

## Вихри и магнитные структуры типа "мишени" в двумерном ферромагнетике с анизотропным обменным взаимодействием

© А.Б. Борисов, С.А. Зыков, Н.А. Микушина, А.С. Москвин

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,  
620219 Екатеринбург, Россия

E-mail: borisov@imp.uran.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 2 июля 2001 г.)

В рамках континуального приближения исследуются различные типы магнитных структур в двумерном гейзенберговском ферромагнетике. Изучается влияние параметров анизотропного обмена и одноионной анизотропии на структуру вихря. В легкоплоскостном ферромагнетике предсказывается существование нового типа статических образований ("мишеней") и исследуется их структура.

В последние два десятилетия солитоны, вихри и другие нелинейные возбуждения в низкоразмерных магнетиках вызывают повышенный интерес. Важная роль таких возбуждений и их влияние на существование дальнего порядка, различных магнитных фазовых переходов, включая топологические, отклики на внешние воздействия отмечались многими исследователями (см., например, [1–3]). Эти проблемы представляют не только академический интерес, так как в последнее время был синтезирован, или обнаружен, большой класс квазиодномерных и квазидвумерных (2D) магнетиков, где магнитное взаимодействие внутри кристаллографических плоскостей намного сильнее взаимодействия между плоскостями. Такие материалы включают слоистые магнетики, интеркалированные соединения, такие как  $\text{CoCl}_2$ , а также достаточно широкий класс базовых систем ВТСП ( $\text{La}_2\text{CuO}_4$ ,  $\text{Sr}_2\text{CuO}_2\text{Cl}_2$ ,  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$ ) [4].

Специфическим свойством квазидвумерных систем является их высокая чувствительность не только к относительно слабым взаимодействиям между плоскостями, но и различного рода магнитной анизотропии, как локальной (однoионной), так и нелокальной (двухионной). Учет магнитной анизотропии второго порядка приводит к известному обобщению классической двумерной изотропной XY-модели Гейзенберга с гамильтонианом

$$H = -J \sum_{j,k} \left( S_j^x S_{j+k}^x + S_j^y S_{j+k}^y + \lambda S_j^z S_{j+k}^z \right) - K \sum_j (S_j^z)^2, \quad (1)$$

описывающим взаимодействие классических спинов  $S_j$  на решетке. Здесь  $J > 0$  — обменный интеграл, вектор спина  $S_j$ :  $\{S_j^x + iS_j^y, S_j^z\} = S_0 \{\sin \theta_j \exp(i\Phi_j), \cos \theta_j\}$  задается полярным  $\theta_j$  и азимутальным  $\Phi_j$  углами,  $\lambda$  — постоянная анизотропного обмена (в общем случае  $0 < \lambda < \infty$ ),  $K$  — константа одноионной анизотропии, индекс  $j$  нумерует узлы решетки и суммирование по  $k$  включает только ближайших соседей. XY-симметрия означает, что в указанном интервале значений  $\lambda$  основное состояние системы бесконечно вырождено по углу вращения спина в XY-плоскости. Такая модель включает как изотропную модель Гейзенберга при  $\lambda = 1$ , так и XY-модели, когда  $\lambda = 0$ .

Известно, что в 2D-системах, описываемых гамильтонианом типа (1), помимо обычных спиновых волн существуют топологические возбуждения — вихри, которые ответственны за топологический фазовый переход в XY-модели [5] и вносят важный вклад в термодинамику изотропной модели Гейзенберга. В отсутствие локальной анизотропии ( $K = 0$ ) структуры и динамика вихрей в модели (1) (и ее континуальном приближении), их вклад в динамический структурный фактор в приближении газа свободных вихрей были исследованы в работах [2] и [6]. Численные исследования показывают, что в интервале  $0 < \lambda < \lambda_c$ , где для квадратной решетки  $\lambda_c = 0.72$ , а для гексагональной решетки  $\lambda_c = 0.86$ , энергия внутривещного (in-plane) IP-вихря в конфигурации

$$S_z = 0, \quad \Phi = q\varphi + \Phi_0 \quad (q \in Z) \quad (2)$$

с топологическим зарядом  $q$  меньше, чем энергия "неплоского" (out-of-plane) OP-вихря с выходом спинов из легкой плоскости [6]. В континуальном приближении для модели (1) такие вихри характеризуются радиально-симметричным монотонно-убывающим распределением компоненты спина  $S_z$ , перпендикулярной легкой плоскости, с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_z &\rightarrow \pm S_0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \\ S_z &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Цель данной работы — исследование структуры вихрей и других топологических дефектов в квазидвумерном ферромагнетике с анизотропным обменом с учетом энергии локальной магнитной анизотропии второго порядка и магнитодипольного взаимодействия. В разделе 1 приведены основные сведения из микроскопической теории спиновой анизотропии в системах на основе 3d- и 4f-элементов, имеющие важное значение для обоснования выбранной модели. В разделе 2 рассмотрены вихри намагниченности в легкоплоскостном ферромагнетике с анизотропным обменом и локальной анизотропией. Раздел 3 посвящен анализу магнитных структур типа мишени в анизотропном ферромагнетике.

## 1. Микроскопическая природа спиновой анизотропии

Микроскопическая природа двухионной анизотропии с параметром  $\lambda$  для соединений на основе  $3d$ -элементов связана с дальнедействующим ( $\propto 1/R^3$ ) магнитодипольным взаимодействием и короткодействующим квазидипольным обменно-релятивистским взаимодействием, или анизотропным обменом, — результатом совместного действия обмена и спин-орбитального взаимодействия [7–9],

$$\hat{V}_{ex} = - \sum_{i,k} \hat{f}_{i,k}(s_i s_{i+k}), \quad \hat{V}_{so} = \sum_i \xi_{nl}(i)(l_i s_i). \quad (4)$$

Здесь  $\hat{f}_{i,k}$  — обменный интеграл, который в общем случае является орбитальным оператором,  $\xi_{nl}$  — одноэлектронная постоянная спин-орбитальной связи, кроме того, для упрощения мы опустили суммирование по всем электронам многоэлектронных конфигураций атомов.

