

Прохождение симметричного светового импульса сквозь широкую квантовую яму

© Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио*, С.Т. Павлов*,**

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

*Escuela de Fisica de la UAZ,

Apartado Postal c-580, 98060 Zacatecas, Mexico

**Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
117924 Москва, Россия

E-mail: ilang@dor.ioffe.rssi.ru, pavlov@ahobon.reduaz.mx

(Поступила в Редакцию 25 октября 2001 г.)

Рассчитаны отражение, прохождение и поглощение симметричного электромагнитного импульса, несущая частота которого близка к частоте межзонного перехода в квантовой яме. Уровни энергии в квантовой яме предполагаются дискретными, учитывается один возбужденный уровень. Рассматривается случай достаточно широкой ямы, когда длина волны импульса, соответствующая несущей частоте, сравнима с шириной ямы и необходимо учитывать зависимость матричного элемента межзонного перехода от волнового вектора света. Учтено различие в показателях преломления вещества квантовой ямы и барьера. Предполагается произвольное соотношение между обратными радиационным и нерадиационным временам жизни возбужденного уровня электронной системы. Учет пространственной дисперсии и различия в показателях преломления сильнее всего влияет на отражение, так как наряду с отражением, связанным с межзональными переходами в самой яме, имеет место дополнительное отражение от границ ямы. По сравнению с ранее рассмотренной моделью наиболее радикальные изменения имеют место в отражении в случае, когда обратное нерадиационное время жизни возбужденного состояния велико по сравнению с обратным радиационным временем жизни.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-02-16904) и программы МНТК „Физика твердотельных наноструктур“ (97-1099). С.Т. Павлов благодарит Университет Закатекаса и Национальный совет Мексики по науке и технологии (CONACyT) за финансовую поддержку и гостеприимство. Д.А. Контрерас-Солорио благодарит CONACyT (27736-E) за финансовую поддержку.

В последнее время в работах [1–7] было исследовано изменение формы светового импульса при его прохождении сквозь квантовую яму. Рассматривались как асимметричный возбуждающий импульс с крутым фронтом [1–3], так и симметричный импульс [4,5]. Предполагалось, что несущая частота возбуждающего импульса ω_l близка к частоте электронного возбуждения ω_0 (двухуровневая система) [1,2,5]. Исследованы также трехуровневая система [7] и система со многими возбужденными состояниями [3,6]. Результаты этих работ справедливы для сравнительно узких квантовых ям, когда выполняется неравенство

$$kd \ll 1, \quad (1)$$

где d — ширина квантовой ямы, k — модуль волнового вектора световой волны, соответствующий несущей частоте симметричного импульса. Фактически параметр kd в упомянутых работах полагался равным нулю, и вычисленные там отражение, поглощение и пропускание не зависели от ширины ямы. Для численной оценки величины k используем длину волны излучения гетеролазера на основе арсенида галлия, равную 0.8μ . Этой длине волны соответствует энергия $\hbar\omega_l = 1.6\text{ eV}$. Если показатель преломления вещества квантовой ямы

$n = 3.5$, то $k = n\omega_l/c = 2.8 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$, где c — скорость света в вакууме. Для ширины ямы $d = 500 \text{ \AA}$ параметр $kd = 1.4$. Таким образом, для достаточно широких ям учет пространственной дисперсии волн, составляющих возбуждающий импульс, может оказаться существенным.

Для широких квантовых ям неравенство $d \gg a_0$ (где a_0 — постоянная решетки) является очень сильным и при описании прохождения импульса сквозь квантовую яму можно использовать уравнения Максвелла для сплошной среды. При таком подходе следует учитывать различие в показателях преломления барьера и ямы. Тогда должно появиться дополнительное отражение от границ квантовой ямы, которое уменьшается с уменьшением параметра kd , но в области $kd \geq 1$ может в некоторых случаях сравниться или превысить отражение, обусловленное резонансными переходами в квантовой яме. Вместе с отражением будет изменяться и прохождение световой волны. Таким образом, наряду с учетом зависимости отражения и прохождения от параметра kd должно быть принято во внимание различие в показателях преломления барьера и квантовой ямы. В настоящей работе учтено влияние этих двух факторов на форму отраженного и прошедшего сквозь квантовую яму светового импульса.

Рассматривается система, состоящая из глубокой полупроводниковой квантовой ямы I типа, расположенной в интервале $0 \leq z \leq d$, и двух полубесконечных барьеров. Предполагается, что возбуждающий световой импульс распространяется вдоль оси z со стороны отрицательных z . Считается также, что барьеры прозрачны для импульса, а в квантовой яме импульс поглощается, вызывая резонансные межзонные переходы. Подразумевается собственный полупроводник и нулевые температуры. В качестве возбужденных состояний учитываются только такие, в которых один электрон перешел из валентной зоны в зону проводимости, в результате чего в валентной зоне образовалась дырка. Предполагается, что $\omega_l \cong \omega_g$ (ширина запрещенной зоны в квантовой яме $E_g = \hbar\omega_g$) и в поглощении участвует малая доля валентных электронов, расположенных вблизи экстремума зоны, для которых справедлив метод эффективной массы. Для глубоких квантовых ям в этом случае можно пренебречь туннелированием электронов в барьер и считать, что в барьере электроны отсутствуют. Кроме того, уровни, расположенные близко к дну ямы, можно рассматривать в приближении бесконечно глубокой ямы. Исследуемая система неоднородна. Поскольку для широких квантовых ям неравенство (1) не выполняется, оптические характеристики такой системы полагаются определять из решения уравнений Максвелла, в которых в качестве плотностей тока и заряда должны фигурировать выражения, следующие из микроскопического рассмотрения [8,9].

Окончательные результаты получены для одного дискретного уровня электронной системы в квантовой яме. Влиянием других уровней на отражение и поглощение света можно пренебречь, если несущая частота ω_l достаточно близка к частоте возбуждения выбранного уровня ω_0 , а остальные уровни расположены достаточно далеко от него. Дискретными уровнями в квантовой яме в случае $\hbar\mathbf{K}_\perp = 0$, где $\hbar\mathbf{K}_\perp$ — вектор суммарного квазиимпульса пары электрон-дырка в плоскости ямы, являются экситонные уровни в нулевом магнитном поле либо уровни в сильном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости ямы. В качестве примера далее рассматривается уровень электронно-дырочной пары в сильном магнитном поле, направленном вдоль оси z , без учета кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой, которое считается слабым возмущением для достаточно сильных магнитных полей и не очень широких ям [10]. Однако экситонный эффект не приводит к принципиальным изменениям полученных результатов, а только влияет на величину обратного радиационного времени жизни γ_r электронного возбуждения в квантовой яме. То же относится и к экситонным уровням в нулевом магнитном поле.

