

01;03;11

## **Крупномасштабная магнитогидродинамическая неустойчивость поверхности проводящей жидкости**

© Н.Б. Волков, Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

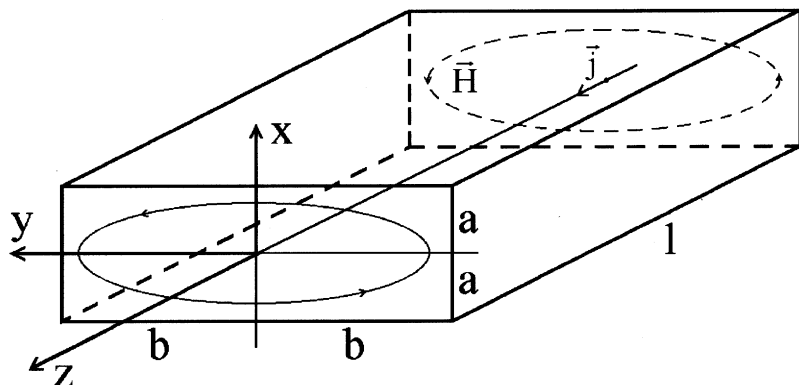
Институт электрофизики УРО РАН, Екатеринбург  
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 2 июля 2001 г.

Исследуется устойчивость жидкометаллического токнесущего проводника прямоугольного сечения по отношению к малым продольным возмущениям его поверхности. Показано, что инкремент неустойчивости стремится к нулю в коротковолновом и длинноволновом пределах и, следовательно, его максимум приходится на конечное значение волнового числа. Получены оценки для характерных времен развития неустойчивости.

Известно [1,2], что поверхность жидкокристаллических проводников при протекании по ним электрического тока неустойчива, причем преимущественно развиваются коротковолновые возмущения. В наших предыдущих работах [3–5] было также обнаружено, что для проводников с фиксированной границей при определенных условиях в среде под действием сил Лоренца может развиваться конвективная магнитогидродинамическая неустойчивость. В этом случае в первую очередь будут нарастать возмущения с длиной волны порядка минимального характеристического размера системы. Возникает вопрос, каким образом возможное зарождение конвективных структур скажется на поведении проводящей жидкости со свободной поверхностью. Поэтому целью предлагаемой работы является анализ динамики границы токнесущей жидкости для геометрий задачи, в которых это влияние может быть существенным, и, в частности, выявление механизмов, ответственных за развитие крупномасштабных неустойчивостей поверхности.

Рассмотрим жидкометаллический проводник прямоугольного сечения со сторонами  $2b$  и  $2a$  (считаем, что  $a \ll b$ ), которые соответствуют осям  $y$  и  $x$ . Постоянный электрический ток величиной  $I$



Жидкометаллический проводник прямоугольной геометрии со сторонами  $2a \ll 2b \ll l$ . Схематически показаны силовые линии магнитного поля.

течет в направлении оси симметрии проводника  $z$  (см. рисунок). Будем считать жидкость несжимаемой, а ее проводимость  $\sigma$  постоянной. Тогда уравнения магнитной гидродинамики имеют следующий вид:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla P + (4\pi\rho)^{-1} ((\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}), \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{H} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ ,  $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$  и  $P$  — соответственно скорость, напряженность магнитного поля и давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu_m = c^2(4\pi\sigma)^{-1}$  — магнитная вязкость, а  $c$  — скорость света.

Представим величины  $\mathbf{H}$  и  $P$  в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad P = P_0 + p,$$

где  $\mathbf{H}_0$  и  $P_0$  — невозмущенные (соответствующие условию  $\mathbf{v} = 0$ ) распределения магнитного поля и давления в среде, а  $\mathbf{h}$  и  $p$  — их малые возмущения. Поле  $\mathbf{H}_0$  определяется законом Био и Савара [6]:

$$\mathbf{H}_0(x, y) = 2c^{-1} \int_s r^{-2} [\mathbf{j} \times \mathbf{r}_\perp] dS,$$

где  $\mathbf{j} = \{0, 0, I/(4ab)\}$  — плотность тока, распределение которого полагаем однородным,  $\mathbf{r}_\perp$  — проекция радиус-вектора на поперечное

сечение проводника (плоскость  $\{x, y\}$ ), а  $dS$  — элемент площади этого сечения. Функция  $P_0(x, y)$ , как следует из уравнения (1) в сочетании с условием постоянства давления на поверхности жидкости, однозначно определяется распределением  $\mathbf{H}_0$ .

