*01;03;08*

# Акустическое излучение нелинейно колеблющейся заряженной капли

© *А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Р. Гаибов, Д.Ф. Белоножко*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

*В окончательной редакции 31 мая 2001 г.*

Колеблющаяся в сжимаемой среде заряженная капля способна излучать звуковые волны. При расчетах в линейном по амплитуде колебания приближении при неизменном объеме капли в спектре ее звукового излучения наиболее интенсивным является излучение, связанное с основной модой. Дипольное излучение, обязанное возбуждением трансляционной моды, обнаруживается лишь при расчетах во втором порядке малости по амплитуде колебаний, когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию, имеются две с соседними номерами.

1. При исследовании взаимодействия звуковых волн с жидкокапельными системами, как правило, пренебрегают наличием у капель внутренних степеней свободы, связанных с капиллярными колебаниями капель, хотя хорошо известно, что частоты капиллярных колебаний капель с размерами, характерными для жидко-капельных систем естественного происхождения (туманов, облаков, дождя), приходятся на диапазоны частот звуковых волн и длинноволновых ультразвуковых (см., например, [1–4] и указанную там литературу). Наличие на каплях электрического заряда, отклонение формы капель от сферической, движение капель относительно внешней среды, учет их вязкости приводят к смещению спектра капиллярных колебаний в область более низких значений [4–6], т.е. в область звуковых волн, воспринимаемых человеческим слухом.

2. В связи со сказанным будем решать задачу о звуковом излучении колеблющейся капли радиусом $R$ идеальной несжимаемой электропроводной жидкости плотностью $\rho_1$, с коэффициентом поверхностного натяжения $\gamma$, имеющей заряд $Q$. Внешнюю среду будем принимать идеальной сжимаемой, характеризующейся скоростью звука $V$, диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и плотностью $\rho_2$. Все рассмотрение проведем

в сферической системе координат с началом в центре капли. Волновые движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ соответственно.

Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, примем, что форма капли — осесимметричная как в начальный момент, так и во все последующие моменты времени, а уравнение, описывающее ее поверхность, в полярной системе координат с началом в центре капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, имеет вид

$$r(\theta,t) = 1 + \xi(\theta,t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Система уравнений, описывающих эволюцию капли, состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi_1(\mathbf{r},t)$, волнового уравнения для потенциала поля скоростей $\psi_2(\mathbf{r},t)$ и уравнения Лапласа для электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r},t)$

$$\Delta\psi_1(\mathbf{r},t) = 0; \quad \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - \Delta\psi_2 = 0; \quad \Delta\Phi(\mathbf{r},t) = 0$$

и граничных условий

$$r \to 0: \qquad \psi_1(\mathbf{r},t) \to 0;$$

$$r \to \infty: \qquad \psi_2(\mathbf{r},t) \to 0; \quad \Phi(\mathbf{r},t) \to 0;$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + ik\psi_2 = o\left(\frac{1}{r}\right); \quad k = \omega/V;$$

$$r = 1 + \xi(\theta,t): \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta};$$

$$\Delta p - \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 = \operatorname{div}\mathbf{n}; \quad \Phi(r,t) = \Phi_s(t).$$

Для замыкания выписанной системы введем условия сохранения полного заряда $Q$, объема капли $v = 4\pi/3$ и неподвижности центра масс:

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi)ds = Q, \quad S = [r = 1 + \xi(\theta,t),\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi];$$

$$\int_v r^2 dr \sin\theta\, d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi,$$

$$v = [0 \le r \le 1 + \xi(\theta,t),\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi];$$

$$\int\limits_{v} \mathbf{e}_r \cdot r^3 dr \cdot \sin\theta \, d\theta d\phi = 0,$$

$$v = [0 \le r \le 1 + \xi(\theta, t), \; 0 \le \theta \le \pi, \; 0 \le \phi \le 2\pi].$$

Начальные условия задаются в виде виртуальной деформации равновесной сферической формы капли при равенстве нулю начальной скорости движения всех точек поверхности

$$t = 0: \quad \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Xi} h_i P_i(\mu); \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0;$$

$$\sum_{j \in \Xi} \alpha_j = 1; \quad \mu = \cos\theta. \tag{1}$$

В вышеприведенных соотношениях $\Xi$ — множество значений номеров изначально возбужденных мод; $\Delta p$ — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии равновесия; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности капли; $\mathbf{e}_r$ — радиальный орт сферической системы координат; $\Phi_s(t)$ — постоянный вдоль поверхности капли потенциал; $\varepsilon$ — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли; $P_j(\mu)$ — полиномы Лежандра порядка $j$; $\xi_0$ и $\xi_1$ — константы, определяемые из условий сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс в начальный момент времени и с точностью до слагаемых второго порядка малости по $\varepsilon$, равные:

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j}{(2j+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{9 j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} + O(\varepsilon^3).$$

3. Решение сформулированной задачи стандартными методами в первом порядке малости по амплитуде капиллярных колебаний приводит к размерному дисперсионному уравнению

$$\omega_j^2 = (j-1) \frac{\sigma}{R^3} [W - (j+2)] \left[ \frac{(\rho_2/\rho_1) \cdot h_j^{(2)}(k_j R)}{k_j R h_{j-1}^{(2)}(k_j R) - (j+1) h_j^{(2)}(k_j R)} - \frac{1}{j} \right]^{-1};$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\sigma R^3},$$

где $h_j^{(2)}$ — вторая сферическая функция Ханкеля ($j \ge 2$); $k$ — волновое число.