Анизотропный обмен в паре двух ионов является эффектом третьего порядка теории возмущений и схематически может быть представлен в виде суммы нескольких вкладов

$$V_{an}(1, 2) \propto \frac{V_{so}(1)V_{ex}(12)V_{so}(2)}{\Delta E^2} + \frac{V_{so}(1)V_{so}(2)V_{ex}(12)}{\Delta E^2} + \frac{V_{so}(1)V_{ex}(12)V_{so}(1)}{\Delta E^2} + \frac{V_{so}(1)V_{so}(1)V_{ex}(12)}{\Delta E^2} \quad (5)$$

плюс слагаемые с заменой  $1 \rightarrow 2$  и эрмитово-сопряженные слагаемые. Для ионов 1 и 2 со спинами  $S_1 = S_2 = 1/2$  анизотропный обмен имеет достаточно простую билинейную форму квазидипольного взаимодействия и фактически сводится к анизотропному гейзенберговскому взаимодействию типа (1). Для ионов 1 и 2 со спинами  $S_1(S_2) > 1/2$  анизотропный обмен содержит дополнительные негейзенберговские слагаемые с тензорными спиновыми операторами ранга 2 или даже 3 [9] типа

$$V_{an}^{22} \propto \sum_{i,k} (S_i S_{i+k}) S_i^z S_{i+k}^z; \quad V_{an}^{31} \propto \sum_{i,k} (S_i S_{i+k}) [(S_i^z)^2 + (S_{i+k}^z)^2], \quad (6)$$

вклад которых может быть сравним с квазидипольным вкладом. Для оценки численной величины параметра анизотропного обмена  $\lambda$  Мория [7] предложил соотношение

$$|\lambda - 1| \approx \left( \frac{\Delta g}{g} \right)^2,$$

где  $\Delta g$  — отклонение  $g$ -фактора от чисто спинового значения  $g \approx 2$ . Однако реально соотношение Мория имеет

крайне ограниченную область применения и вместо него правильнее использовать более общее соотношение [9]

$$|\lambda - 1| \approx \eta \left( \frac{\xi_{3d}}{\Delta E} \right)^2, \quad (7)$$

где  $\xi_{3d}$  — одноэлектронная константа спин-орбитальной связи ( $\xi_{3d} \sim 0.01-0.1$  eV),  $\Delta E$  — некоторая средняя энергия возбужденных состояний  $3d$ -иона, которые смешиваются с основным состоянием спин-орбитальным взаимодействием ( $\Delta E \geq 1$  eV), а  $\eta \sim 1-10$  — численный параметр. Примеры модельных численных расчетов двухионной анизотропии для ряда соединений  $3d$ -элементов приведены в работе [9]. В целом анизотропный обмен для этих соединений относительно мал, так что обычно  $|\lambda - 1| \leq 0.1$ .

Природа локальной одноионной анизотропии второго порядка в соединениях на основе  $3d$ -элементов связана с совместным действием спин-орбиты и низкосимметричного кристаллического поля. Как правило, для этих систем энергия одноионной анизотропии существенно меньше обменной, но в большинстве случаев сравнима или даже превышает энергию двухионной анизотропии. Важной особенностью одноионной анизотропии является то, что она возникает только для спинов  $S \geq 1$ .

В магнетиках на основе редкоземельных  $4f$ -элементов, описываемых эффективным гамильтонианом (1), постоянная  $\lambda$  может меняться в широких пределах  $0 < \lambda < \infty$ , а энергия одноионной анизотропии — существенно превышать обменную. Учет дальнедействующего классического магнитодипольного взаимодействия можно провести с помощью введения размагничивающего поля.

## 2. Вихри намагниченности в легкoplоскостном ферромагнетике с анизотропным обменом

2.1. Основные уравнения модели. Распределение намагниченности неоднородных магнитных структур в анизотропном ферромагнетике с гамильтонианом (1) в континуальном приближении определяется минимизацией классической энергии с плотностью

$$W = \frac{\alpha}{M_0^2} \left[ (\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + \lambda (\nabla M_z)^2 + \frac{\varepsilon}{l_0^2} M_z^2 \right] - \frac{1}{2} RM, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (8)$$

где  $\alpha = JS^2$  — параметр обменного взаимодействия,  $M_0 = g\mu_B S_0/a^2$ , а

$$\frac{\varepsilon}{l_0^2} = \frac{4(1-\lambda) - K/J}{a^2},$$

где  $l_0$  — эффективная магнитная длина, а параметр  $\varepsilon = \pm 1$  определяет знак эффективной константы анизотропии  $4(1-\lambda)J - K$ .

Размагничивающее поле  $R$  удовлетворяет уравнениям магнитостатики

$$\text{rot}R = 0,$$

$$\text{div}[4\pi M + R] = 0. \quad (9)$$

Обсудим структуру нелокализованных (по терминологии [4,5]) вихрей, когда намагниченность на больших расстояниях не стремится к постоянному вектору. В отсутствие полей размагничивания  $R$  и при  $\lambda = 1$  структура таких вихрей подробно обсуждается в монографии [5]. Известно, что на малых расстояниях  $r \ll l_0$  поле  $\theta(r)$  определяется обменным взаимодействием и совпадает с хорошо известным [10] инстантонным решением (скирмион Белавина–Полякова)

$$\theta = 2\text{arctg}[C \exp(q \ln(r/l_0))], \quad (10)$$

а выражение для азимутального угла совпадает с (2). Для модели (8) рассмотрим простейшие вихревые статические конфигурации вида

$$\theta = \theta(r), \quad \Phi = \varphi + \Phi_0, \quad (11)$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  в плоскости  $XY$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае поле размагничивания выражается локально через намагниченность [11]

$$R_x = -4\pi M_x \cos \Phi_0, \quad R_y = -4\pi M_y \cos \Phi_0, \quad R_z = 0. \quad (12)$$

