

01;03

## **Глобальный конечномерный аттрактор и когерентные вихревые структуры в одной задаче магнитной гидродинамики**

© Н.Б. Волков

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург  
E-mail: nbv@ami.uran.ru, nbv@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 24 мая 2001 г.

Получено и исследовано точное решение стационарной задачи магнитной гидродинамики для случая несжимаемого цилиндрического проводника с постоянными электропроводностью и сдвиговой вязкостью. Показано, что размерность глобального конечномерного аттрактора в рассматриваемой задаче равна двум, а сам аттрактор является устойчивым фокусом. Пространственные когерентные структуры представляют собой две периодические системы взаимодействующих гидродинамических и токовых вихрей.

Нахождение и исследование стационарных решений бесконечномерных нелинейных динамических систем, в частности гидродинамических и магнитогидродинамических (МГД), а также доказательство того, что эти решения являются глобальными конечномерными аттракторами, имеют важное фундаментальное и прикладное значение [1–4]. Ранее [5] нами была получена с помощью приближенной подстановки и метода Галеркина [6] нестационарная трехмодовая модель и показано (численно и аналитически), что в этой модели, используемой в качестве нелинейного элемента, включенного параллельно нагрузочному сопротивлению в электрическую цепь с источником постоянного напряжения, существует стационарное состояние. Это состояние соответствует глобальному конечномерному аттрактору с размерностью, равной трем, исходной бесконечномерной динамической системы. Целью предлагаемой работы является нахождение точной подстановки, позволяющей доказать, что получаемое стационарное решение является глобальным конечномерным аттрактором в системе МГД уравнений (бесконечномерной динамической системе), и исследовать когерентные пространственные (гидродинамические и токовые) структуры.

Стационарное решение МГД уравнений будем искать для случая цилиндрического жидкометаллического проводника радиусом  $r_0$ , длиной  $l \gg r_0$  и постоянными плотностью  $\rho$ , электропроводностью  $\sigma$  и сдвиговой вязкостью  $\eta$ . Стационарные МГД уравнения имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1)$$

$$-\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{4\pi\rho} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) + \nu \Delta \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B} = 0; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4)  $\mathbf{v}, \mathbf{B}, P$  — соответственно скорость, магнитная индукция и давление,  $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость,  $\nu_m = c^2(4\pi\sigma)^{-1}$  — магнитная вязкость,  $c$  — скорость света. Из уравнения (1) следует, что  $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$ , где векторный потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет кулоновской калибровке:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Полагая с учетом симметрии задачи, что  $\mathbf{A} = \{0, A(r, z), 0\}$ ,  $\mathbf{B} = \{0, B(r, z), 0\}$  и

$$B(r, z) = B_1(r) + h(r, z) = B_0 \frac{i}{I_0} \frac{r}{r_0} + h(r, z), \quad B_0 = \frac{2I_0}{cr_0}, \quad (5)$$

преобразуем уравнения (1)–(4) к виду:

$$\frac{\partial \{\hat{D}A, A\}_s}{\partial \{r, z\}} - 2 \frac{\hat{D}A}{r} \frac{\partial A}{\partial z} + \mathcal{R} \frac{\nu_m \nu}{B_0 r_0^3} \frac{i}{I_0} \frac{\partial h}{\partial z} + \nu \hat{D}^2 A = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \{h, A\}_s}{\partial \{r, z\}} - 2 \frac{h}{r} \frac{\partial A}{\partial z} + \nu_m \hat{D} h = 0. \quad (7)$$

В уравнениях (6), (7)

$$\hat{D} = \Delta - \frac{1}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{r \partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial \{a, b\}_s}{\partial \{r, z\}} = \frac{\partial r a}{r \partial r} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial r b}{r \partial r}$$

— скобка Пуассона;  $i$  — электрический ток в проводнике;  $I_0$  — характерное значение электрического тока;  $\mathcal{R} = B_0^2 r_0^2 (2\pi\rho\nu_m\nu)^{-1}$  — магнитное число Рэлея [5,7].