1. Электрическое поле, наведенное проходящим импульсом

Пусть на одиночную квантовую яму со стороны отрицательных z падает симметричный возбуждающий импульс, которому соответствует электрическое поле круговой поляризации

$$\mathbf{E}_0(z, t) = \mathbf{e}_l E_0 \exp(-i\omega_l p) \{ \Theta(p) e^{-\gamma_l p/2} + [1 - \Theta(p)] e^{\gamma_l p/2} \} + \text{с.с.} \quad (2)$$

Здесь E_0 — вещественная амплитуда, $p = t - v_1 z/c$,

$$\mathbf{e}_l = (\mathbf{e}_z \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2} — \quad (3)$$

единичный вектор круговой поляризации, \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — вещественные орты, v_1 — показатель преломления барьера, $\Theta(p)$ — функция Хевисайда, γ_l определяет нарастание и затухание симметричного импульса. Фурье-образ функции $\mathbf{E}_0(z, t)$ имеет вид

$$\mathbf{E}_0(z, \omega) = \exp(i\kappa_1 z) \{ \mathbf{e}_l E_0(\omega) + \mathbf{e}_l^* E_0(-\omega) \}, \quad (4)$$

$$E_0(\omega) = E_0 \gamma_l / [(\omega - \omega_l)^2 + (\gamma_l/2)^2],$$

где $\kappa_1 = v_1 \omega/c$.

В работе [11] решена задача о прохождении монохроматической электромагнитной волны сквозь квантовую яму с учетом ее пространственной дисперсии. Там же было получено выражение для плотности высокочастотного тока, который индуцируется в квантовой яме проходящей волной. Для случая одного возбужденного уровня и круговой поляризации падающих волн плотность тока имеет вид

$$\mathbf{J}(z, t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \mathbf{J}(z, \omega),$$

$$\mathbf{J}(z, \omega) = -\frac{\mathbf{e}_l \gamma_r v \omega}{4\pi} \Phi(z) \left[\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma/2} + \frac{1}{\omega + \omega_0 + i\gamma/2} \right]$$

$$\times \int_0^d dz' A(z', \omega) \Phi(z') + \text{с.с.} = \mathbf{e}_l \mathbf{J}(z, t), \quad (5)$$

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_g + \varepsilon(m_v) + \varepsilon(m_c) + \hbar\Omega_\mu(n + 1/2) \quad (6)$$

есть энергия межзонного перехода, соответствующая выбранному возбужденному состоянию, $\varepsilon(m_c)$ ($\varepsilon(m_v)$) — энергия уровня размерного квантования электрона (дырки) с квантовым числом m_c (m_v), $\Omega_\mu = |e|H/\mu c$ — циклотронная частота, e — заряд электрона, H — напряженность постоянного магнитного поля, $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$, m_e (m_h) — эффективная масса электрона (дырки), n — квантовое число Ландау, γ — обратное нерадикационное время жизни возбужденного состояния. В приближении бесконечно глубокой ямы

$$\Phi(z) = (2/d) \sin(\pi m_c z/d) \sin(\pi m_v z/d). \quad (7)$$

В (5) введено обратное радиационное время жизни γ_r электронно-дырочной пары в магнитном поле при $\kappa d = 0$

$$\gamma_r = (2e^2/\hbar cv)(p_{cv}^2/m_0\hbar\omega_g)(|e|H/m_0c), \quad (8)$$

где m_0 — масса свободного электрона. Введен также скаляр $A(z, \omega)$, связанный с векторным потенциалом в представлении Фурье $\mathbf{A}(z, \omega)$ соотношением

$$\mathbf{A}(z, \omega) = \mathbf{e}_l A(z, \omega) + \mathbf{e}_l^* A(z, -\omega). \quad (9)$$

Формула, аналогичная (9), имеет место и для вектора электрического поля $\mathbf{E}(z, \omega)$. Выражение (5) справедливо для тяжелых дырок в кристаллах со структурой цинковой обманки, если ось z направлена вдоль оси симметрии четвертого порядка [12,13]. Входящая в γ_r вещественная константа p_{cv} связана с межзонным матричным элементом импульса для двух вырожденных зон

$$p_{cv}^{\text{II}} = p_{cv}(\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}.$$

Плотность тока $\bar{\mathbf{J}}_I(z, t)$ удовлетворяет условию $\text{div } \bar{\mathbf{J}}_I(z, t) = 0$ и, следовательно, наведенная плотность заряда $\rho(z, t) = 0$. Тогда можно использовать калибровку $\varphi(z, t) = 0$, где $\varphi(z, t)$ — скалярный потенциал, и

$$\mathbf{E}(z, t) = (-1/c)(\partial \mathbf{A}/\partial t), \quad \mathbf{E}(z, \omega) = (i\omega/c)\mathbf{A}(z, \omega). \quad (10)$$

Поскольку $\mathbf{E}(z, \omega) \sim \mathbf{A}(z, \omega)$, вместо уравнения для $A(z, \omega)$ удобно решать аналогичное уравнение для скаляра $E(z, \omega)$, которое имеет вид

$$d^2 E(z, \omega)/dz^2 + \kappa^2 E(z, \omega) = -(4\pi/c)\bar{\mathbf{J}}(z, \omega), \quad (11)$$

$$\kappa = v\omega/c,$$

в выражении для $\bar{\mathbf{J}}(z, \omega)$ (5) нужно заменить, используя (10), $A(z', \omega)$ на $E(z', \omega)$.

Уравнение (11) является интегродифференциальным. Если формально представить его решение как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, то вместо (11) получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода¹

$$E(z, \omega) = C_1 e^{i\kappa z} + C_2 e^{-i\kappa z} - \frac{i(\gamma_r/2)F(z)}{\omega - \omega_0 + i\gamma/2} \int_0^d dz' E(z', \omega)\Phi(z'), \quad (12)$$

которое справедливо для ω , близких к ω_0 , так как при его выводе в выражении (5) для $\bar{\mathbf{J}}(z, \omega)$ не учитывалось нерезонансное слагаемое $\omega + \omega_0 + i\gamma/2$. Пренебрежение нерезонансным слагаемым эквивалентно неравенству

¹ Подобное уравнение рассматривалось в [14] для инверсионного слоя; в работе [11] получено точное решение уравнения (12) для случая монохроматической возбуждающей волны.

$(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$. Таким образом, теория становится неточной при $\omega - \omega_0 \approx \omega_0$, однако эта область частот расположена очень далеко от резонансной частоты ω_0 и интереса не представляет. Во временном представлении неточность теории проявляется на временах $t \leq t_0 = \omega_0^{-1}$. Если $\hbar\omega_0 = 1.6 \text{ eV}$, то $t_0 = 4 \cdot 10^{-16} \text{ s}$. Произвольные константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий в плоскостях $z = 0$ и $z = d$, а функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = e^{i\kappa z} \int_0^z dz' e^{-i\kappa z'} \Phi(z') + e^{-i\kappa z} \int_z^d dz' e^{i\kappa z'} \Phi(z'). \quad (13)$$