Далее выбираем значение постоянной  $\Phi_0$ , равным  $\pi/2$ , которое соответствует минимуму энергии магнитостатического поля —  $RM/2$ . Поэтому магнитостатическое поле  $R = 0$  и не учитывается далее. При произвольных значениях  $q \neq 1$  поле размагничивания выражается через скалярный потенциал  $\psi$ :  $R = -\text{grad}\psi$ , который удовлетворяет уравнению Пуассона  $\Delta\psi = 4\pi \text{div}M$ . В этом случае уравнение Ландау–Лифшица, как и в теории жидких кристаллов [12], инвариантно относительно одновременных вращений спиновых и независимых пространственных переменных. Поэтому при  $q \neq 1$  поле  $\theta = \theta(r, \varphi, z)$  имеет иной (чем при  $q = 1$ ) вид и будет обсуждаться. Из гамильтониана (8) и уравнения (11) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\theta(r)$

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) \left( \theta_{rr} + \frac{\theta_r}{r} \right) \\ & = \sin \theta \cos \theta \left( (1-\lambda)\theta_r^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{l_0^2} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

2.2. Легкоосный ферромагнетик. Покажем, что в легкоосном ферромагнетике ( $\varepsilon = -1$ ) не существует локализованных вихревых структур, регулярных в начале координат и стремящихся к основному состоянию на бесконечность, т. е. краевая задача с граничными условиями

$$\theta \rightarrow 0, \quad \theta'(r) < \infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$\theta \rightarrow \pi, \quad \theta'(r) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (15)$$

не имеет решения. С этой целью определим величину

$$F(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)r^2 \theta_r^2}{1 + r^2/l_0^2} + \cos^2 \theta \right], \quad (16)$$

которая в отсутствие анизотропии ( $l_0 \rightarrow \infty$ ) пропорциональна плотности энергии. Тогда вследствие уравнения (13) производная

$$F'(r) = -\frac{(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta)r^3 \theta_r^2}{(1 + r^2/l_0^2)^2} < 0, \quad (17)$$

и при  $0 < \lambda < \infty$  функция  $F(r)$  монотонно убывает. Однако для несингулярных граничных условий (14) значения функции  $F(r)$  при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$  совпадают

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 1/2, \quad (18)$$

а это противоречит монотонному убыванию функции  $F(r)$ . Следовательно, несингулярных вихревых решений, удовлетворяющих краевой задаче (14), не существует и структура скирмиона Белавина–Полякова (10) резко изменяется в присутствии сколь угодно малой легкоосной анизотропии.

2.3. Легкоплоскостной ферромагнетик. Обсудим решения уравнения (13) для легкоплоскостного магнетика ( $\varepsilon = 1$ ) с несингулярными граничными условиями

$$\theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow \pi/2 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (19)$$

нелинейной краевой задачи. Нетрудно показать (линеаризуя при больших  $r$  уравнение (13) вблизи  $\theta = \pi/2$ ), что приближение вихря к пределу (при  $\lambda \neq 0$ ) имеет экспоненциальный характер.

$$\begin{aligned} & \theta \rightarrow \pi/2 - C_1 K_{i/\sqrt{\lambda}} \left( \frac{r}{l_0 \sqrt{\lambda}} \right) \\ & \rightarrow \pi/2 - \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{r}} \exp \left( -\frac{r}{l_0 \sqrt{\lambda}} \right) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $K_{i/\sqrt{\lambda}}$  — функция Макдональда порядка  $i/\sqrt{\lambda}$ .

В особом случае  $\lambda = 0$  уравнение (13) факторизуется и имеет точное решение. Нетрудно убедиться, что при  $\varepsilon = 1$  решение

$$\sin \theta = 1 \quad (r \geq r_1),$$

$$\sin \theta = \frac{J_1(r/l_0)}{J_1(r_1/l_0)} \quad (r \leq r_1) \quad (21)$$

(где  $r_1$  — первый максимум  $J_1(r/l_0)$  — функции Бесселя первого порядка) непрерывно вместе с первыми производными и описывает локализованный *OP*-вихрь в *XY*-модели.

В общем случае для легкоплоскостного магнетика при фиксированных значениях  $l_0$  нелинейная краевая задача (13), (19) имеет решение только при дискретном значении  $\theta'(0)$ .

Уравнение (13) было проинтегрировано для различных значений  $\lambda$  методом "стрельбы". На рис. 1 в качестве примера изображена фазовая диаграмма полученных решений (при  $\lambda = 0.8$ ). Фазовые траектории, начинающиеся в точках  $(\theta(0) = 0, \theta'(0) = \theta'_1)$  и в  $(\theta'(0) = 0, \theta'(0) = \theta'_2)$ , при  $r \rightarrow \infty$  заканчиваются в фокусах  $(\theta(\infty) = 0, \theta'(\infty) = 0)$  и  $(\theta(\infty) = \pi, \theta'(\infty) = 0)$  соответственно. Поэтому интервал  $\theta'_1 < \theta'(0) < \theta'_2$ , в котором существует единственная траектория с  $\theta(\infty) \rightarrow \pi/2$  и  $\theta'(\infty) \rightarrow 0$ , можно определить с любой степенью точности. Вид функций  $\theta(r)$ , вычисленных методом "стрельбы", при различных значениях  $\lambda$  представлен на рис. 2. Видно, что с увеличением  $\lambda$  (начиная со значения  $\lambda = 0$ ) вихрь становится более локализованным вблизи

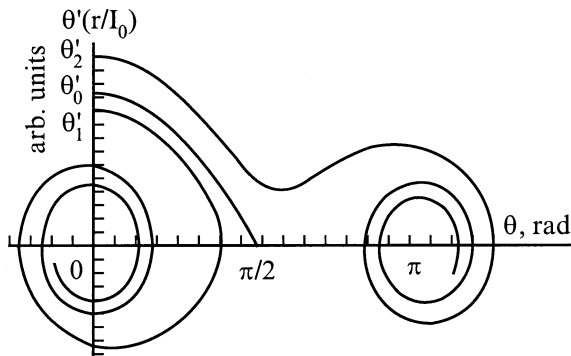


Рис. 1. Фазовые диаграммы решений для метода "стрельбы": поиск решения с правильной асимптотикой при  $r \rightarrow \infty$ .

