01;03

Обобщенный инвариант Честера–Уизема

© А.В. Омельченко

С.-Петербургский государственный университет
E-mail: vmu@peterlink.ru

Поступило в Редакцию 28 мая 2001 г.

Решается задача взаимодействия сильного разрыва со слабым для общего случая системы квазилинейных уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Доказывается, что произведение левого собственного вектора системы на производную вектор-функции вдоль сильного разрыва не меняется в процессе взаимодействия. Приводятся примеры использования указанного факта в задачах газовой динамики.

Рассматривается система квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными, гиперболическая по t в некоторой односвязной области Ψ переменных (x, t, u) и приводящаяся к нормальной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\,\frac{\partial u}{\partial x} = b. \tag{1}$$

Здесь $u = u[N]$ — вектор неизвестных функций, N — индексное множество размером $|N| = n$, $A = A[N, N]$ и $b = b[N]$ — известные матрица и вектор, зависящие от вектора u и двух независимых переменных x и t. Домножая (1) слева на левый собственный вектор $L^{(k)}$ матрицы A, получим эквивалентную (1) систему в характеристической форме

$$L^{(k)}V + \lambda_k L^{(k)}U = L^{(k)}b, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь $V = \partial u/\partial t$, $U = \partial u/\partial x$, λ_k — соответствующее $L^{(k)}$ собственное значение матрицы A. Далее будем считать, что в каждой точке области Ψ собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A вещественны и различны, т. е. ограничимся рассмотрением системы, гиперболических в узком смысле [1].

При определенных граничных условиях непрерывно дифференцируемые решения $u(x, t)$ системы (1) отсутствуют. На практике это означает, что в области Ω изменения независимых переменных (x, t) имеются одна или несколько линий разрыва функции $u(x, t)$ (линии

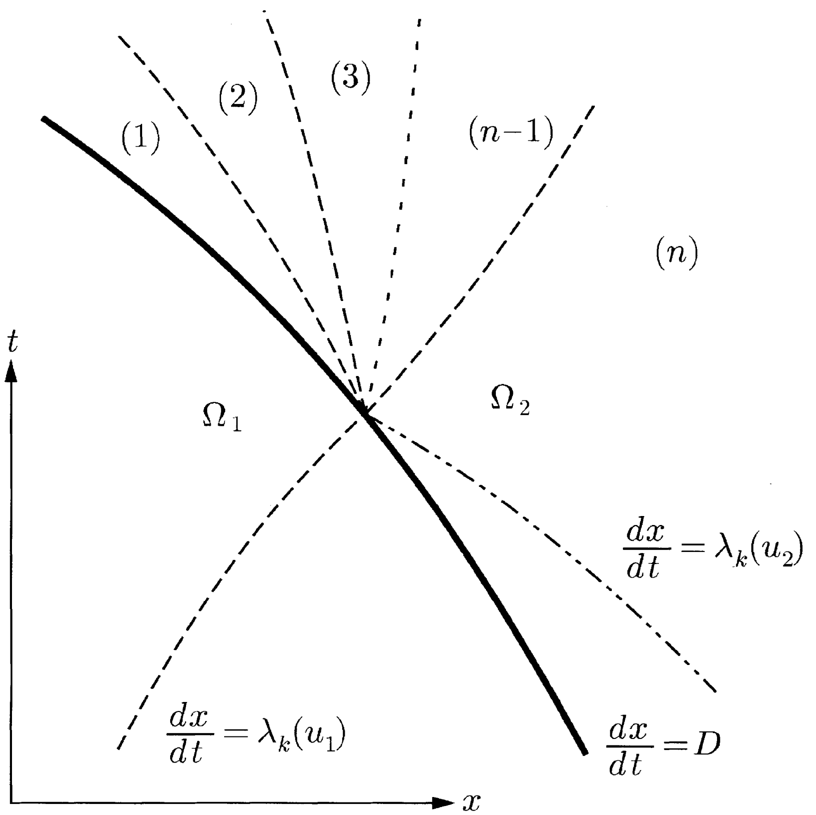

Схема взаимодействия сильного разрыва индекса 1 со встречным слабым разрывом индекса k.

