrm{sh}(\xi/L)}\right], \qquad (6)$$

где $\xi = z - ut$,

$$L = (v/\omega_0)\sqrt{1-(u/v)^2}\Big/\sqrt{2\lambda+1},$$

u — скорость кинка ($u/v < 1$).

Напряженность электрической составляющей поля импульса при этом имеет вид $\mathbf{E} = \{E, 0, 0\}$,

$$E(t,z) = E_0\,\frac{\mathrm{ch}(\xi/L)}{[2\lambda + \mathrm{ch}^2(\xi/L)]}, \qquad (7)$$

где $E_0 = 2u\hbar(edL)^{-1}\sqrt{2\lambda+1}$.

Отметим, что при $\lambda \to 0$ решение (6), (7) переходит в односолитонное решение уравнения *sine*-Gordon (SG) [1].

Пусть вдоль слоев СР распространяется нелинейная ЭМ волна с частотой $\omega_1 \gg \omega_0$ и амплитудой $E_{1,0}$ ее электрического поля $\mathbf{E}_1 = \{E_1, 0, 0\}$. При этом ток в СР будет индуцироваться под совместным влиянием полей солитона и нелинейной волны.

Будем решать данную задачу в квазиклассическом приближении, что оправдано выполнением требуемых нами условий $\hbar\omega_1 \ll 2\Delta$, $E_0ed \ll 2\Delta$ и $E_{1,0}ed \ll 2\Delta$. Поскольку характерное расстояние, на котором происходит существенное изменение поля волны, значительно больше длины свободного пробега электрона, пренебрежем пространственной дисперсией электрического поля нелинейной волны. Это позволит записать проекцию его напряженности на ось СР в виде

$$E_1(t) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial A_{1x}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{ed}\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \qquad (8)$$

где A_{1x} — проекция векторного потенциала поля накачки на ось СР,

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 2\arcsin\left\{\kappa\,\mathrm{sn}\left[\frac{2\mathrm{K}(\kappa)}{\pi}\,\omega_1 t, \kappa\right]\right\}, & 0 < \kappa \leqslant 1, \\ 2\arcsin\left\{\mathrm{sn}\left[\frac{2\mathrm{K}(\kappa^{-1})}{\pi}\,\omega_1 t, \kappa^{-1}\right]\right\}, & \kappa > 1, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\omega_1 = \omega_0\,\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}\begin{cases} \frac{\pi}{2\mathrm{K}(\kappa)}, & 0 < \kappa \leqslant 1, \\ \frac{\kappa\pi}{2\mathrm{K}(\kappa^{-1})}, & \kappa > 1, \end{cases} \qquad (10)$$

$$\kappa = \frac{eE_{1,0}d}{2\omega_0\hbar}\,\frac{\sqrt{\beta^2-1}}{\beta}, \qquad (11)$$

$\beta = u_1/v$ ($\beta > 1$), u_1 — фазовая скорость нелинейной волны, K — полный эллиптический интеграл I рода.

Учет влияния заданного поля накачки формально означает замену $\Phi \to \Phi + \Phi_1$ в выражении для плотности электронного тока, входящего в уравнение Даламбера и индуцируемого под влиянием полей ЭМ солитона и кноидальной волны [7]. Произведя усреднение плотности тока по периоду поля накачки $T_1 = 2\pi/\omega_1$, получим модифицированное уравнение DSG, описывающее ЭМ волну, распространяющуюся в СР под влиянием поля кноидальной волны:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \omega_0^2\sigma_0(\kappa)\left[\sin\Phi + \lambda\,\frac{\sigma_2(\kappa)}{\sigma_0(\kappa)}\,\sin 2\Phi\right] = 0. \qquad (12)$$

Здесь

$$\sigma_0(\kappa) = \begin{cases} \left[2\,\frac{\mathrm{E}(\kappa)}{\mathrm{K}(\kappa)} - 1\right], & 0 < \kappa \leqslant 1, \\ \left\{1 - 2\kappa^2\left[1 - \frac{\mathrm{E}(\kappa^{-1})}{\mathrm{K}(\kappa^{-1})}\right]\right\}, & \kappa > 1, \end{cases} \qquad (13)$$

$$\sigma_2(\kappa) = 1 - 2 \times \begin{cases} \frac{\kappa^2}{\mathrm{K}(\kappa)}\int\limits_0^{4\mathrm{K}(\kappa)} \mathrm{sn}^2(x,\kappa)\mathrm{dn}^2(x,\kappa)dx, & 0 < \kappa \leqslant 1, \\ \frac{1}{\mathrm{K}(\kappa^{-1})}\int\limits_0^{4\mathrm{K}(1/\kappa)} \mathrm{sn}^2(x,\kappa^{-1})\mathrm{cn}^2(x,\kappa^{-1})dx, & \kappa > 1, \end{cases} \qquad (14)$$

K, E — полные эллиптические интегралы I и II рода соответственно.