Граничные условия для уравнений (6), (7) имеют вид:

$$A(0, z) = \hat{D}A(0, z) = A(r_0, z) = \hat{D}A(r_0, z) = 0,$$

$$A\left(r, -\frac{l}{2}\right) = \hat{D}A\left(r, -\frac{l}{2}\right) = A\left(r, \frac{l}{2}\right) = \hat{D}A\left(r, \frac{l}{2}\right) = 0, \quad (8)$$

$$h(0, z) = h(r_0, z) = 0, \quad h\left(r, -\frac{l}{2}\right) = h\left(r, \frac{l}{2}\right). \quad (9)$$

Для замыкания системы уравнений (6), (7) необходимо задать также способ нахождения электрического тока  $i$ . Примем, что жидкометаллический проводник включен параллельно нагрузочному сопротивлению  $R_L$  под постоянное напряжение  $e$  (начальное сопротивление проводника  $R_{p0} = l(\pi r_0^2 \sigma)^{-1}$  удовлетворяет условию:  $R_L \gg R_{p0}$ ). В этом случае

$$e = \frac{c}{4\pi\sigma} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{\partial r B}{r \partial r} \right)_{r=r_0} dz = \frac{c B_0 l}{2\pi\sigma r_0} \left( \frac{i}{I_0} + \frac{1}{2l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{\partial r h}{r \partial r} \right)_{r=r_0} dz \right).$$

Определяя характеристическое значение тока  $I_0$  из условия  $e = R_{p0} I_0$ , можно найти ток:

$$\frac{i}{I_0} = 1 - \frac{1}{2l B_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{\partial r h}{r \partial r} \right)_{r=r_0} dz. \quad (10)$$

Принимая во внимание (10), запишем уравнение (6) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\hat{D}A, A\}_s}{\partial \{r, z\}} - 2 \frac{\hat{D}A}{r} \frac{\partial A}{\partial z} + \mathcal{R} \frac{\nu_m \nu}{B_0 r_0^3} \left( 1 - \frac{1}{2l B_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{\partial r h}{r \partial r} \right)_{r=r_0} dz \right) \frac{\partial h}{\partial z} \\ + \nu \hat{D}^2 A = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая симметрию задачи, используем для  $A(r, z)$  подстановку, удовлетворяющую граничным условиям (8):

$$A(r, z) = X \nu_m \frac{g_1^2 + (kr_0)^2}{kr_0} J_1\left(g_1 \frac{r}{r_0}\right) \sin(kz), \quad (12)$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя;  $g_1 = 3.83171$  — первый нуль функции  $J_1(x)$ ;  $k$  — волновое число,  $X$  — амплитуда.

Подстановку для магнитной индукции  $h(r, z)$  будем искать в виде:

$$h(r, z) = B_0 \left( Y f_1 \left( \frac{r}{r_0} \right) \cos kz + f_2 \left( \frac{r}{r_0} \right) \right). \quad (13)$$

Входящие в (13) неизвестные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$f_1(0) = f_1(1) = 0, \quad f_2(0) = f_2(1) = 0. \quad (14)$$

Подставляя (12), (13) в уравнение (11), умножая полученное выражение на  $\sin(kz)$  и интегрируя по  $z$  в пределах от  $-l/2$  до  $l/2$ , получим:

$$-\frac{\mathcal{R}(kr_0)^2}{(g_1^2 + (kr_0)^2)^3} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{r} df_2(\bar{r})}{\bar{r} d\bar{r}} \right)_{\bar{r}=1} \right) Y f_1(\bar{r}) + X J_1(g_1 \bar{r}) = 0, \quad (15)$$

где  $\bar{r} = rr_0^{-1}$ . Уравнение (15) будет выполняться тождественно во всех точках по радиусу проводника, если  $f_1(\bar{r}) = J_1(g_1 \bar{r})$ . При этом также будут тождественно выполняться граничные условия для  $f_1(\bar{r})$ :  $f_1(0) = f_1(1) = 0$ . Таким образом, выражение (15) принимает вид:

$$\left\{ -p(k) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{r} f_2(\bar{r})}{\bar{r} d\bar{r}} \right)_{\bar{r}=1} \right) Y + X \right\} J_1(g_1 \bar{r}) = 0, \quad (16)$$

где  $p(k) = \mathcal{R}\mathcal{R}_c(k)^{-1}$  — управляющий параметр;

$$\mathcal{R}_c(k) = \frac{(g_1^2 + (kr_0)^2)^3}{(kr_0)^2}$$

— критическое число Рэлея, имеющее минимум при  $k_0 r_0 = g_1 / \sqrt{2}$  (волновое число  $k_0 = 2\pi/k_0 = 2\sqrt{2}\pi r_0 / g_1 = 2.32r_0$  [5,8]):  $\mathcal{R}_c(k_0 r_0) = 27g_1^4/4$  (ниже мы везде полагаем, что  $k = k_0$ ).