Полагая, что при развитии неустойчивости симметрия относительно плоскости  $y = 0$  в задаче сохраняется (см. также [7]), получим из (1)–(3) в линейном по возмущениям  $\mathbf{v}$ ,  $p$  и  $\mathbf{h}$  приближении:

$$\partial_t(\partial_z v_x - \partial_x v_z) = (4\pi\rho)^{-1} \partial_y H_{0x} \cdot \partial_z h_y, \quad y = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2(4\pi p + H_{0y} h_y)/2 = -(\partial_y H_{0x} - \partial_x H_{0y}) \cdot \partial_y h_x + \partial_y H_{0x} \cdot \partial_z h_y, \quad y = 0, \quad (5)$$

$$(\partial_t - \nu_m \nabla^2) h_y = H_{0y} \partial_y v_y - v_x \partial_x H_{0y}, \quad y = 0, \quad (6)$$

где (4) и (5) являются результатами применения операций "rot" и соответственно "div" к уравнению (1). Граничные условия для этой системы уравнений имеют вид

$$h_y = \pm \partial_a H_{0y} \cdot \eta, \quad \partial_t \eta = \pm v_x, \quad p = \mp \partial_x P_0 \cdot \eta, \quad x = \pm a, \quad (7)$$

$$\pm 4\pi\rho \partial_t^2 \eta = h_y \partial_x H_{0x} + H_{0y} \partial_y h_x - \partial_x(4\pi p + H_{0y} h_y), \quad x = \pm a, \quad (8)$$

где  $\pm \eta(z, t)$  — малые возмущения поверхностей проводника  $x = \pm a$  в его продольном сечении плоскостью  $y = 0$ .

Вспользуемся теперь наличием в задаче малого параметра  $a/b$ . Для невозмущенных магнитного поля и давления вблизи плоскости симметрии проводника  $y = 0$  в основном порядке разложения по  $a/b$  справедливо

$$\mathbf{H}_0 = \left\{ -\frac{2Iy}{cb^2}, \frac{\pi Ix}{abc}, 0 \right\}, \quad P_0 = \frac{\pi I^2(a^2 - x^2)}{2abc}. \quad (9)$$

Учитывая, что при малых  $a/b$  движение жидкости вблизи плоскости  $y = 0$  можно практически считать двумерным (характерный масштаб изменения величин вдоль оси  $y$  много больше, чем вдоль осей  $x$  и  $z$ ), введем функцию тока  $\psi(x, z, t)$ , для которой справедливо  $\partial_z \psi = -v_x|_{y=0}$  и  $\partial_x \psi = v_z|_{y=0}$ . Кроме того, введем пару функций  $h(x, z, t) = h_y|_{y=0}$  и  $4\pi\tilde{p}(x, z, t) = (4\pi p + H_{0y} h_y)_{y=0}$ . Далее, пренебрежем зависимостью возмущения магнитного поля  $\mathbf{h}$  от переменной  $y$ , что позволяет опустить в уравнениях (5) и (8) производную  $\partial_y h_x$ , значение которой невозможно

самосогласованно определить из системы (4)–(9). Отметим, что это допущение является единственным, не вытекающим из соображений симметрии в задаче. Приводя уравнения к безразмерному виду при помощи замен

$$\mathbf{r} \rightarrow (2\rho\nu_m^2 ab^3 c^2 I^{-2})^{1/4} \mathbf{r}, \quad t \rightarrow (2\rho ab^3 c^2 I^{-2})^{1/2} t,$$

$$\tilde{p} \rightarrow \left( \frac{2\rho\nu_m^2 I^2}{ab^3 c^2} \right)^{1/2} \tilde{p}, \quad h \rightarrow \left( \frac{2\pi^4 \rho\nu_m^2 I^2}{a^3 b c^2} \right)^{1/4} h,$$