Зависимость $\sigma_2(\kappa)$ не выражается в табулированных функциях и может быть найдена численным интегрированием. Функции $\sigma_0(\kappa)$ и $\sigma_2(\kappa)$ знакопеременные, $\sigma_0(\kappa)$ обращается в нуль при $\kappa \approx 0.91$, $\sigma_2(\kappa)$ проходит через нуль при $\kappa \approx 0.56$ и $\kappa \approx 0.97$.

В зависимости от соотношения параметров поля кноидальной волны могут реализоваться две принципиально различные ситуации. Если поле накачки такое, что $\sigma_0(\kappa) > 0$ и $\sigma_2(\kappa) > 0$, то решение уравнения (12) сводится к кинковому решению (6), (7) перенормировкой

$$\omega_0 \to \omega_0\sqrt{\sigma_0(\kappa)} \quad \text{и} \quad \lambda \to \lambda\sigma_2(\kappa)/\sigma_0(\kappa).$$

При этом ширина импульса L и амплитуда его электрического поля E_0 будут изменяться с изменением величины κ немонотонным образом.

Если же параметры поля накачки удовлетворяют условиям $\sigma_0(\kappa) < 0$ и $\sigma_2(\kappa) > 0$, то уравнение (12) может иметь решение, соответствующее усилению распространяющегося в СР импульса [6,7,10]. Физической причиной такого усиления является специфическое перераспределение электронов в минизоне проводимости под влиянием поля кноидальной волны. Выражение для энергии продольного (вдоль оси СР) движения электронов, усредненной по каноническому ансамблю и периоду поля накачки, имеет вид

$$\bar{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \left\{ 1 - \sigma_0(\kappa) \frac{I_1}{I_0} \left[1 + \frac{\lambda \sigma_2(\kappa)}{2\sigma_0(\kappa)} \right] \right\}. \qquad (15)$$

Из (15) видно, что при выполнении условия

$$0 < \sigma_2(\kappa) < -2 \frac{\sigma_0(\kappa)}{\lambda} \qquad (16)$$

средняя энергия продольного движения электронов в минизоне больше ее полуширины ($\bar{\mathcal{E}} > \varepsilon_0 = \Delta$), т. е. под влиянием поля накачки среда минизонных электронов становится инвертированной. Как известно, в такой среде возможно усиление импульса [6,10].

Поле усиливающегося импульса состоит из отдельных субимпульсов, суммарная площадь которых сохраняется. По аналогии со случаем солитона, описываемого уравнением SG, можно ожидать увеличения частоты $\omega(z)$ и сжатия импульса по мере его распространения. Импульс усиливается так, что число фотонов в нем не изменяется, а его энергия увеличивается за счет добавления энергии излучения при вынужденных переходах электронов к текущей энергии $\hbar\omega(z)$ фотонов поля импульса [6,10].

3. Возрастание частоты импульса $\omega(z)$ может привести к появлению межминизонных электронных переходов, вследствие чего энергия импульса будет рассеиваться. Данный эффект можно оценить посредством введения в левую часть уравнения (12) слагаемого $\gamma \partial\Phi/\partial t$, где γ — феноменологическая постоянная, учитывающая потери энергии солитона при межминизонных переходах [6,11,12]:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \omega_0^2 \sigma_0(\kappa) \left[\sin\Phi + \lambda \frac{\sigma_2(\kappa)}{\sigma_0(\kappa)} \sin 2\Phi \right] = 0. \qquad (17)$$

Частота импульса $\omega(z)$ будет возрастать до тех пор, пока не сравняется по порядку величины с частотой межминизонных переходов электронов, после чего процесс распространения импульса выйдет на стационарный режим, а импульс превратится в стабилизированный полем кноидальной волны диссипативный солитон. Соответствующее решение уравнения (17) имеет вид

$$\Phi_D = -\arccos\{\mathrm{th}[(z - u_D t)/L_D]\}, \qquad (18)$$

$$E_D = E_{D0}\, \mathrm{sech}[(z - u_D t)/L_D]. \qquad (19)$$

Здесь

$$u_D = v \left[1 + \lambda \frac{2\gamma^2 \sigma_2(\kappa)}{\omega_0^2 \sigma_0^2(\kappa)} \right]^{-1/2}, \qquad (20)$$

$$L_D = \frac{\gamma v}{\omega_0^2 |\sigma_0(\kappa)|} \left[1 + \lambda \frac{2\gamma^2 \sigma_2(\kappa)}{\omega_0^2 \sigma_0^2(\kappa)} \right]^{-1/2}, \qquad (21)$$

$$E_{D0} = \frac{\hbar\omega_0^2}{ed\gamma} |\sigma_0(\kappa)|. \qquad (22)$$

Скорость u_D, ширина L_D и амплитуда E_{D0} диссипативного солитона не связаны друг с другом, как в солитонных интегрируемых моделях, а определяются исключительно параметрами среды [12].