Из (16) следует условие, которому должна удовлетворять производная от функции  $f_2(\bar{r}) \equiv f(\bar{r})$  при  $\bar{r} = 1$ :

$$\left( \frac{d\bar{r} f(\bar{r})}{\bar{r} d\bar{r}} \right)_{\bar{r}=1} = 2 \left( 1 - \frac{X}{p_0 Y} \right), \quad (17)$$

где  $p_0 = p(k_0)$ .

Для удобства дальнейшего использования запишем выражения (12), (13) в виде (для  $k_0 = g_1(\sqrt{2r_0})^{-1}$ ):

$$A(r, z) = \sqrt{2}g_1\nu_m X J_1\left(g_1 \frac{r}{r_0}\right) \sin\left(\frac{g_1 z}{\sqrt{2r_0}}\right); \quad (18)$$

$$h(r, z) = B_0\left(Y J_1\left(g_1 \frac{r}{r_0}\right) \cos\left(\frac{g_1 z}{\sqrt{2r_0}}\right) + f\left(\frac{r}{r_0}\right)\right). \quad (19)$$

После подстановки (18), (19) в уравнение (7) получим:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d}{d\bar{r}}\left(\frac{d\bar{r}f(\bar{r})}{\bar{r}d\bar{r}} J_1(g_1\bar{r})\right)\right) \\ & + XYg_1^3 J_1(g_1\bar{r}) \left(J_0(g_1\bar{r}) - 2\frac{J_1(g_1\bar{r})}{g_1\bar{r}} \cos^2\left(\frac{g_1 z}{\sqrt{2r_0}}\right)\right) \\ & + g_1^2 J_1(\bar{r}) \left(-\frac{3}{2}Y + X J_1(g_1\bar{r}) - 2X \frac{f(\bar{r})}{\bar{r}}\right) \cos^2\left(\frac{g_1 z}{\sqrt{2r_0}}\right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрируя выражение (20) по  $z$ , получим:

$$\frac{d}{d\bar{r}}\left(\frac{d\bar{r}f(\bar{r})}{\bar{r}d\bar{r}} + \frac{1}{2}XYg_1^2 J_1^2(g_1\bar{r})\right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{d\bar{r}f(\bar{r})}{\bar{r}d\bar{r}} + \frac{1}{2}XYg_1^2 J_1^2(g_1\bar{r}) = C. \quad (21)$$

Константу  $C$  можно найти путем сравнения (21) при  $\bar{r} = 1$  с условием (17):

$$C = 2\left(1 - \frac{X}{p_0 Y}\right). \quad (22)$$

Интегрируя (21) и учитывая (22), получим выражение для  $f(\bar{r})$ :

$$\begin{aligned} f(\bar{r}) & = \left(1 - \frac{X}{p_0 Y} - \frac{1}{2}g_1^2 XY (J_0^2(g_1\bar{r}) + J_1^2(g_1\bar{r}))\right) \bar{r} \\ & + g_1 XY J_0(g_1\bar{r}) J_1(g_1\bar{r}). \end{aligned} \quad (23)$$

Из граничного условия для  $f(\bar{r})$  при  $\bar{r} = 1$  (см. (14)) следует первое уравнение для нахождения амплитуд  $X, Y$ :

$$1 - \frac{X}{p_0 Y} - \frac{1}{2}g_1^2 XY J_0^2(g_1) = 0. \quad (24)$$

Умножим уравнение (20) на  $\cos(g_1 z / (\sqrt{2} r_0))$  и проинтегрируем по  $z$ .  
Получим:

$$\left(-\frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}X \frac{d\bar{r}f(\bar{r})}{\bar{r}d\bar{r}} - X \frac{f(\bar{r})}{\bar{r}}\right) J_1(g_1 \bar{r}) = 0,$$