Если $\gamma_r \ll \gamma$, то в уравнении (12) интегральный член можно считать малым возмущением и тогда достаточно учесть первое приближение по интегральному члену. Радиационное уширение уровней энергии в квазидвумерных системах возникает в результате нарушения трансляционной симметрии в направлении, перпендикулярном плоскости квантовой ямы [15,16]. В случае ямы высокого качества рассеяние на неоднородностях границ ямы может вносить малый вклад в нерезонансное уширение уровня. То же относится и к рассеянию на фонах и примесях при низких температурах и малой концентрации примеси. В результате может оказаться, что $\gamma_r \geq \gamma$. В этом случае при решении (12) нельзя ограничиться первой итерацией, а нужно суммировать весь итерационный ряд. Можно показать [11], что этот ряд сводится к геометрической прогрессии и решение записывается в виде

$$E(z, \omega) = C_1 e^{i\kappa z} + C_2 e^{-i\kappa z} - \frac{i(\gamma_r/2)F(z)}{\omega - \omega_0 + i(\gamma + \gamma_r \varepsilon)/2} \times \int_0^d dz' (C_1 e^{i\kappa z'} + C_2 e^{-i\kappa z'}) \Phi(z'). \quad (14)$$

Комплексная величина ε

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \int_0^d dz' \Phi(z') F(z') \quad (15)$$

определяет изменение уширения и сдвиг уровня, которые появляются вследствие пространственной дисперсии волны. В предельном случае $\kappa d = 0$ $\varepsilon = \delta_{m_c m_v}$. В барьерах, где наведенный ток отсутствует, вместо (11) справедливо уравнение

$$d^2 E(z, \omega)/dz^2 + \kappa_1^2 E(z, \omega) = 0, \quad (16)$$

$$z \leq 0, \quad z \geq d, \quad \kappa_1 = v_1 \omega/c.$$

решение которого представляется в виде

$$E^l(z, \omega) = E_0(\omega) e^{i\kappa_1 z} + C_R e^{-i\kappa_1 z}, \quad (17)$$

$$z \leq 0; \quad E^r(z, \omega) = C_T e^{i\kappa_1 z}, \quad z \geq d.$$

Первый член в выражении для $E^l(z, \omega)$ есть скалярная амплитуда фурье-образа возбуждающего импульса, C_R определяет амплитуду отраженной, C_T — амплитуду прошедшей сквозь яму волны. Коэффициенты C_1, C_2, C_R и C_T , являющиеся функциями частоты ω , определяются из условий непрерывности $E(z, \omega)$ и $dE(z, \omega)/dz$ на границах $z = 0$ и $z = d$. В результате получаем, что

$$\begin{aligned} C_1 &= (2E_0(\omega)/\Delta)e^{-i\kappa d}[1 + \xi + (1 - \xi)\mathcal{M}], \\ C_2 &= -(2E_0(\omega)/\Delta)(1 - \xi)[e^{i\kappa d} + \mathcal{M}], \\ C_R &= E_0(\omega)\rho/\Delta, \\ C_T &= 4E_0(\omega)\xi e^{-i\kappa d}[1 + e^{-i\kappa d}\mathcal{M}]/\Delta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (\xi + 1)^2 e^{-i\kappa d} - (\xi - 1)^2 e^{i\kappa d} \\ &\quad - 2(\xi - 1)\mathcal{M}[(\xi + 1)e^{-i\kappa d} + \xi - 1], \\ \rho &= 2i(\xi^2 - 1)\sin \kappa d + 2[(\xi^2 + 1)e^{-i\kappa d} + \xi^2 - 1]\mathcal{M}. \end{aligned} \quad (19)$$

В (18) и (19) введены следующие обозначения:

$$\xi = \kappa/\kappa_1 = v/v_1, \quad (20)$$

$$\mathcal{M} = -i(\gamma_r/2)F^2(0)/[\omega - \omega_0 + i(\gamma + \gamma_r\varepsilon)/2], \quad (21)$$

функция $E_0(\omega)$ определяется формулой (4). Из выражений (13) и (15) следует, что в случае $m_c = m_v = m$ (разрешенный межзонный переход в пределе $\kappa d = 0$) функции $F(z)$ и ε равны

$$\begin{aligned} F(z) &= iB[2 - \exp(i\kappa z) - \exp(i\kappa(d - z)) \\ &\quad - (\kappa d/\pi m)^2 \sin^2(\pi m z/d)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} F(0) &= F(d) = iB[1 - \exp(i\kappa d)], \\ B &= (4\pi^2 m^2/\kappa d)/[4\pi^2 m^2 - (\kappa d)^2], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= F^2(0)\exp(-i\kappa d) = 4B^2 \sin^2(\kappa d/2), \\ \varepsilon'' &= 2B[1 - B \sin \kappa d - 3(\kappa d)^2/8\pi^2 m^2]. \end{aligned} \quad (24)$$

В представлении Фурье вектор электрического поля $\mathbf{E}^r(z, \omega)$ справа от квантовой ямы, согласно (17), имеет вид

$$\mathbf{E}^r(z, \omega) = \exp(i\kappa_1 z)[\mathbf{e}_l C_T(\omega) + \mathbf{e}_l^* C_T(-\omega)], \quad z \geq d, \quad (25)$$

а вектор поля слева от ямы $\mathbf{E}^l(z, \omega)$, включающий в себя поле возбуждающего импульса (4) и поле отраженной волны $\Delta\mathbf{E}^l(z, \omega)$, равен

$$\mathbf{E}^l(z, \omega) = \mathbf{E}_0(z, \omega) + \Delta\mathbf{E}^l(z, \omega), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E}^l(z, \omega) &= \exp[-(i\kappa_1 z)] \\ &\quad \times [\mathbf{e}_l C_R(\omega) + \mathbf{e}_l^* C_R(-\omega)], \quad z \geq d. \end{aligned} \quad (27)$$

2. Переход к временному представлению

Во временном представлении вектор электрического поля прошедшего сквозь квантовую яму импульса согласно (17), представляется в виде ($p = t - z v_1/c$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^r(z, t) &= \mathbf{e}_l \mathbf{E}^r(z, t) + \text{с.с.}, \\ E^r(z, t) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega p) C_T(\omega), \quad z \geq d. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично вектор поля отраженного от ямы импульса равен

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E}^l(z, t) &= \mathbf{e}_l \Delta\mathbf{E}^l(z, t) + \text{с.с.}, \\ \Delta E^l(z, t) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega s) C_R(\omega), \quad z \leq d. \end{aligned} \quad (29)$$