получаем из (4)–(6) в основном порядке разложения по  $a/b$  следующую систему уравнений, из которой полностью исключена пространственная переменная  $y$ :

$$\partial_t \Delta_{\perp} \psi = \partial_z h, \quad (10)$$

$$\Delta_{\perp} \tilde{p} = -\partial_x h, \quad (11)$$

$$\partial_t h - \Delta_{\perp} h = \partial_z \psi, \quad (12)$$

где  $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_z^2$  — двумерный оператор Лапласа. Условия на границах  $x = \pm\alpha$  (7) и (8) принимают вид

$$\tilde{p} = 0, \quad h = \mp\eta, \quad \partial_t \eta = \mp\partial_z \psi, \quad \partial_t^2 \eta = \eta \mp 2\partial_x \tilde{p}, \quad (13)$$

где величина  $\alpha = [(I^2 a^3)/(2\rho\nu_m^2 b^3 c^2)]^{1/4}$  имеет смысл внешнего управляющего параметра. Уравнения (10)–(13) представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающую развитие неустойчивости токнесущего жидкометаллического порошка вблизи его плоскости симметрии  $y = 0$ .

Перейдем к линейному анализу устойчивости поверхности жидкости. Для этого представим функцию  $\tilde{p}$ ,  $h$ ,  $\psi$  и  $\eta$  в виде

$$\tilde{p}(x, z, t) = p'(x)e^{ikz+\delta t} + \text{к.с.}, \quad h(x, z, t) = h'(x)e^{ikz+\delta t} + \text{к.с.},$$

$$\psi(x, z, t) = \psi'(x)e^{ikz+\delta t} + \text{к.с.}, \quad \eta(z, t) = \eta'e^{ikz+\delta t} + \text{к.с.},$$

где  $k$  — волновое число, а  $\delta$  — инкремент неустойчивости (считаем величину  $\delta$  вещественной, т.е. ограничимся рассмотрением аperiодических неустойчивостей поверхности). Подставляя эти выражения в (10)–(13), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d_x^2 \psi' - k^2 \psi' = ik\delta^{-1} h',$$

$$\begin{aligned}d_x^2 p' - k^2 p' &= -d_x h', \\d_x^2 h' - (k^2 + \delta) h' &= -ik \psi'\end{aligned}$$

с необходимыми условиями при  $x = \pm\alpha$ :

$$p' = 0, \quad h' = \mp \eta', \quad \psi' = \pm i \eta' k^{-1} \delta, \quad d_x p' = \pm \eta' (1 - \delta^2)/2.$$

Решая эти уравнения, находим связь между величинами  $\delta$  и  $k$  (дисперсионное соотношение для поверхностных волн):

$$2k \operatorname{th}(k\alpha) \sum_{j=1}^2 A_j \operatorname{cth}(s_j \alpha) = 1 - \delta^2, \quad (14)$$

где мы обозначили  $s_{1,2} = \left(\delta/2 + k^2 \pm \sqrt{\delta^2/4 + k^2/\delta}\right)^{1/2}$ , а также:

$$A_1 = \frac{s_1(s_2^2 - k^2)}{(s_1^2 - k^2)(s_2^2 - s_1^2)}, \quad A_2 = -\frac{s_2(s_1^2 - k^2)}{(s_2^2 - k^2)(s_2^2 - s_1^2)}.$$

Сложность трансцендентного выражения (14) не позволяет исследовать его в общем случае, однако зависимость инкремента от волнового числа можно найти в явном виде в длинноволновом и коротковолновом пределах. Раскладывая (14) в степенной ряд по  $k$  и соответственно по  $k^{-1}$ , получаем с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$\delta = (\alpha/\pi)^4 k^2, \quad k \rightarrow 0, \quad (15)$$

$$\delta = 2^{-1} k^{-2/3}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где мы полагали  $\delta \geq 0$ , т.е. рассматривали неустойчивую ветвь дисперсионного соотношения. Из этих выражений видно, что инкремент неустойчивости  $\delta$  стремится к нулю при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$ . Это означает, что зависимость  $\delta$  от  $k$  — немонотонная. При некотором конечном  $k$  инкремент достигает равного  $\delta_{\max}$  максимального значения, определяющегося параметром задачи  $\alpha$ .