Корни этого уравнения несложно найти численным интегрированием. Из них первые два соответствуют затухающим капиллярным колебаниям, затухание которых обусловлено потерями энергии на излучение звуковых волн. Находя $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей во внешней для капли среды, несложно посчитать и интенсивность звукового излучения капли, имея в виду, что центр масс капли при колебаниях покоится. Тогда в бесконечном наборе звуковых излучателей, который представляет собой капля, главный вклад вносит квадрупольное излучение основной моды $(j = 2)$.

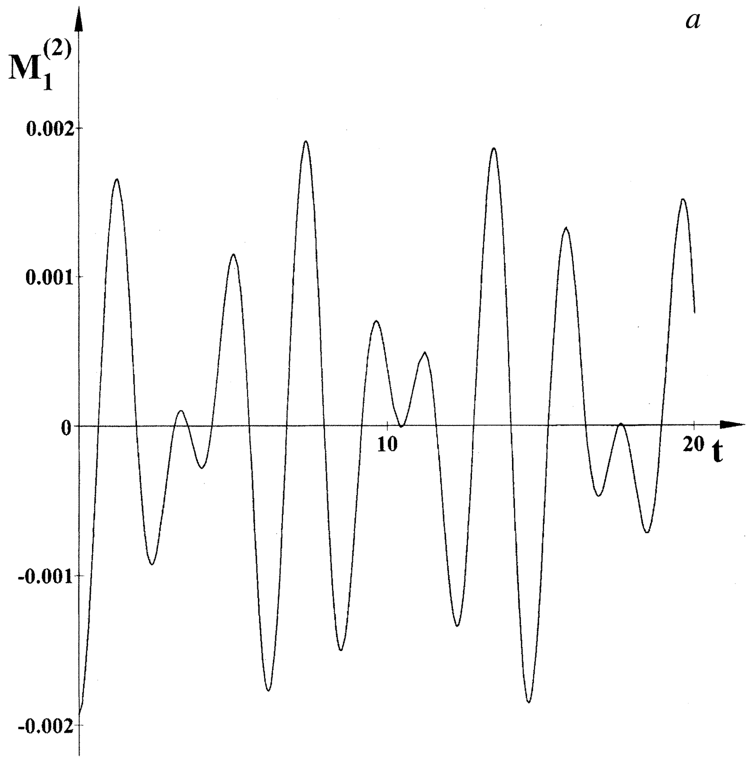
Пусть дождевая капля с $R = 250\,\mu$m совершает осцилляции за счет возбуждения основной моды своих колебаний $(j = 2)$ с амплитудой $C_2 = 0.1R$ (согласно [7–8], амплитуды осцилляций дождевых капель могут быть весьма большими, вплоть до $C_2 \approx R$). При $\sigma = 73\,$dyn/cm, $\rho_1 = 1\,$g/cm$^3$, $\omega_2 \approx 5.3 \cdot 10^3\,$s$^{-1}$, $k_2 \approx 0.16\,$cm$^{-1}$, $k_2R \approx 4 \cdot 10^{-3}$, $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3}\,$g/cm$^3$, $V = 3.3 \cdot 10^4\,$cm/s, $W = 1$ полную интенсивность звукового излучения капли, связанную с основной модой ее осцилляций, несложно найти в виде [9]:

$$I = \rho_2 V \oint \overline{v^2} ds \approx \frac{4\pi\rho_z V C_2^2 R^2 \omega^2}{|k_2 R h_1^{(2)}(k_2 R) - 3h_2^{(2)}(k_2 R)|^2} \approx 7.6 \cdot 10^{-16}\,\text{erg/s}.$$

Принимая в модельном рассмотрении, что в одном кубическом километре пространства, занятого дождем, находится $3 \cdot 10^{14}$ капель с $R = 250\,\mu$m (одна капля на $\approx 3\,$cm$^3$), несложно найти, что интегральная интенсивность звукового излучения, связанного с основной модой капиллярных колебаний капель в объеме $1\,$km$^3$, будет $\approx 0.23\,$erg/s на частоте $\omega_2 \approx 5.3 \cdot 10^3\,$s$^{-1}$. Это дает силу звука $\approx 17\,$dB на границе излучающего объема, что соответствует силе звука громкого шепота человека.