где $s = t + z v_1/c$, а функция $C_T(\omega)$ и $C_R(\omega)$ после подстановки в (18) $E_0(\omega)$ из (4) и $\mathcal{M}(\omega)$ из (21) принимают вид

$$\begin{aligned} C_T(\omega) &= \frac{4E_0\gamma_l\xi \exp(-i\kappa_1 d)}{\mathcal{D}\mathcal{O}} \\ &\quad \times \frac{\omega - \omega_0 - \gamma_r\varepsilon''/2 + i\gamma/2}{(\omega - \omega_l)^2 + (\gamma_l/2)^2}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} C_R(\omega) &= \frac{E_0\gamma_l}{\mathcal{L}\mathcal{O}} \\ &\quad \times \frac{\mathcal{B}[\omega - \omega_0 - \gamma_r\varepsilon''/2 + i(\gamma + \gamma_r\varepsilon')/2] - i\mathcal{B}_1\gamma_r\varepsilon'/2}{(\omega - \omega_l)^2 + (\gamma_l/2)^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\mathcal{O} = \omega - \omega_0 - \gamma_r\mathcal{F}_1/2 + i(\gamma + \gamma_r\mathcal{F}_2)/2, \quad (32)$$

$$\mathcal{L} = (1 + \xi)^2 \exp(-i\kappa d) - (1 - \xi)^2 \exp(i\kappa d), \quad (33)$$

$$\mathcal{B} = -2i(1 - \xi^2) \sin \kappa d, \quad (34)$$

$$\mathcal{B}_1 = 2[1 + \xi^2 - (1 - \xi^2) \exp(i\kappa d)], \quad (34)$$

$$\mathcal{F}_1 = \varepsilon'' - \frac{2\varepsilon'(1 - \xi^2) \sin \kappa d}{1 + \xi^2 + (1 - \xi^2) \cos \kappa d},$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{2\xi\varepsilon'}{1 + \xi^2 + (1 - \xi^2) \cos \kappa d}. \quad (35)$$

В интегралах (28) и (29) полюсами подынтегральных функций являются $\omega = \omega_l \pm i\gamma_l/2$, а также полюс в нижней полуплоскости ω , определяемый уравнением $\mathcal{O} = 0$. Строго говоря, входящие в \mathcal{O} (см. (32)) функции \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 зависят от ω , так как от ω зависит модуль волнового вектора $\kappa = v\omega/c$. Однако в силу сделанных при выводе формулы (12) предположений ω не должна сильно отличаться от частоты ω_0 , и при решении уравнения $\mathcal{O} = 0$ достаточно ограничиться первой итерацией. В результате получаем следующее значение полюса в нижней полуплоскости:

$$\omega = \omega_0 - \gamma_r\mathcal{F}_1(\omega_0) - i(\gamma + \gamma_r\mathcal{F}_2(\omega_0))/2. \quad (36)$$

При использовании приближенного значения полюса (36) получим, что

$$\kappa = \kappa_0 = v\omega_0/c, \quad \kappa_1 = \kappa_{10} = v_1\omega_0/c. \quad (37)$$

С другой стороны, полюсы $\omega = \omega_l \pm i\gamma_l/2$ приводят к $\kappa = \kappa_l = v\omega_l/c$, $\kappa_1 = \kappa_{1l} = v_1\omega_l/c$. Поскольку теория справедлива при выполнении неравенства $(\omega_l - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$, в дальнейшем считаем, что $\kappa_l = \kappa_0 = \kappa$, $\kappa_{1l} = \kappa_{10} = \kappa_1$.

После интегрирования по ω скалярные функции $E^r(z, t)$ и $\Delta E^l(z, t)$ принимают вид

$$E^r(z, t) = (4\xi E_0/\mathcal{L}) \exp(-i(\omega_l p + \kappa_1 d)) \times \{[1 - \Theta(p)] \exp(\gamma_l p/2) W_T(\gamma_l) + \Theta(p) \epsilon_T\}, \quad (38)$$

$$\Delta E^l(z, t) = (E_0/\mathcal{L}) \exp(-i\omega_l s) \times \{[1 - \Theta(s)] \exp(\gamma_l s/2) W_R(\gamma_l) + \Theta(s) \epsilon_R\}, \quad (39)$$

где функции ϵ_T и ϵ_R представляются единой формулой

$$\epsilon_{T(R)} = e^{-\gamma_l p(s)/2} W_{T(R)}(-\gamma_l) - e^{i(\Delta\omega - \gamma_r \mathcal{F}_1/2)p(s)} \times W'_{T(R)} e^{-(\gamma + \gamma_r \mathcal{F}_2)p(s)/2}. \quad (40)$$

В (38)–(40) введены следующие обозначения:

$$\Delta\omega = \omega_l - \omega_0, \quad (41)$$

$$W_T(\gamma_l) = [\Delta\omega - \gamma_r \epsilon''/2 + i(\gamma + \gamma_l)/2]/\Omega(\gamma_l), \quad (42)$$

$$W_R(\gamma_l) = \{\mathcal{B}[\Delta\omega - \gamma_r \epsilon''/2 + i(\gamma + \gamma_l + \gamma_r \epsilon')/2] - i\gamma_r \epsilon' \mathcal{B}_1/2\}/\Omega(\gamma_l), \quad (43)$$

$$W'_T = -i(\gamma_r/2)[\mathcal{F}_2 - i(\epsilon'' - \mathcal{F}_1)] \left(\frac{1}{\Omega(-\gamma_l)} - \frac{1}{\Omega(\gamma_l)} \right), \quad (44)$$

$$W'_R = -i(\gamma_r/2)\{\mathcal{B}[\epsilon' - \mathcal{F}_2 + i(\epsilon'' - \mathcal{F}_1)] + \epsilon' \mathcal{B}_1\} \times \left(\frac{1}{\Omega(-\gamma_l)} - \frac{1}{\Omega(\gamma_l)} \right), \quad (45)$$

$$\Omega(\gamma_l) = \Delta\omega - \gamma_r \mathcal{F}_1/2 + i(\gamma + \gamma_l + \gamma_r \mathcal{F}_2)/2. \quad (46)$$

Заметим, что учет зависимости κ от ω приводит к замене в выражении для $E^r(z, t)$ (38) переменной p на $p' = p + t_1$, где $t_1 = v_1 d/c$ соответствует времени, за которое свет проходит квантовую яму. Таким образом, учет зависимости κ от ω сказывается только в случае $p \leq t_1$. Если $d = 500 \text{ \AA}$, $v_1 = 3$, то $t = 5 \cdot 10^{-16} \text{ с} \cong t_0$. Поскольку $t_1 \cong t_0$, учет зависимости κ от ω при вычислении интегралов (28) и (29) является превышением точности, так как приводит к поправкам того же порядка, которые не учитывались при выводе формулы (12). Полученные выражения для $E^r(z, t)$ и $E^l(z, t)$ довольно громоздки, и их аналитическое исследование затруднено. Поэтому представляют интерес два предельных случая, когда

эти выражения существенно упрощаются. Если среда однородна, т.е. $v_1 = v$, то

$$\kappa_1 = \kappa, \quad \mathcal{L} = 4 \exp(-ikd),$$

$$\mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{B}_1 = 4, \quad \mathcal{F}_1 = \epsilon'', \quad \mathcal{F}_2 = \epsilon'$$

и выражения (38) и (39) переходят в

$$E^r(z, t) = E_0(z, t) + \Delta E^r(z, t) = E_0(z, t) - E_0(i\gamma_r \epsilon'/2) \exp(-i\omega_l p) \times \{[1 - \Theta(p)] \exp(\gamma_l p/2)/\Omega(\gamma_l) + \Theta(p) \epsilon\}, \quad (47)$$

$$\Delta E^l(z, t) = -E_0(i\gamma_r \epsilon'/2) \exp(-i(\omega_l s - \kappa d)) \times \{[1 - \Theta(s)] \exp(\gamma_l s/2)/\Omega(\gamma_l) + \Theta(s) \epsilon\}, \quad (48)$$

где функция $\Omega(\gamma_l)$, определенная в (46), превращается в

$$\Omega(\gamma_l) = \Delta\omega - \gamma_r \epsilon''/2 + i(\gamma + \gamma_l + \gamma_r \epsilon')/2, \quad (49)$$

а функция (40) принимает вид

$$\epsilon = \exp(-\gamma_l t/2)/\Omega(-\gamma_l) - \exp[i(\Delta\omega - \gamma_r \epsilon''/2)t] \times \exp[-(\gamma + \gamma_r \epsilon')t/2] \{\Omega(-\gamma_l)^{-1} - \Omega(\gamma_l)^{-1}\}. \quad (50)$$

Для E^r параметр $t = p$, для ΔE^l $t = s$. Функция $\Delta E^r(z, t)$ определяет искажение прошедшего сквозь яму возбуждающего импульса.