Оценим величину  $\delta_{\max}(\alpha)$ . Грубую оценку сверху можно получить по пересечению асимптотик (15) и (16). Инкременты, соответствующие (15) и (16), совпадают при  $k = 2^{-3/8}(\pi/\alpha)^{3/2}$ , и, следовательно,

$$\delta_{\max}(\alpha) < 2^{-3/4} \pi^{-1} \alpha.$$

Далее, оценить значение  $\delta_{\max}$  снизу можно, сравнивая инкременты неустойчивости для рассматриваемой нами задачи со свободной границей и задачи с закрепленной границей, получаемой из (10)–(13), если положить тождественно  $\eta = 0$ . В последнем случае можно считать, что  $h' \sim \psi' \sim \sin(\pi x/\alpha)$ ; подставляя эти соотношения в (10) и (12), находим следующее алгебраическое характеристическое уравнение:

$$\delta^2 + [k^2 + (\pi/\alpha)^2] \delta - k^2 / [k^2 + (\pi/\alpha)^2] = 0. \quad (17)$$

Для положительного корня этого уравнения, который определяет динамику неустойчивости, в длинноволновом пределе основной порядок асимптотики совпадает с (15), а в коротковолновом пределе будет:  $\delta \rightarrow k^{-2}$ . Это означает, что, как и для (14), максимальный инкремент неустойчивости соответствует конечному значению волнового числа  $k$ . Заметим, что при  $k \rightarrow \infty$  инкремент  $\delta$  затухает быстрее, чем в случае свободной границы (16). К аналогичному выводу можно прийти, сравнивая высшие порядки разложения инкрементов по степеням  $k$  в пределе  $k \rightarrow 0$ . Это позволяет высказать предположение, что при любом фиксированном  $k$  инкремент неустойчивости в задаче со свободной границей превышает инкремент для случая неподвижной границы, т.е. возможность деформации поверхности жидкости ускоряет развитие возмущений. В таком случае для инкремента неустойчивости, соответствующего (14), справедлива оценка:

$$\delta_{\max}(\alpha) > \delta_0(\alpha),$$

где  $\delta_0$  — максимум инкремента для (17). Величины  $\delta_0$ , а также значения волновых чисел  $k_0$  для наиболее быстрых пространственных гармоник находятся в результате совместного решения уравнения (17) и условия  $\partial_k \delta = 0$ . В частности, имеем:

$$\delta_0 = (\alpha/2\pi)^2, \quad k_0 = \pi/\alpha, \quad \alpha \rightarrow 0,$$

$$\delta_0 = 1, \quad k_0 = (\pi/\alpha)^{1/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

т.е. при малых значениях управляющего параметра  $\alpha \sim l^{1/2}$  характерный масштаб возбуждающей конвективной структуры сравним с толщиной проводящего слоя  $a$ , а при больших значениях  $\alpha$  наиболее быстрыми становятся мелкомасштабные моды. Этот вывод может быть применен и к рассматриваемому в настоящей работе случаю токонесущей проводящей жидкости со свободной границей.

Таким образом, на примере жидкометаллического проводника прямоугольного сечения нами показано, что существует основанный на конвективной магнитогидродинамической неустойчивости токнесущей среды механизм развития крупномасштабной неустойчивости поверхности жидкости. Отметим, что в случае цилиндрических проводников (применительно к описанию их стратификации на начальных стадиях электрического взрыва) для устранения расходимости в коротковолновом пределе в дисперсионных соотношениях возникает необходимость учета поверхностного натяжения [1,2].

Авторы благодарны А.М. Искольдскому за плодотворные дискуссии.

Данная работа выполнена при частичной поддержке грантом номер 63 по 6-му конкурсу-экспертизе 1999 года научных проектов молодых ученых РАН.

## **Список литературы**

- [1] *Абрамова К.Б., Валицкий В.П., Вандакуров Ю.В., Златин Н.А., Перегуд Б.П.* // ДАН СССР. 1966. Т. 167. С. 778.
- [2] *Абрамова К.Б., Златин Н.А., Перегуд Б.П.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 2007.
- [3] *Волков Н.Б., Зубарев Н.М., Зубарева О.В., Шкатов В.Т.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 13. С. 43.
- [4] *Volkov N.B., Zubarev N.M., Zubareva O.V., Shkatov V.T.* // Physica D. 1997. V. 109. P. 315.
- [5] *Iskoldsky A.M., Volkov N.B., Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // Chaos. 1996. V. 6. N 4. P. 568.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [7] *Волков Н.Б., Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 10. С. 1.