откуда

$$-\frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}X \frac{d\bar{r}f(\bar{r})}{\bar{r}d\bar{r}} - X \frac{f(\bar{r})}{\bar{r}} = 0. \quad (25)$$

Интегрируя (25), получим:

$$\left(-\frac{3}{2} + X^2 J_0^2(g_1)\right) Y = 0.$$

Для интересующих нас нетривиальных решений отсюда следует выражение для амплитуды  $X$ :

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{J_0(g_1)}. \quad (26)$$

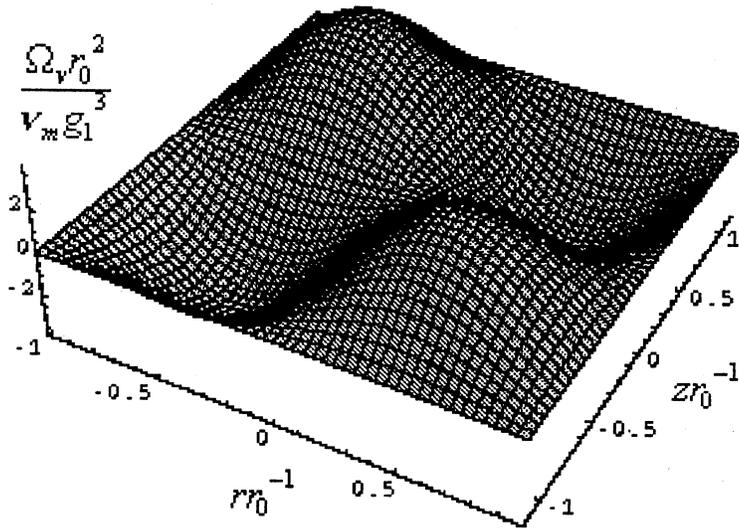
Решая уравнение (24), найдем выражения для  $Y$ :

$$Y_{1,2} = \frac{1}{g_1^2 X J_0^2(g_1)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g_1^2 X^2 J_0^2(g_1)}{p_0}}\right). \quad (27)$$

В общем случае каждому из двух значений  $X$  соответствуют два значения  $Y$ . При  $1 \leq p_0 < 3g_1^2$  значения амплитуды  $Y$  комплексны. В этом интервале значений управляющего параметра  $p_0$  происходит установление токовой вихревой структуры. В области значений управляющего параметра  $p_0 \geq 3g_1^2$  ( $\bar{p} = p_0(3g_1^2)^{-1} \geq 1$ ) имеют физический смысл следующие значения амплитуды  $Y$ :

$$Y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{g_1^2 J_0(g_1)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{p}}}\right). \quad (28)$$

Анализ выражения (28) показывает, что амплитуда  $Y$  достаточно быстро выходит в область асимптотически слабой зависимости от управляющего параметра. Это связано с резким уменьшением электрического тока  $\bar{i} = i_0^{-1} = 1 - 0.54(1 - \sqrt{1 - \bar{p}^{-1}})$  в области малых, но конечных, надкритичностей  $\varepsilon = \bar{p} - 1$ .