Из (47) и (48) видно, что учет пространственной дисперсии в случае однородной среды приводит к сдвигу частоты ω_0 на величину $\gamma_r \epsilon''/2$ и к замене γ_r на $\tilde{\gamma}_r = \gamma_r \epsilon'$. Величина $\tilde{\gamma}_r$ совпадает с вычисленным в [3,7] обратным радиационным временем жизни электронно-дырочной пары в сильном магнитном поле при $\mathbf{K}_\perp = 0$ в случае произвольной величины κd . Если пространственную дисперсию не учитывать, т.е. считать, что $\kappa d = 0$, то, согласно (24), $\epsilon' \rightarrow 1$, $\epsilon'' \rightarrow 0$ и формулы (47) и (48) переходя в выражения, полученные в [5] для случая однородной среды и отсутствия пространственной дисперсии. Формулы (47) и (48) совпадают с аналогичными выражениями, полученными в работе [5] (формула (15)), если там под частотой перехода ω_0 понимать $\omega_0 + \gamma_r \epsilon''/2$, а под γ_r — величину $\tilde{\gamma}_r$. Представляет также интерес предельный случай слабой пространственной дисперсии, когда $\kappa d \rightarrow 0$, но среда неоднородна, т.е. $v_1 \neq v$. Это может иметь место для сравнительно узких квантовых ям. Полагая в формулах (38) и (39) $\kappa d = 0$, получим, что $\mathcal{L} = 4\xi$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{B}_1 = 4\xi^2$, $\mathcal{F}_2 = 0$, $\mathcal{F}_2 = \xi$ и

$$\Delta E^r(z, t) = (-iE_0 \gamma_r \xi/2) \exp(-i\omega_l p) \times \{[1 - \Theta(p)] \exp(\gamma_l p/2)/\Omega(\gamma_l) + \epsilon'(p) \Theta(p)\}, \quad (51)$$

$$\epsilon'(p) = \exp(-\gamma_l p/2)/\Omega(-\gamma_l) - \exp[i\Delta\omega p - (\gamma + \gamma_r \xi)p/2] (\Omega(-\gamma_l)^{-1} - \Omega(\gamma_l)^{-1}). \quad (52)$$

В данном случае

$$\Omega(\gamma_l) = \Delta\omega + i(\gamma + \gamma_l + \gamma_r \xi/2), \quad (53)$$

а $\Delta E^l(z, t)$ отличается от (51) заменой p на s . Видно, что неоднородность среды без учета пространственной дисперсии приводит только к замене γ_r на $\gamma_r \xi$, т.е. к замене в выражении (8) для γ_r v на v_1 . Формулы (51) и (52) совпадают с полученными в [5], если γ_r там заменить на $\xi \gamma_r$. Поскольку в реальных системах $\xi \cong 1$, изменения, вносимые только неоднородностью среды, невелики. Предельный переход $\gamma_l \rightarrow 0$ означает переход к монохроматической возбуждающей волне. В этом предельном случае формулы (38) и (39) сводятся к выражениям, полученным в [11].

3. Отражение и пропускание возбуждающего импульса

Поток энергии $\mathbf{S}(p)$, соответствующий электрическому полю возбуждающего импульса, равен

$$\mathbf{S}(p) = (\mathbf{e}_z/4\pi)(c/v_1)(\mathbf{E}_0(z, t))^2 = \mathbf{e}_z S_0 P(p), \quad (54)$$

где $S_0 = cE_0^2/(2\pi v_1)$, \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении z . Безразмерная функция $P(p)$ определяет пространственную и временную зависимость потока энергии возбуждающего импульса,

$$P(p) = (\mathbf{E}_0(z, t))^2/S_0 = \Theta(p)e^{-\gamma p} + [1 - \Theta(p)]e^{\gamma p}. \quad (55)$$

Проходящий поток, т.е. поток справа от ямы, по аналогии с (54) имеет вид

$$\mathbf{S}^r(z, t) = (\mathbf{e}_z/4\pi)(c/v_1)(\mathbf{E}^r(z, t))^2 = \mathbf{e}_z S_0 \mathcal{T}(p). \quad (56)$$

Для отраженного потока (слева от квантовой ямы) получаем

$$\mathbf{S}^l = -(\mathbf{e}_z/4\pi)(c/v_1)(\Delta \mathbf{E}^l(z, t))^2 = -\mathbf{e}_z S_0 \mathcal{R}(s). \quad (57)$$

Безразмерные функции $\mathcal{T}(p)$ и $\mathcal{R}(s)$ определяют доли прошедшей и отраженной энергии возбуждающего импульса.

Определим по аналогии с [5] поглощенный поток энергии \mathbf{S}^a как разность входящего в квантовую яму потока слева $\mathbf{S} + \mathbf{S}^l$ при $z = 0$ и выходящего из ямы потока справа \mathbf{S}^r при $z = d$ в один и тот же момент времени t

$$\mathbf{S}^a(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^l(t) - \mathbf{S}^r(t). \quad (58)$$

Используя определения (54)–(58), представим $\mathbf{S}^a(t)$ в виде

$$\mathbf{S}^a(t) = \mathbf{e}_z S_0 [P(t) - \mathcal{R}(t) - \mathcal{T}(t)]. \quad (59)$$

Определяя долю поглощенной энергии $\mathcal{A}(t)$ равенством $\mathbf{S}^a(t) = \mathbf{e}_z S_0 \mathcal{A}(t)$, получим

$$\mathcal{A}(t) = P(t) - \mathcal{R}(t) - \mathcal{T}(t). \quad (60)$$

Формулу (60) можно обобщить, если отодвинуть плоскости, в которых наблюдаются потоки, на расстояние $z = -z_0$ слева от ямы и на z_0 справа от ямы ($z_0 > 0$). Тогда вместо (60) получим

$$\mathcal{A}(x) = P(x) - \mathcal{R}(x) - \mathcal{T}(x), \quad (61)$$

где $x = p = s = t - v_1|z_0|/c$. Выражения для величин \mathcal{T} , \mathcal{R} и \mathcal{A} , которые определяются скалярами $E^r(z, t)$ и $\Delta E^l(z, t)$ по общим формулам (38) и (39), здесь не приводятся ввиду их чрезвычайной громоздкости. Величины $P(t)$, $\mathcal{T}(t)$ и $\mathcal{R}(t)$ всегда положительны, $\mathcal{A}(t)$ может быть любого знака. Отрицательное поглощение в некоторый момент времени t означает, что электронная система квантовой ямы отдает энергию, накопленную в предыдущие моменты времени.