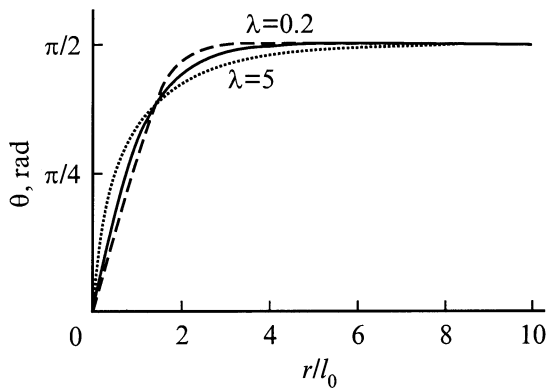


Рис. 2. Профили вычисленных методом "стрельбы" функций  $\theta(r)$  для регулярных решений. Сплошная линия соответствует вихрю в отсутствие анизотропного обмена.

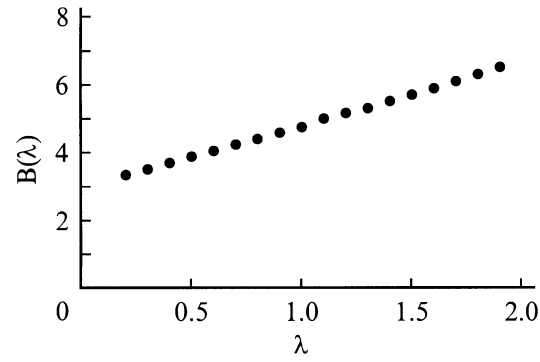


Рис. 3. График величины  $B(\lambda)$  для регулярных решений.

начала координат, а вдали от центра (в соответствии с формулой (20)) приближается к равновесному значению  $\theta = \pi/2$  более медленно.

Энергия *OP*-вихря зависит от размера системы  $L$  как  $\ln L$ , так как плотность энергии содержит слагаемое вида  $\sin^2 \theta/r^2$ , которое приводит к логарифмической расходимости интеграла, определяющего энергию магнетика при любом законе приближения  $\theta(r)$  к  $\pi/2$ . Точное значение отличается от величины  $2\pi\alpha \ln(L/l_0)$  слагаемым, которое конечно при  $L \rightarrow \infty$ . Зависимость энергии решений  $E_{OP}$  от размера системы и параметров  $\lambda, l_0$  удобно представить в виде

$$E_{OP} = 2\pi \int_0^L W r dr = 2\pi\alpha \ln \left( \frac{B(\lambda)L}{l_0} \right). \quad (22)$$

График величины  $B(\lambda)$  приведен на рис. 3. Сравним энергию *OP*-вихря с энергией

$$E_{IP} = 2\pi\alpha \ln(L/r_0),$$

плоского вихря (2). Здесь  $r_0$  — радиус обрезания — порядка нескольких параметров решетки. Ясно, что *OP*-вихрь предпочтителен при неравенстве

$$\frac{l_0}{r_0} > B(\lambda), \quad (23)$$

которое предполагает довольно сложную зависимость от параметров двухионной и одноионной анизотропии. Действительно, левая часть этого соотношения определяется эффективной магнитной длиной, т.е. эффективной константой магнитной анизотропии, тогда как правая часть определяется только константой двухионной анизотропии. Наличие параметра  $r_0$  в (23) затрудняет прямое сравнение критерия перехода от *IP*- к *OP*-вихрю, полученного нами в непрерывной модели, с соответствующим критерием решеточной модели [6]. При учете только вклада магнитной анизотропии от анизотропного обменного взаимодействия, когда  $l_0 = a/2\sqrt{1-\lambda}$  (при  $0 < \lambda < 1$ ) и  $r_0 \approx a$ , *OP*-вихрь стабилен при малых положительных значениях  $(1-\lambda)$  [6], т.е. в модели с почти изотропным обменом. В общем случае энергия

ОР-вихря сложным образом зависит от соотношения между вкладами одноионной и двухионной магнитной анизотропии, что позволяет рассматривать структуру стабильных топологических дефектов в реальных магнетиках как результат определенной конкуренции двух вкладов в анизотропию.

### 3. Магнитные структуры типа "мишени" в легкоплоскостном ферромагнетике с анизотропным обменом

В этом разделе предсказывается и анализируется новый тип вихревых конфигураций — структур типа статического ведущего центра или "мишени". Пространственные структуры типа "мишени" наблюдаются в распределенных активных средах и являются одним из наиболее широко распространенных диссипативных структур [13,14]. В автоколебательных активных средах простейший тип представляет собой источник концентрических расходящихся фазовых волн. Динамические структуры типа пейскекера в магнитоупорядоченных средах — легкоосных магнетиках — впервые описаны в работах [15,16]. Они наблюдались также другими исследователями, например в [17–21]. Такие пространственные структуры сохранялись и после выключения переменного магнитного поля, приближаясь к термодинамически равновесному состоянию за достаточно большой промежуток времени. Данное обстоятельство указывает на то, что такие структуры являются топологическими дефектами в магнитоупорядоченных средах и их теоретическое исследование представляет несомненный интерес. Попытки их теоретического рассмотрения предпринимались в работах [22–26]. Для аналитического описания системы радиально-симметричных доменных структур мы используем сингулярные решения следующей краевой задачи:

$$\theta(\infty) \rightarrow \frac{(2N+1)\pi}{2}, \quad N \in \mathbb{Z},$$

$$\theta'(0) \sim \frac{1}{r} \text{ — неограниченная функция} \quad (24)$$

для уравнения (13). Эти решения будем далее также называть вихревыми структурами типа магнитной "мишени", поскольку зависимость намагниченности в них от азимутального угла  $\Phi$  также определяется характерным для вихрей соотношением (2). Поведение намагниченности вблизи кора сингулярных вихрей описывается обменным взаимодействием, инвариантным к масштабным преобразованиям ( $r \rightarrow r/\beta$ ). Поэтому удобно ввести новую "растягивающую" переменную  $R = \ln(r/l_0)$ , в терминах которой уравнение (13) принимает простой вид

$$(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) \theta_{RR}$$

$$= \sin \theta \cos \theta ((1 - \lambda) \theta_R^2 + 1 - e^{2R}). \quad (25)$$