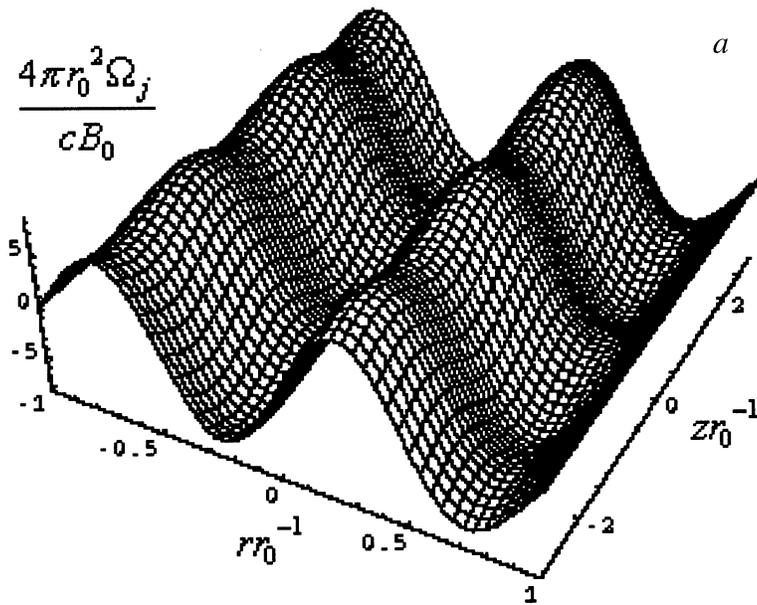
**Рис. 1.** Пространственная структура гидродинамических вихрей в элементарной ячейке вихревой решетки (в области  $-\sqrt{2}\pi g_1^{-1} = -1.16 \leq z r_0^{-1} \leq \sqrt{2}\pi g_1^{-1} = 1.16$ ).

Таким образом, нами найдено точное стационарное решение системы уравнений (1)–(4), фазовое пространство которой бесконечномерно (ниже  $\bar{z} = z r_0^{-1}$ ):

$$A(\bar{r}, \bar{z}) = \sqrt{2} g_1 \nu_m X J_1(g_1 \bar{r}) \sin\left(\frac{g_1 \bar{z}}{\sqrt{2}}\right); \quad (29)$$

$$B(\bar{r}, \bar{z}) = B_0 \left( \left( 1 - \frac{g_1^2 X Y J_0^2(g_1)}{2} \right) \bar{r} + Y J_1(g_1 \bar{r}) \cos\left(\frac{g_1 \bar{z}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{g_1^2 X Y}{2} (J_0^2(g_1) - J_0^2(g_1 \bar{r}) - J_1^2(g_1 \bar{r})) \bar{r} + g_1 X Y J_0(g_1 \bar{r}) J_1(g_1 \bar{r}) \right). \quad (30)$$

Размерность фазового пространства решения (29), (30) равна двум. Анализ устойчивости этого решения с помощью исследования системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для возмущений амплитуд  $X$  и  $Y$  показывает, что стационарное решение (29), (30) соответствует глобальному конечномерному аттрактору — устойчивому фокусу.



**Рис. 2.** Пространственная структура токовых вихрей в области  $-5\pi(\sqrt{2}g_1)^{-1} = -3.48 \leq z r_0^{-1} \leq 5\pi(\sqrt{2}g_1)^{-1} = 3.48$ .  $a - \bar{p} = 1$ ;  $b - \bar{p} = 1.05$ .

Стационарное решение (29), (30) позволяет также исследовать пространственные когерентные гидродинамические и токовые структуры. Поскольку мы рассматриваем несжимаемую проводящую жидкость, гидродинамическая пространственная структура представляет собой периодическую вихревую решетку. Структура гидродинамического вихря определяется выражением:

$$\Omega_v(\bar{r}, \bar{z}) = -\hat{D}A(\bar{r}, \bar{z}) = -2\sqrt{3} \frac{\nu_m g_1^3}{r_0^2 J_0(g_1)} J_1(g_1 \bar{r}) \sin\left(\frac{g_1 \bar{z}}{\sqrt{2}}\right). \quad (31)$$

На рис. 1 показано распределение относительной завихренности  $\bar{\Omega}_v = \Omega_v r_0^2 (\nu_m g_1^3)^{-1}$  в элементарной ячейке вихревой решетки  $(-\sqrt{2}\pi g_1^{-1} = -1.16 \leq \bar{z} \leq \sqrt{2}\pi g_1^{-1} = 1.16)$ , содержащей два кольцевых вихря разного знака.