4. Временная зависимость отражения, пропускания и поглощения в случае точного резонанса $\omega_l = \omega_0$

Рассмотрим сначала предельный случай $\gamma \gg \gamma_r$. Тогда поля $\mathbf{E}^r(z, t)$ и $\Delta \mathbf{E}^l(z, t)$ из (38) и (39) можно представить в виде разложения в ряд

$$\mathbf{E}^r(z, t) = \mathbf{E}_0^r(z, t) + (\gamma_r/\gamma)\mathbf{E}_1^r(z, t) + \dots, \quad (62)$$

$$\Delta \mathbf{E}^l(z, t) = \Delta \mathbf{E}_0^l(z, t) + (\gamma_r/\gamma)\Delta \mathbf{E}_1^l(z, t) + \dots \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^r(z, t) &= \mathbf{e}_l(4\xi E_0/\mathcal{L}) \exp[-i(\omega_l p + \kappa_1 d)] \{ [1 - \Theta(p)] \\ &\times \exp(\gamma_l p/2) + \Theta(p) \exp(-\gamma_l p/2) \} + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}_0^l(z, t) &= -\mathbf{e}_l(\mathcal{B} E_0/\mathcal{L}) \exp(-i\omega_l s) \{ [1 - \Theta(p)] \\ &\times \exp(\gamma_l s/2) + \Theta(s) \exp(-\gamma_l s/2) \} + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (65)$$

соответствуют прошедшему и отраженному импульсам при $\gamma_r = 0$, т.е. когда поглощение в квантовой яме отсутствует.

В предельных случаях $\kappa d \neq 0$, $\xi = 1$ или $\kappa d = 0$, $\xi \neq 1$ $\Delta E_0^l(z, t) = 0$, так как согласно (34), $\mathcal{B} = 0$. В первом случае это связано с тем, что среда становится однородной, во втором — с тем, что вещества в квантовой яме становится очень мало и проходящая волна на него не реагирует. В этих предельных случаях, как это следует из (57), $\mathcal{R}(t) \sim (\gamma_r/\gamma)^2$, т.е. является малой величиной. При переходе к общему случаю $\kappa d \neq 0$, $\xi \neq 1$ $\mathcal{R}(t)$ принимает вид

$$\mathcal{R}(t) = S_0^{-1} [(\Delta \mathbf{E}_0^l(s))^2 + 2(\gamma_r/\gamma)(\Delta \mathbf{E}_0^l(s)\Delta \mathbf{E}_1^l(s))], \quad (66)$$

что приводит к существенному увеличению отражения за счет первого слагаемого в (66). Что касается пропускания $\mathcal{T}(t)$, то в предельных случаях $\kappa d = 0$ или $\xi = 1$ $\mathcal{T}(t) = P(t)$. При переходе к общему случаю пропускание изменяется слабо, так как множитель $16\xi^2/|\mathcal{L}|^2$ и здесь не слишком сильно отличается от единицы.

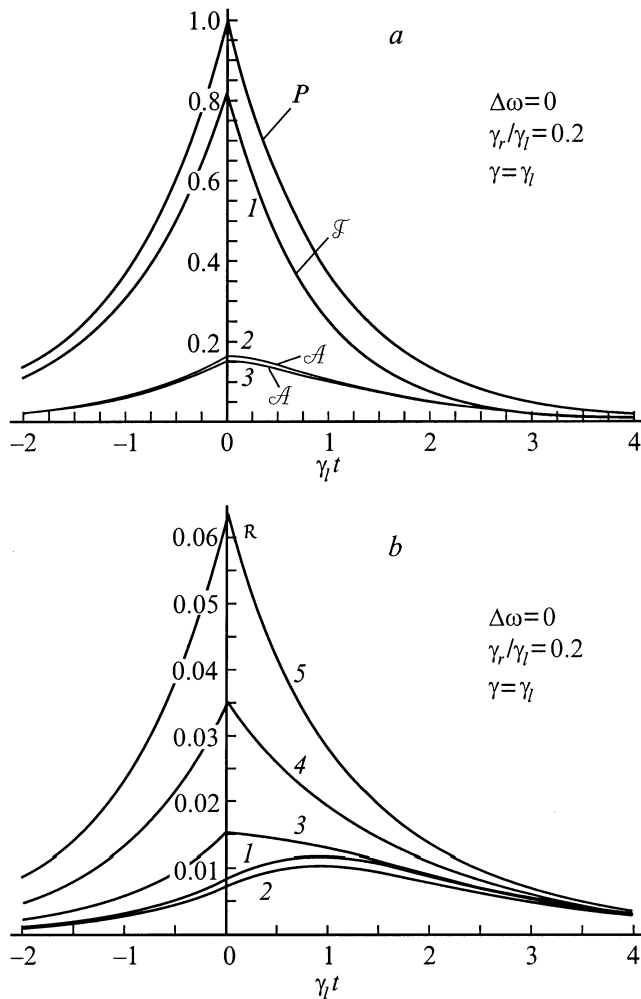


Рис. 1. Пропускание \mathcal{T} , поглощение \mathcal{A} и отражение \mathcal{R} симметричного возбуждающего импульса P как функция безразмерного времени $\gamma_l t$. Случай точного резонанса, $\gamma_r \ll \gamma$. *a*) 1 — $\xi = 1, kd = 0$ и $\xi = 1.1, kd = 1.5$; 2 — $\xi = 1, kd = 0$; 3 — $\xi = 1.1, kd = 1.5$. *b*) 1 — $\xi = 1, kd = 0$; 2 — $\xi = 1, kd = 1.5$; 3 — $\xi = 1.1, kd = 1.5$; 4 — $\xi = 1.2, kd = 1.5$; 5 — $\xi = 1.3, kd = 1.5$.

На рис. 1 представлены временные зависимости безразмерных пропускания \mathcal{T} , поглощения \mathcal{A} и отражения \mathcal{R} для разных значений параметров kd и ξ . Из рис. 1, *a* видно, что кривые $\mathcal{T}(t)$ практически совпадают для значений $kd = 0, \xi = 1$ и $kd = 1.5, \xi = 1.1$. То же имеет место для поглощения $\mathcal{A}(t)$. Как следует из рис. 1, *b*, отражение, являясь малой величиной, существенно зависит от параметра ξ для $kd = 1.5$: при изменении ξ от 1 до 1.3 $\mathcal{R}(t)$ возрастает в 8 раз.