4. Решение сформулированной в п. 2 задачи в квадратичном порядке малости по амплитуде осцилляций стандартными методами теории возмущений [10] (как это сделано, например, в [11,12]) показывает, что из-за требования неподвижности центра масс колеблющейся капли возбуждается трансляционная мода $(n = 1)$, когда в спектре изначально возбужденных мод имеются две соседние. Выражение для изменения со временем амплитуды трансляционной моды осциллирующей капли, когда изначально возбуждены две моды с номерами $j$ и $j + 1$, имеет вид (см. также рисунок):

$$M_1^{(2)}(t) = -\varepsilon^2 R \frac{9j\alpha_{j-1}\alpha_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_j t) \cdot \cos(\omega_{j-1} t). \qquad (2)$$

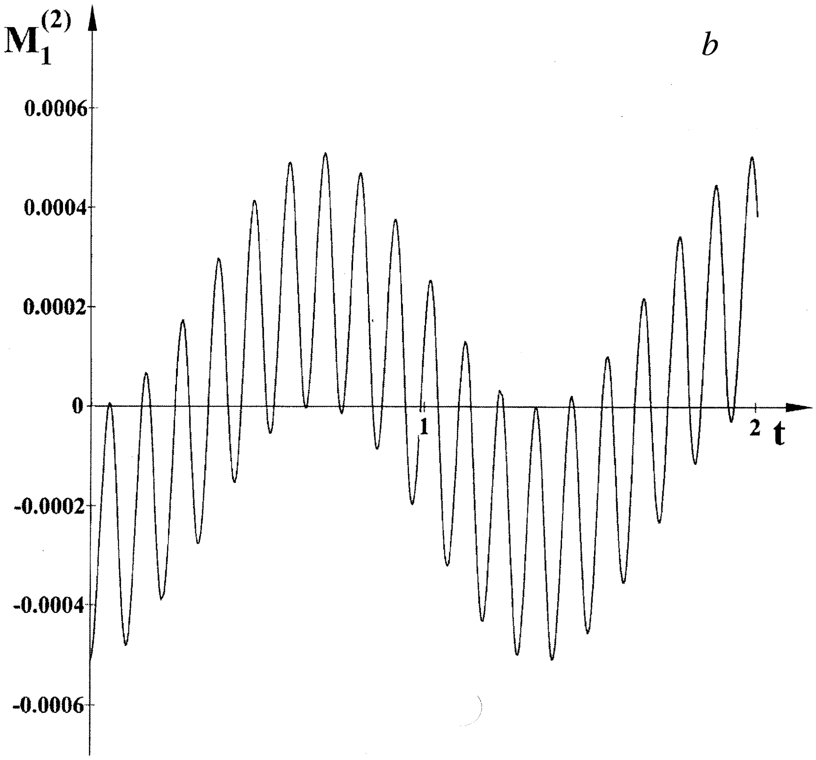



Зависимость безразмерной амплитуды $M_1^{(2)}$ осцилляций трансляционной $(n = 1)$ моды капли от безразмерного времени $t$, когда начальная деформация исходной равновесной сферической формы задана в виде: $a$ — $\varepsilon[P_2(\mu) + P_3(\mu)]/2$; $b$ — $\varepsilon[P_{10}(\mu) + P_{11}(\mu)]/2$.

Выражение для интенсивности дипольного звукового излучения капли, трансляционная мода которой осциллирует с частотой $\omega_j$ в сжимаемой среде с кинематической вязкостью $\nu$, когда радиус капли $R$ сравним по величине с $(\nu/\omega_j)^{1/2}$ и, кроме того, $R(\omega_j/2\nu)^{1/2} \ll 1$, имеет вид [9]:

$$I_d = \frac{3\pi\rho_2\nu^2R^2\omega_j^2U^2}{2V^3}, \qquad (3)$$

где $U$ — амплитудное значение скорости движения точек поверхности капли.




*Продолжение рисунка.*

Из (2) легко найти скорость $U$, подставив которую в (3) при тех же значениях входящих величин, что и в выше приведенном примере, принимая, что $j = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $\nu = 0.15\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.5$, несложно оценить интенсивность дипольного звукового излучения, связанного с возбуждением трансляционной моды: $I_d \approx 1.1 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{erg/s}$. Интегральное излучение звука из облака в $1\,\mathrm{km}^3$ будет иметь громкость $\approx 28\,\mathrm{dB}$ (что соответствует тихой человеческой речи).

5. Заключение. Интенсивность дипольного акустического излучения, связанного с возбуждением трансляционной моды ($n = 1$) колеблющейся заряженной капли (проявляющейся как нелинейный эффект во втором порядке малости по амплитуде колебания), имеет тот же порядок

величины, что и интенсивность квадрупольного звукового излучения капли, связанного с осцилляциями ее основной моды ($n = 2$) в линейном приближении по амплитуде осцилляций.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

## Список литературы


[1] *Won-Kyu Rhim, Sang Kun Chung, Hyson M.T.* et al. // IEEE Transaction on Industry Applications. 1987. V. 1A-23. № 6. P. 975–979.
[2] *Шагапов В.Ш.* // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 5. С. 506–512.
[3] *Trinh E.H., Holt R.G., Thiessen D.B.* // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 1. P. 43–61.
[4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[5] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 8. С. 28–36.
[6] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 7. С. 26–34.
[7] *Стерлядкин В.В.* // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
[8] *Beard K.V., Ali Tokay* // Geophysical Research Letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1953. 788 с.
[10] *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[11] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 8. С. 45–52.
[12] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 2. С. 27–34.