Обсудим асимптотическое поведение и классификацию сингулярных вихрей при  $r \rightarrow 0$ . В этом пределе можно пренебречь энергией магнитной анизотропии, полагая в (13)  $l_0 \rightarrow \infty$  и найти вид  $\theta(r)$  в квадратурах

$$R - R_0 = \int_{\theta(R_0)}^{\theta(R)} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta} d\theta}{\sqrt{k^2 - \cos^2 \theta}} \quad (0 < k < 1), \quad (26)$$

$$R - R_0 = k \int_{\theta(R_0)}^{\theta(R)} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta} d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} \quad (0 < k < 1). \quad (27)$$

3.1. Структура типа "мишени" в легкоплоскостных магнетиках с изотропным обменным взаимодействием. Обсудим структуру типа "мишени" в магнетиках с изотропным обменным взаимодействием ( $\lambda = 1$ ). Тогда поле  $\theta(r)$  выражается в терминах эллиптических функций

$$\cos \theta(R) = \text{ksn}(R - R_0, k) \quad (0 < k < 1), \quad (28)$$

$$\cos \theta(R) = \text{sn} \left( \frac{R - R_0}{k}, k \right) \quad (0 < k < 1). \quad (29)$$

Здесь  $R_0, k$  — постоянные интегрирования.

Заметим, что параметр  $k$  определяет периодическое (по переменной  $R$ ) распределение намагниченности вблизи центра "мишени". Предельный переход  $\lambda \rightarrow 1$  из анизотропного случая (26), (27) к изотропному (28), (29) не изменяет параметр  $k$ .

Эти решения сингулярны при  $r \rightarrow 0$ :  $\theta'(r) \sim 1/r$  ( $0 < k < 1$ ) и совпадают с известным решением Белавина–Полякова при  $k \rightarrow 1$  (10), которое является сепаратрисным решением уравнения маятника (25) (при  $\lambda = 1, l_0 \rightarrow \infty$ ). Уравнение (28) описывает  $R$ -периодические колебания намагниченности около 0:  $-\lambda \leq \cos \theta(R) \leq k$ . Решению (29), которое и будем рассматривать в дальнейшем, соответствует система концентрических (по переменной  $R$ ) кольцевых доменов — магнитная "мишень". Два последовательных центра доменных границ (в точках  $r_{n+1}$  и  $r_n$ ) связаны соотношением  $r_{n+1} = r_n \exp(2kK(k))$ , где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. Ширина доменов

$$d_n = d_0 e^{2nkK(k)} \quad (30)$$

зависит от величины  $k$  и увеличивается с удалением от центра "мишени", так как  $kK(k)$  — монотонно возрастающая положительная функция  $k$ .

Как уже отмечалось, построенное решение имеет сингулярный характер и его вклад в термодинамику двумерных систем требует отдельного детального анализа. Однако в реальных магнетиках зарождение магнитных структур типа спиралей и мишеней происходит, как правило, на дефектах немагнитной природы. В этом случае радиус кора "мишени" совпадает с радиусом дефекта  $b$  и полученное решение для малых  $r$  справедливо при  $r > b$ . На расстояниях  $r \sim l_0$  энергия магнитной анизотропии оказывает существенное влияние на структуру "мишени". Следует ожидать, что намагниченность

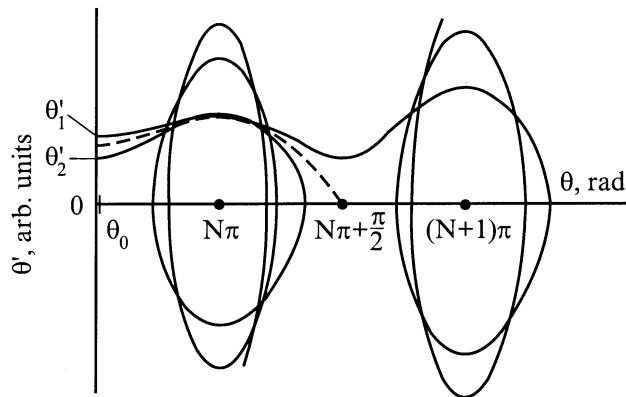


Рис. 4. Фазовые диаграммы решений для метода "стрельбы".

сингулярного вихря приближенно совпадает с намагниченностью in-plane вихря (2):  $S_z \approx 0$ ,  $\Phi = \varphi + \Phi_0$  в области  $r_c < r < \infty$ , где значение  $r_c$  зависит от параметра  $k$ . При этом  $r_c(k)$  должна быть возрастающей функцией от  $k^{-1}$ , так как средняя энергия анизотропии на единицу площади  $n$ -го домена

$$\frac{2 \int_{r_n}^{r_{n+1}} W r dr}{r_{n+1}^2 - r_n^2}, \quad (31)$$

где  $r_n = l_0 \exp(2nkK(k))$ , для конфигурации (2) при  $n \rightarrow \infty$  возрастает с уменьшением  $k$ . Кроме того, параметр  $k$ , описывающий поведение (26)–(29) намагниченности вблизи кора вихря, должен принимать дискретные значения, определяющие локализованный вид  $\theta(r)$  на  $\infty$ . Эти качественные рассуждения подтверждаются численными расчетами методом "стрельбы".

Для пояснения смысла метода "стрельбы" на рис. 4 приведены "фазовые портреты" решений при  $\lambda = 1$ .

Видно, что при заданном значении  $\theta(l_0) = \theta_0$  в промежутке  $(\theta'_1(l_0), \theta'_2(l_0))$  существует единственная фазовая траектория, заканчивающаяся в точке  $\theta = (2N + 1)\pi/2$ . Мы фиксировали значение  $\theta(r = l_0)$  и находили значения  $\theta'_1(l_0)$  и  $\theta'_2(l_0)$ , при которых решения задачи Коши для уравнения (25) с начальными данными  $(\theta(l_0) = \theta_0, \theta'_{1,2}(l_0))$  имели асимптотическое поведение  $(\theta(\infty) \rightarrow N\pi, \theta'(\infty) \rightarrow 0)$  и  $(\theta(\infty) \rightarrow (N + 1)\pi, \theta'(\infty) \rightarrow 0)$  соответственно. Получив такие значения  $\theta'_{1,2}(l_0)$ , на следующем шаге вычислений мы брали значение  $\theta'(l_0)$  в интервале  $(\theta'_1(l_0), \theta'_2(l_0))$ . Уменьшая интервал  $\theta'_1(l_0) < \theta'(l_0) < \theta'_2(l_0)$  изменения  $\theta'(l_0)$ , мы находили единственное значение  $\theta'(l_0)$ , при котором удовлетворяется краевое условие (24) с необходимой степенью точности. Далее, используя полученные значения  $(\theta(l_0), \theta'(l_0))$ , мы решали задачу Коши для уравнения (25) в интервале  $r \leq l_0$  и находили вид намагниченности вблизи кора вихря. Полученное численное решение при  $r \ll l_0$  хорошо аппроксимировалось формулой (27) с определенным значением  $k$ . График одного из решений приведен на рис. 5 и 6.