В предельном случае $\gamma_r \gg \gamma$ наведенные поля сравнимы по величине с полем возбуждающего импульса, поэтому форма прошедшего сквозь квантовую яму импульса меняется очень сильно. Это видно из рис. 2, где пропускание мало, а преобладающим является отражение \mathcal{R} . В работе [5] было введено понятие особых точек на временных кривых \mathcal{T}, \mathcal{A} и \mathcal{R} . В частности, одна из этих точек (точка полного отражения первого типа)

определялась условием $\mathcal{R}(t_0) = P(t_0), \mathcal{T}(t_0) = \mathcal{A}(t_0) = 0$ (рис. 2, *a*). Если учесть, что $\xi \neq 1, kd \neq 0$ (рис. 2, *b*), то в точке полного отражения имеет место другое условие: $\mathcal{T}(t_0) + \mathcal{A}(t_0) = 0, \mathcal{R}(t_0) = P(t_0)$. Это означает, что $\mathcal{A}(t) < 0$, т.е. приходит генерация излучения, которое было накоплено системой в более ранние моменты времени. Возникшая при переходе к общему случаю особая точка согласно классификации [5], есть особая точка полного отражения второго типа. Отметим также, что пропускание, показанное на рис. 2, *b* в несколько раз больше приведенного на рис. 2, *a*, т.е. и в этом случае неоднородность среды и пространственная дисперсия сильно влияют только на малые величины, которой в данном предельном случае является $\mathcal{T}(t)$.

5. Отклонение несущей частоты от резонансной

В работе [5] было показано, что отклонение $\Delta\omega$ несущей частоты от резонансной приводит к осцилляциям величин $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{R}(t)$ во времени. Однако осцилляции

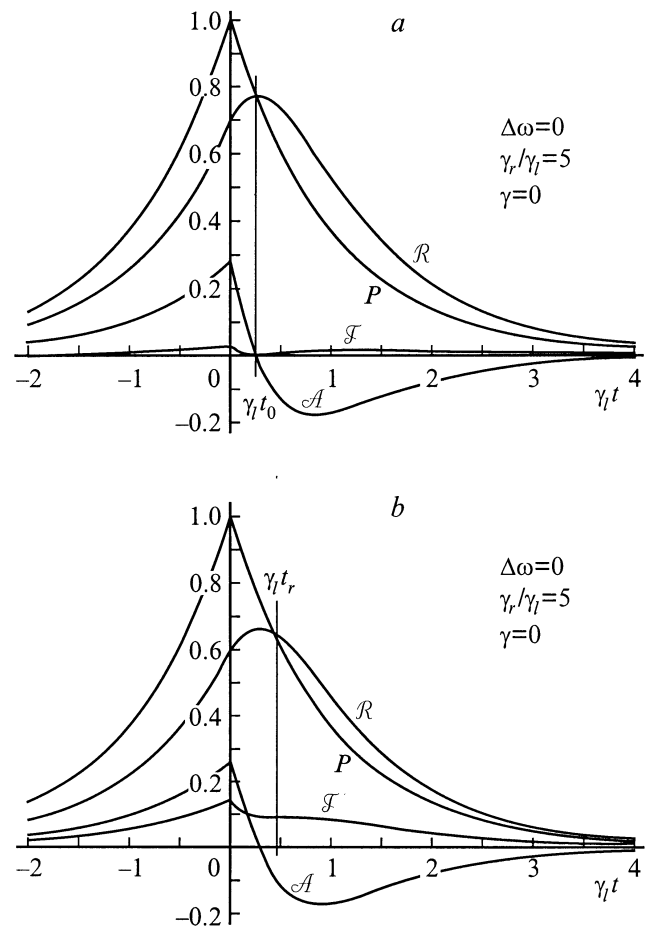


Рис. 2. Временная зависимость $P, \mathcal{R}, \mathcal{A}$ и \mathcal{T} в случае точного резонанса, $\gamma_r \gg \gamma$. *a* — $\xi = 1, kd = 0$; *b* — $\xi = 1.1, kd = 1.5$. $\gamma_l t$ и $\gamma_l t_r$ — особые точки полного отражения первого и второго типа соответственно.

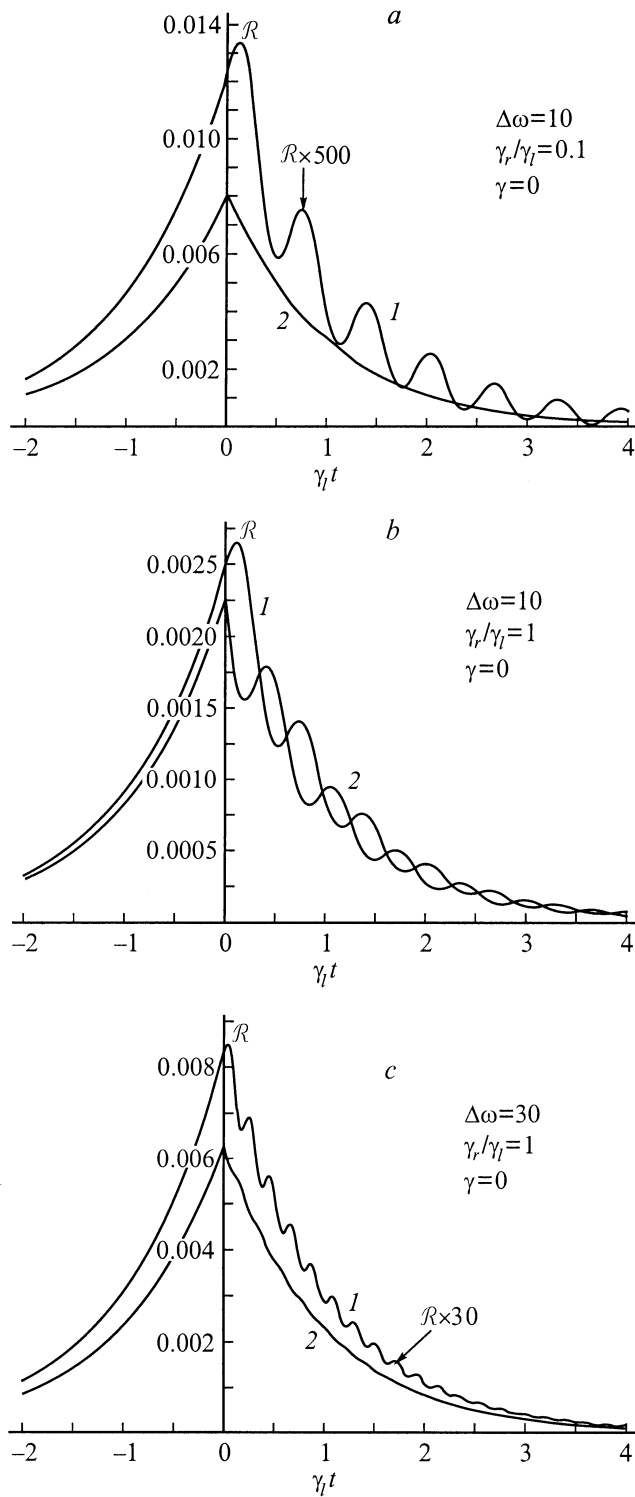


Рис. 3. Временная зависимость отражения в случае отклонения несущей частоты от резонансной для $\gamma = 0$ и $\Delta\omega = 10$, $\gamma_r/\gamma_l = 0.1$ (a); $\Delta\omega = 10$, $\gamma_r/\gamma_l = 1$ (b); $\Delta\omega = 30$, $\gamma_r/\gamma_l = 1$ (c). 1 — $\xi = 1$, $\kappa d = 0$; 2 — $\xi = 1.1$, $\kappa d = 1.5$.