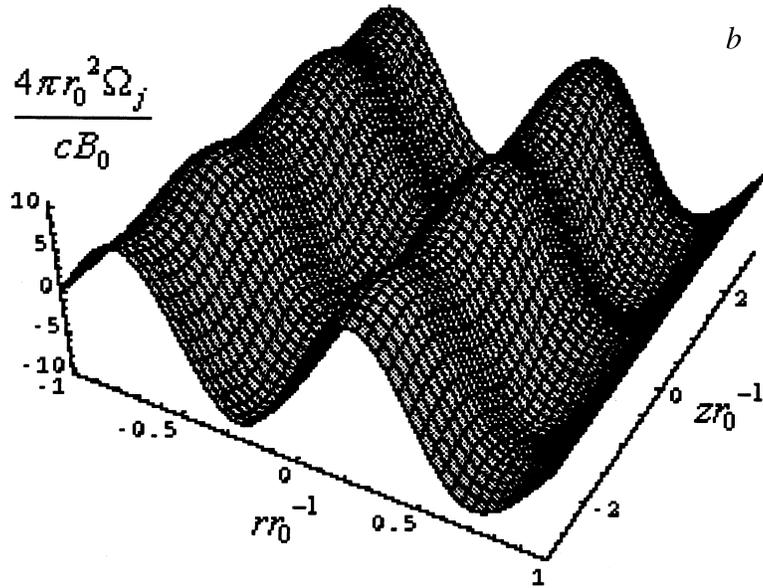


Рис. 2. (продолжение).

Система гидродинамических вихрей взаимодействует со второй вихревой структурой, представляющей собой токовую вихревую решетку с тем же периодом, что и система гидродинамических вихрей. Вектор завихренности плотности тока  $\Omega_j$  определяется выражением  $\Omega_j = c(4\pi)^{-1} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$  и имеет вследствие симметрии задачи одну азимутальную компоненту:

$$\Omega_j(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{cB_0}{4\pi r_0^2 J_0(g_1)} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{p}}} \right) \left( -\sqrt{\frac{3}{2}} J_1(g_1 \bar{r}) \cos\left(\frac{g_1 \bar{z}}{\sqrt{2}}\right) + 2 \frac{g_1 J_1(g_1 \bar{r})}{J_0(g_1)} \left( J_0(g_1 \bar{r}) - \frac{J_1(g_1 \bar{r})}{g_1 \bar{r}} \right) \right). \quad (32)$$

Рис. 2, *a, b* показывают распределение относительной завихренности векторного поля плотности электрического тока  $\Omega_j = 4\pi r_0^2 (cB_0)^{-1}$  в области  $-5\pi(\sqrt{2}g_1)^{-1} = -3.48 \leq \bar{z} \leq 5\pi(\sqrt{2}g_1)^{-1} = 3.48$

для двух значений управляющего параметра  $\bar{p}$ :  $\bar{p} = 1$  (рис. 2, *a*),  $\bar{p} = 1.05$  (рис. 2, *b*). Дальнейшее увеличение  $\bar{p}$  практически не изменяет структуру токовых вихрей в результате быстрого выхода амплитуды  $Y(\bar{p})$  на асимптотику.

Таким образом, нами получено и исследовано точное стационарное решение системы магнитогидродинамических уравнений несжимаемой проводящей жидкости с постоянными проводимостью и сдвиговой вязкостью, размерность фазового пространства которого равна двум. Показано, что это решение соответствует глобальному конечномерному аттрактору — устойчивому фокусу. Когерентные пространственные структуры представляют собой две периодические системы взаимодействующих кольцевых гидродинамических и токовых вихрей с размером элементарной ячейки  $\lambda = 2.32r_0$ .

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить А.Б. Борисова и В.Н. Скокова за интерес к работе и стимулирующие обсуждения.

## Список литературы

- [1] *Temam R.* // *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* N.Y., etc.: Springer, 1988.
- [2] *Бабин А.В., Вишик М.И.* // УМН. 1983. Т. 38. В. 4. С. 133.
- [3] *Babin A.V., Vishik M.I.* // *J. Matg. Pures et Appl.* 1983. V. 62. N 4. P. 441.
- [4] *Чуешов И.Д.* // УМН. 1993. Т. 48. В. 3. С. 135.
- [5] *Iskoldsky A.M., Volkov N.B., Zubareva O.V.* // *Physica D*, 1996. V. 91. P. 182.
- [6] *Fletcher C.A.J.* *Computational Galerkin Methods.* N.Y., etc.: Springer, 1984; К. Флетчер, пер. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
- [7] *Волков Н.Б., Искольдский А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 560.
- [8] *Волков Н.Б., Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. С. 1868.