При $d = 10^{-6}$ см, $\varepsilon_0 = \Delta = 10^{-1}$ эВ, $\varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-2} \varepsilon_0$, $\omega_0 = 10^{12}$ с$^{-1}$, $T = 3 \cdot 10^2$ К по формулам (4), (5) находим $\lambda \approx 4.0 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, усиление импульса и трансформация его в диссипативный солитон (18), (19) возможны при облучении СР нелинейной волной с амплитудой напряженности ее электрического поля $E_{1,0} \approx 1.39 \cdot 10^4$ В/см ($\beta - 1 = 5 \cdot 10^{-3}$, $\kappa \approx 1.05$, см. (11)) и выше. Для указанных здесь значений величин λ и $E_{1,0}$ условие (16) выполняется с запасом. Полагая при этом $v = 10^{10}$ см/с, $\gamma = 10^{11}$ с$^{-1}$, $\beta - 1 = 5 \cdot 10^{-3}$, $E_{1,0} = 1.60 \cdot 10^4$ В/см ($\kappa \approx 1.21$, $\sigma_0(\kappa) \approx -0.14$, $\sigma_2(\kappa) \approx 0.03$), из (20)–(22) для скорости, ширины и амплитуды стабилизированного импульса получаем соответственно $u_D \approx 9.99 \cdot 10^9$ см/с, $L_D \approx 7.14 \cdot 10^{-3}$ см и $E_{D0} \approx 9.23 \cdot 10^2$ В/см.

Из соотношений (20) и (21) следует, что учет второй гармоники в энергетическом спектре электронов СР приводит к уменьшению скорости и ширины диссипативного солитона по сравнению со случаем спектра с одной гармоникой. В пределе $\lambda \to 0$, как и следовало ожидать, скорость и ширина импульса сравниваются со скоростью (равной скорости ЭМ волны в отсутствие электронов) и шириной диссипативного солитона, распространяющегося в СР со спектром, содержащим одну гармонику. Также из (20)–(22) видно, что зависимость величин λ и ω_0 от T (см. (3)–(5)) определяет температурную зависимость скорости, ширины и амплитуды ЭМ импульса (18), (19), которые существенно изменяются при изменении амплитуды электрического поля кноидальной волны.

Если параметры поля накачки таковы, что $\sigma_2(\kappa) \to 0$ (при $\kappa \approx 0.56$ и $\kappa \approx 0.97$), то можно ожидать распространения в рассматриваемой СР уединенных ЭМ волн, описываемых модифицированным уравнением SG:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \omega_0^2 \sigma_0(\kappa) \sin\Phi = 0, \qquad (23)$$

которое учитывает вторую гармонику в энергетическом спектре электронов и температурную зависимость ω_0 по формулам (3), (5).

При $\kappa \approx 0.56$ выполняется условие $\sigma_0(\kappa) > 0$, и соответствующие решения уравнения (23) получаются из известных решений уравнения SG [1,4] путем перенормировки $\omega_0 \to \omega_0 \sqrt{\sigma_0(\kappa)}$. Из соотношения (11) следует, что при $d = 10^{-6}$ см, $\omega_0 = 10^{12}$ с$^{-1}$, $\beta - 1 = 5 \cdot 10^{-3}$ последнее справедливо при амплитуде напряженности поля накачки $E_{1,0} \approx 7.41 \cdot 10^3$ В/см.

Если $\kappa \approx 0.97$, то $\sigma_0(\kappa) < 0$, в этом случае возможно усиление распространяющегося в СР импульса с последующей его стабилизацией [6,10]. При тех же значениях d, ω_0 и β данное явление может наблюдаться при облучении СР нелинейной ЭМ волной с амплитудой напряженности электрической составляющей ее поля $E_{1,0} \approx 1.28 \cdot 10^4$ В/см.

Список литературы

[1] Э.М. Эпштейн. ФТТ, **19** (11), 3456 (1977).
[2] А.П. Тетервов. УФЖ, **23** (7), 1182 (1978).
[3] Э.М. Беленов, Л.А. Гречко, А.П. Канавин. Письма ЖЭТФ, **58** (5), 331 (1993).
[4] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками* (М., Наука, 1989).
[5] Э.М. Эпштейн. Изв. вузов. Радиофизика, **24** (10), 1293 (1981).
[6] Ф.Г. Басс, С.В. Крючков, А.И. Шаповалов. ФТП, **29** (1), 19 (1995).
[7] С.В. Крючков, А.П. Шаповалов. Опт. и спектр., **84** (2), 286 (1998).
[8] С.В. Крючков, Г.А. Сыродоев. Изв. вузов. Радиофизика, **33** (12), 1427 (1990).
[9] В.И. Ожогин, В.Л. Преображенский. УФН, **155** (4), 593 (1988).
[10] Э.М Беленов, П.Г. Крюков, А.В. Назаркин, А.Н. Ораевский, А.В. Усков. Письма ЖЭТФ, **47** (9), 442 (1988).
[11] Р. Пантел, Г. Пухтоф. *Основы квантовой электроники* (М., Мир, 1972).
[12] С.В. Сазонов. Письма ЖЭТФ, **53** (8), 400 (1991).

Редактор Т.А. Полянская

Stabilization of soliton shape in the super-lattice with a spectrum exceeding limits of considering ”the nearest neighbors” in the non-linear wave field

S.V. Kruchkov, E.G. Fedorov

The Volgograd State Pedagogical University,
400013 Volgograd, Russia