С помощью полученных численных решений можно указать ряд характерных особенностей влияния анизотропии на структуру "мишени". Отметим, что в традиционных магнитооптических экспериментах для широкого ряда магнетиков масштаб распознавания пространственной магнитной структуры не превышает характерной магнитной длины  $l_0$ . Поэтому в дальнейшем будем обсуждать только структуру мишеней при  $r > l_0$  и определять значение  $N$  в асимптотике (24) как

$$N = \left[ \frac{\theta(\infty) - \theta(l_0) - \pi/2}{\pi} \right], \quad (32)$$

где  $[x]$  обозначает целую часть переменной  $x$ . Для оценки намагниченности при  $r < l_0$  уместно найти среднее

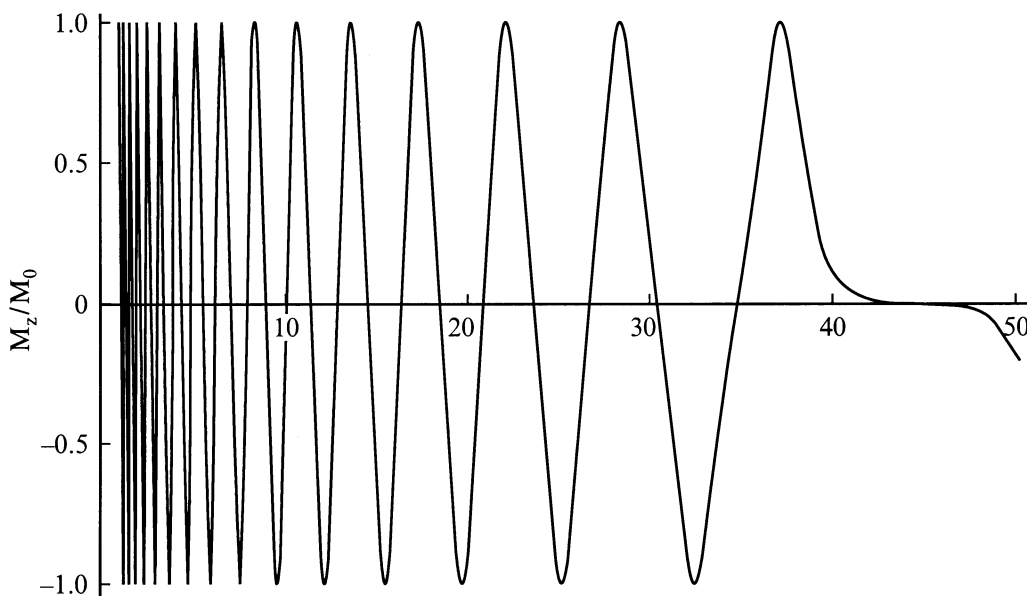


Рис. 5. График решения типа "мишени" с пятнадцатью кольцами в безразмерных величинах  $(r/l_0)$ .

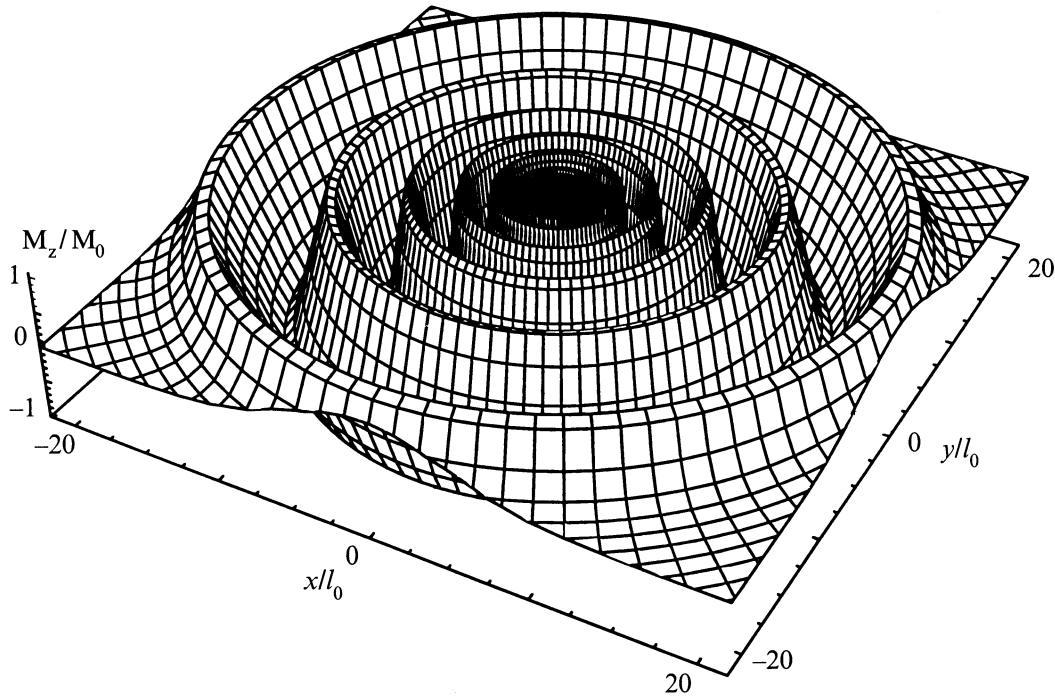


Рис. 6. График решения типа "мишени" с пятнадцатью кольцами на плоскости в безразмерных величинах  $M_z(x/l_0, y/l_0)/M_0$ .