были различимы только для малых значений этих величин. С другой стороны, учет неоднородности среды и пространственной дисперсии приводит к появлению дополнительного отражения от границ квантовой ямы,

которое может превысить осциллирующую составляющую $\mathcal{R}(t)$. На рис. 3 приведены примеры влияния неоднородности среды и пространственной дисперсии световой волны на функцию $\mathcal{R}(t)$. Наиболее значительные изменения имеют место в случае $\gamma_r/\gamma_l \ll 1$, т.е. для короткого возбуждающего импульса. Как видно из рис. 3, a, значение $\mathcal{R}(0)$ увеличивается по сравнению со случаем $\xi = 1$, $\kappa d = 0$ более чем в 300 раз, осцилляции здесь неразличимы ввиду их малой амплитуды. Для промежуточного случая $\gamma_r = \gamma_l$ (рис. 3, b) изменения невелики и осцилляции на кривой, соответствующей $\xi = 1.1$, $\kappa d = 1.5$, хорошо видны. В случае, показанном на рис. 3, c, отражение $\mathcal{R}(0)$ увеличивается в 22 раза, осцилляции еще различимы. Что касается поглощения, то осциллирующие кривые $\mathcal{A}(t)$ слабо изменяются при переходе к неоднородной среде. Это объясняется тем, что поглощение обусловлено квантовыми переходами в квантовой яме, которые слабо зависят от показателя преломления.

На рис. 4 приведены кривые $\mathcal{R}(t)$ для случая $\gamma_r \gg \gamma_l$ (длинный возбуждающий импульс), когда $\Delta\omega \neq 0$, но осцилляции отражения практически незаметны. Из рис. 4 следует, что учет только пространственной дисперсии уменьшает отражение по сравнению со случаем $\kappa d = 0$. Это объясняется уменьшением эффективного обратного радиационного времени жизни $\gamma_r \varepsilon'$, так как ε' есть убывающая функция параметра κd . Переход к неоднородной среде приводит к росту отражения, тем большему, чем больше параметр ξ .

Общий вывод, который можно сделать на основе полученных результатов, заключается в том, что учет неоднородности среды и пространственной дисперсии плоских волн, составляющих возбуждающий импульс, сильнее всего влияет на отражение. Изменения наиболее значительны в том случае, когда отражение, связанное с межзонными переходами в квантовой яме, мало и маскируется более сильным отражением от границ ямы.

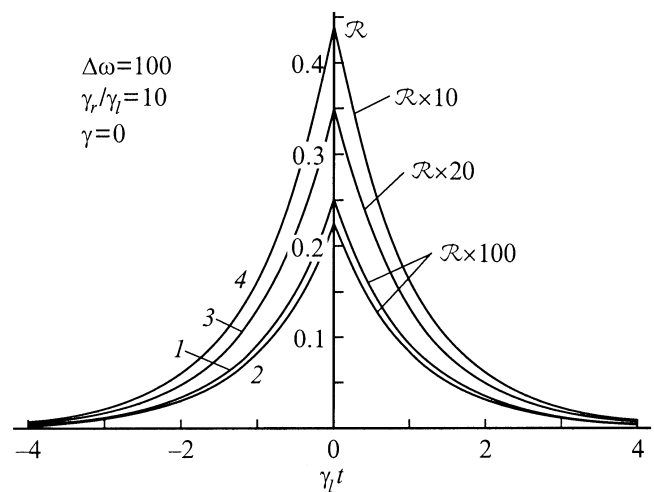


Рис. 4. Отражение в случае сильного отклонения несущей частоты от резонансной. 1 — $\xi = 1$, $\kappa d = 0$; 2 — $\xi = 1.1$, $\kappa d = 1.5$; 3 — $\xi = 1.2$, $\kappa d = 1.5$; 4 — $\xi = 1.3$, $\kappa d = 1.5$.

Это имеет место в предельном случае $\gamma \gg \gamma_r$ (выше это было продемонстрировано для точного резонанса $\Delta\omega = 0$) и при отклонении несущей частоты от резонансной в другом предельном случае $\gamma \ll \gamma_r$. Следует отметить также зависимость отражения от параметра ν/ν_1 , которая усиливается за счет отражения от границ ямы. Изменение пропускания также имеет место только в том случае, если \mathcal{F} мало.

В реальных полупроводниковых гетероструктурах примесные электроны барьера перетекают в квантовую яму, искажая вблизи границ ее прямоугольную форму. Поэтому развитая выше теория справедлива для случая достаточно чистых веществ и широких ям, когда размер искаженных приграничных областей мал по сравнению с шириной ямы. Кроме того, теория справедлива для глубоких квантовых ям, положение первых уровней в которых и соответствующие им волновые функции мало отличаются от положения уровней и волновых функций в бесконечно глубокой яме. Поскольку в теории учтен только один возбужденный уровень, соседние уровни в яме должны быть расположены на расстояниях, превышающих ширину рассматриваемого уровня, а ширина по энергии возбуждающего импульса должна быть меньше по сравнению с расстояниями между соседними уровнями. Эти требования налагают ограничение сверху на ширину ямы. Например, для $d = 500 \text{ \AA}$ и $m_c = 0.06m_0$ разность двух низших уровней размерного квантования $\cong 10^{-3} \text{ eV}$.

Список литературы

- [1] I.G. Lang, V.I. Belitsky, M. Gardona. Phys. Stat. Sol. (a) **164**, 1, 307 (1997).
- [2] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Solid. State Commun. **107**, 10, 577 (1998).
- [3] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Phys. Lett. **A245**, 3–4, 329 (1998).
- [4] D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov, L.I. Korovin, I.G. Lang. Phys. Rev. **B62**, 23, 16 815 (2000); Cond-mat/0002229.
- [5] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **42**, 12, 2230 (2000); Cond-mat/0006364.
- [6] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, 6, 117 (2001); Cond-mat/0004178.
- [7] I.G. Lang, L.I. Korovin, D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov. Cond-mat/0001248.
- [8] C.V. Duke. Phys. Rev. **168**, 816 (1968).
- [9] А.Я. Шик. ФТТ **12**, 1, 67 (1970).
- [10] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, 3, 1167 (1980).
- [11] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, 11, 2091 (2001); Cond-mat/0104262.
- [12] J.M. Luttinger, W. Kohn. Phys. Rev. **97**, 869 (1955).
- [13] И.М. Цидильковский. Зонная структура полупроводников. Наука, М. (1978).
- [14] Л.И. Коровин, Б.Э. Эшпулатов. ФТТ **21**, 12, 3703 (1979).
- [15] L.C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. Solid State Commun. **77**, 11, 641 (1991).
- [16] L.C. Andreani. In: Confined Electrons and Photons / Ed. E. Burstein, C. Weisbuch. Plenum Press, N.Y. (1995). P. 57.