значение  $\overline{M_z} = 2M_0 \int_0^{l_0} \cos \theta r dr / l_0^2$  в области  $r < l_0$ . Оказывается, что знак  $\overline{M_z}$  совпадает со знаком  $M_z$  кольца, предыдущего по отношению к кольцу, где находится  $\theta(l_0)$ . На рис. 7 приведена зависимость ширины колец  $d_n$

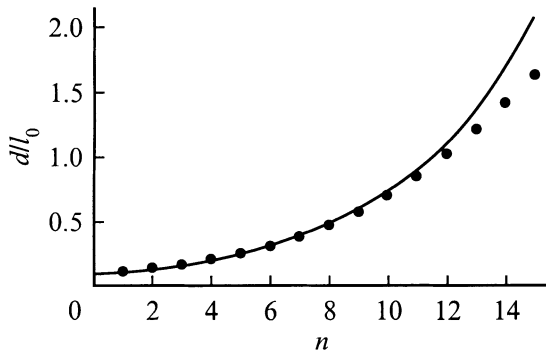


Рис. 7. Зависимость ширины колец в безразмерных величинах  $d/l_0$  от номера кольца для решения с пятнадцатью кольцами. Сплошная линия соответствует графику аппроксимации (30).

от номера кольца  $n$  для мишени с заданным числом колец  $N = 15$ . Здесь и далее нумерация колец начинается с расстояния  $r = l_0$ . Домен определяется как область, где  $|M_z| > 0.7M_0$ . Для оценки локализации сингулярного вихря уместно привести график зависимости радиуса последнего кольца  $R_l$  от параметра  $k$  (рис. 8). Видно, что с увеличением  $k$  область локализации вихря уменьшается и при  $k \rightarrow 1$  совпадает с областью локализации регулярного вихря. Численная аппроксимация также показывает, что для  $1 < N < 15$ , помимо двух

крайних колец, ширина доменов описывается формулой (30), справедливой только в обменном приближении. Эта зависимость изображена на рис. 7, сплошной линией. Аналогичная формула справедлива и для ширины доменных границ. Таким образом, влияние анизотропии приводит к уширению нескольких крайних доменов и "бесконечному расползанию" последнего домена.

**3.2. Структура типа мишени в легкоплоскостных магнетиках с анизотропным обменным взаимодействием.** В присутствии обменной анизотропии процедура обращения интеграла (27) приводит к неполному эллиптическому интегралу третьего рода. Поэтому не существует аналитического описания асимптотического поведения (при  $r \rightarrow 0$ ) сингулярного вихря. Решения (27) периодичны

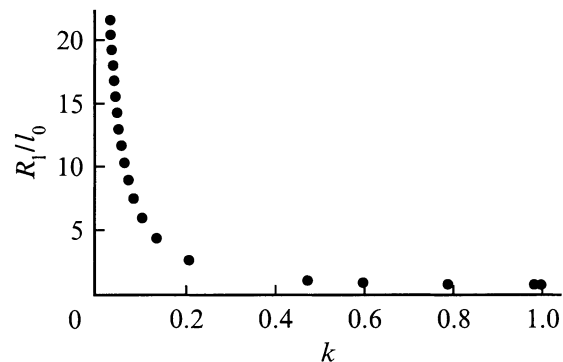
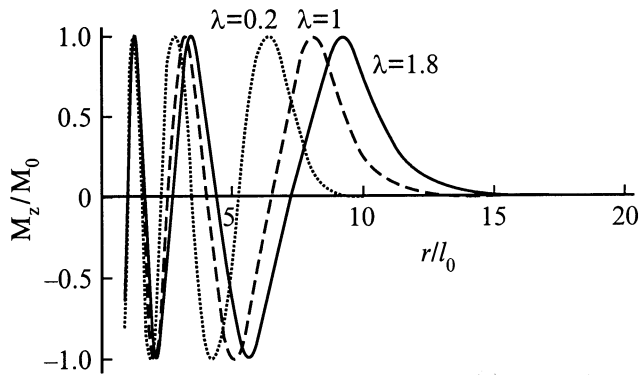
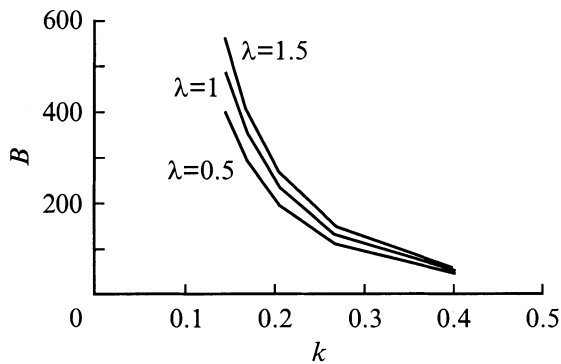


Рис. 8. Зависимость радиуса последнего кольца в безразмерных величинах  $R_l/l_0$  от параметра  $k$ .



**Рис. 9.** Профили  $M_z(r)$  для "мишени" при разных  $\lambda$  в приведенных величинах.



**Рис. 10.** Вид функции  $\ln B(\lambda, k)$  от  $k$  для различных значений  $\lambda$ .

в  $R$ -пространстве с периодом

$$T(k, \lambda) = 4k \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta} d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}}, \quad (33)$$

который является монотонно возрастающей функцией как параметра  $k$ , так и параметра обменной анизотропии  $\lambda$ . Нетрудно показать, что при  $\lambda = 0$  ограниченных решений для  $M_z$  с сингулярной производной не существует. Для остальных значений  $\lambda$  структура магнитных "мишеней" качественно не отличается от случая  $\lambda = 1$ . На рис. 9 изображены профили компоненты  $M_z$ , полученные численным интегрированием уравнения (25) методом "стрельбы". Видно, что с увеличением значения  $\lambda$  (при фиксированном значении  $k$ ) область локализации сингулярного вихря увеличивается, что согласуется с асимптотическим поведением (20).

Из-за сингулярного поведения "мишени" на малых расстояниях ее энергия логарифмически зависит от радиуса обрезания  $r_0$ . Эту зависимость можно оценить, используя асимптотическое поведение намагниченности при  $r \rightarrow 0$  (27). В этом приближении энергия обменного взаимодействия выражается интегралом по

переменной  $R$  от периодической функции

$$w = \frac{(1 - k^2 \cos(2\theta)) \sqrt{\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta}}{k \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} \quad (34)$$

с периодом  $T(\lambda, k)$ . Интеграл от  $w$  по большому числу периодов можно приближенно представить как произведение среднего от  $w$  по периоду

$$I(\lambda, k) = \frac{4 \int_0^{\pi/2} w d\theta}{T(\lambda, k)} \quad (35)$$

на длину интервала интегрирования. Поэтому следует ожидать, что энергия сингулярного вихря содержит слагаемое

$$E_s = 2\pi\alpha I(\lambda, k) \ln \left( \frac{l_0}{r_0} \right). \quad (36)$$

Действительно, численные исследования показывают, что энергия магнитной "мишени" с анизотропным обменом  $E_{\text{targ}}$  содержит два слагаемых

$$E_{\text{targ}} = 2\pi\alpha \ln \left( B(\lambda, k) \frac{L}{l_0} \right) + E_s. \quad (37)$$

Слагаемое, пропорциональное  $\ln L$ , обусловлено асимптотическим поведением намагниченности на бесконечности. Вид функции  $\ln B(\lambda, k)$  от  $k$  для различных значений  $\lambda$  приведен на рис. 10. Как и следовало ожидать, энергия магнитной "мишени" монотонно возрастает с увеличением параметра  $\lambda$ , так как  $I'(\lambda) > 0$  и  $B'(\lambda) > 0$  при  $0 < \lambda < \infty$ .

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены различные вихревые конфигурации в  $2D$ -ферромагнетике с учетом как одноионной, так и двухионной анизотропии (анизотропного обмена). В легкоосном ферромагнетике ( $\varepsilon = -1$ ) не существует локализованных вихревых структур, регулярных в начале координат и стремящихся к основному состоянию на бесконечности. Для легкоплоскостного ферромагнетика поведение  $z$ -компоненты намагниченности в вихре на больших расстояниях от центра носит типичный экспоненциальный характер  $M_z \propto \exp(-r/r_c)/\sqrt{r}$ , с  $r_v = l_0 \sqrt{\lambda}$ . Методом "стрельбы" рассчитано поведение  $z$ -компоненты намагниченности в вихре при различных значениях параметров анизотропии. Энергия  $OP$ -вихря в легкоплоскостном ферромагнетике ( $\varepsilon = +1$ ) зависит и от значения эффективной магнитной длины  $l_0$ , и от параметра анизотропного обмена  $\lambda$ , а следовательно, от соотношения между вкладом одноионной и двухионной магнитной анизотропии. Предсказана и проанализирована структура нового класса вихревых конфигураций типа статического ведущего центра или мишени в легкоплоскостных магнетиках с изотропным и анизотропным обменом. Новые решения имеют сингулярный характер с логарифмической зависимостью энергии от размера системы и эффективной магнитной длины. В реальных магнетиках вихри типа магнитных "мишеней" будут формироваться на дефектах



и могут вносить заметный вклад в термодинамику системы. Рассмотрение механизма образования магнитной "мишени" [26] представляет несомненный интерес, но выходит за рамки данной работы.

## Список литературы

- [1] Nonlinearity in Condensed Matter / Ed. by A.R. Bishop, R. Ecke, S. Gubernatis. Springer, Berlin (1993).
- [2] Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology Ed. by K.H. Spatchek, F.G. Martens. (Plenum, New York (1994).)
- [3] Fluctuation Phenomena: Disorder and Nonlinearity / Ed. by A.R. Bishop, S. Jimenez, L. Vazquez. World Scientific, Singapore (1995).
- [4] Б.А. Иванов, А.К. Колежук. ФНТ **21**, 4, 355 (1995).
- [5] А.М. Косевич, Б.А. Иванов. А.С. Ковалев. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Наукова думка, Киев (1983).
- [6] M.E. Gouvea, G.M. Wysin, F.G. Mertens, A.R. Bishop. Phys. Rev. **B39**, 1, 1840 (1989).
- [7] Т. Мориya. Phys. Rev. **120**, 91 (1960).
- [8] К. Yosida. J. Appl. Phys. **39**, 511 (1960).
- [9] А.С. Москвин, И.Г. Бострем, М.А. Сидоров. ЖЭТФ **104**, 2499 (1993).
- [10] А.А. Белавин, А.М. Поляков. Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
- [11] A. Hubert, A. Bogdanov. Phys. Stat. Sol. (b) **186**, 527 (1994).
- [12] С.А. Сонин. Введение в физику жидких кристаллов. Наука, М. (1983).
- [13] А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. Введение в синергетику. Наука, М. (1990).
- [14] M.C. Cross, H.C. Hohenberg. Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [15] H. Dötsch, H.J. Schmitt. Appl. Phys. Lett. **24**, 442 (1974).
- [16] H. Dötsch. AIP Conf. Proc. **29**, 78 (1976).
- [17] В.В. Рандошкин, В.В. Сигачев. Тез. докл. XVII Всесоюз. конф. по физике магнитных явлений. Донецкий ГУ, Донецк (1985). С. 131.
- [18] А.П. Гесь, В.В. Федотова, А.К. Богуш, Т.А. Горбачевская. Письма в ЖЭТФ **52**, 1079 (1990).
- [19] Г.С. Кандаурова. ДАН **308**, 6, 1364 (1989).
- [20] Г.С. Кандаурова. ДАН **331**, 4, 428 (1993).
- [21] Г.С. Кандаурова. ФММ **158**, 1179 (1995).
- [22] И.Е. Дикштейн, Ф.В. Лисовский, У.Г. Мансветова, Е.С. Чижик. ЖЭТФ **100**, 1606 (1991).
- [23] Ф.В. Лисовский, У.Г. Мансветова, Е.П. Николаева, А.В. Николаев. ЖЭТФ **103**, 213 (1993).
- [24] В.Н. Мальцев, Н.М. Фахрутдинов. ФММ **88**, 1, 17 (1999).
- [25] А.Ф. Гальцев, Ю.И. Ялышев. ФММ **85**, 4, 5 (1998).
- [26] Ю.Л. Гобов, Г.А. Шматов. ФММ **78**, 1, 39 (1994).