сильного разрыва) или ее производных (линии слабого разрыва). Предположим, что в рассматриваемой области имеется единственная линия сильного разрыва (см. рисунок), траектория которой задается уравнением $x'(t) = D$. Решение системы (1) в этом случае можно построить, разбивая область Ω на две подобласти — Ω_1 и Ω_2, разделенные линией сильного разрыва, и записывая из соответствующих (1) интегральных законов сохранения [1] на линии $x(t)$ разрыва так называемого условия динамической совместимости

$$D[u] = [\psi(u, x, t)], \quad [u] = u_2 - u_1, \quad D = x'(t),$$

связывающие левые ($u_1 \in \Omega_1$) и правые ($u_2 \in \Omega_2$) предельные значения решения на линии разрыва. Как показано, например, в [2], построенное таким образом решение удовлетворяет требованиям единственности и непрерывной зависимости решения от начальных, если на линии $x(t)$ сильного разрыва выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \lambda_k(u_1(t), x(t), t) > D > \lambda_k(u_2(t), x(t), t), \\ \lambda_{k-1}(u_1(t), x(t), t) > D > \lambda_{k+1}(u_2(t), x(t), t). \end{gathered} \tag{3}$$

Номер k, для которого выполнены условия (3), называют индексом разрыва. Далее для определенности будем считать, что индекс разрыва $k = 1$. Условия (3) означают, что в любую точку сильного разрыва индекса 1 приходят $n + 1$ характеристик (n характеристик, лежащих в подобласти Ω_1 и отвечающих $\lambda_k(u_1(t), x(t), t)$, $k = 1, \dots, n$, а также характеристика, относящаяся к подобласти Ω_2 и соответствующая $\lambda_1(u_2(t), x(t), t)$), а исходят $n - 1$ характеристик, отвечающих $\lambda_k(u_2(t), x(t), t)$, $k = 2, \dots, n$.

Предположим теперь, что в области Ω помимо сильного имеется также слабый разрыв. Линия слабого разрыва совпадает с одной из характеристик системы (2), т. е. существует такое $k \in (1, \dots, n)$, что $dx/dt = \lambda_k$. По аналогии с сильным разрывом будем называть ее линией слабого разрыва индекса k.

Если слабый разрыв индекса k при $t = 0$ принадлежит подобласти Ω_1 (так называемый встречный разрыв индекса k), то при любом $k = 1, \dots, n$ он будет иметь точку $(x_1, t_1) \in \Omega$ пересечения с сильным разрывом (см. рисунок). В результате взаимодействия в подобласти Ω_2 возникнут $n - 1$ исходящих из точки (x_1, t_1) слабых разрывов индекса k, $k = 2, \dots, n$, совпадающих по направлению с характеристиками, отвечающими $\lambda_k(u_2(t), x(t), t)$, $k = 2, \dots, n$. Кроме того, скачкообразно изменится кривизна сильного разрыва.

Введем векторы $V^{(n)}, U^{(n)}$ и $V^{(1)}, U^{(1)}$ производных за сильным разрывом в зонах (n) и (1) до и за точкой взаимодействия (см. рисунок), а также векторы $[V]_w = V^{(n)} - V^{(1)}$ и $[U]_w = U^{(n)} - U^{(1)}$ разрыва производных за сильным разрывом.

Лемма. В случае, когда сильный разрыв индекса 1 взаимодействует со встречным слабым разрывом, векторы $[V]_w$ и $[U]_w$ разрыва производных за сильным разрывом ортогональны левому собственному вектору $L^{(1)}$, построенному по значениям $u = u_2$ в подобласти Ω_2:

$$L^{(1)}[V]_w = 0, \qquad L^{(1)}[U]_w = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $[V]_k = V^{(k+1)} - V^{(k)}$ и $[U]_k = U^{(k+1)} - U^{(k)}$ — разрывы производных V и U на исходящем из точки взаимодействия слабом разрыве индекса k, $k = 2, \dots, n$. Разность производных $V^{(n)}, U^{(n)}$ и $V^{(1)}, U^{(1)}$ в зонах (n) и (1) до и за точкой взаимодействия связана с величинами $[V]_k$ и $[U]_k$ разрыва производных на исходящих слабых разрывах следующим очевидным соотношением:

$$[V]_w = V^{(n)} - V^{(1)} = \sum_{k=1}^{n-1} V^{(k+1)} - V^{(k)} = \sum_{k=1}^{n-1} [V]_k,$$
$$[U]_w = U^{(n)} - U^{(1)} = \sum_{k=1}^{n-1} U^{(k+1)} - U^{(k)} = \sum_{k=1}^{n-1} [U]_k. \tag{5}$$

В работе [1] доказывается, что при переходе через слабый разрыв индекса k линейные комбинации вида $L^{(m)}V^{(k)}$ и $L^{(m)}U^{(k)}$, $m \neq k$, остаются неизменными:

$$L^{(m)}[V]_k = 0, \qquad L^{(m)}[U]_k = 0, \qquad m \neq k. \tag{6}$$

Умножая равенства (5) слева на $L^{(1)}$ и учитывая (6), получим требуемый результат.

Теорема. Произведение левого собственного вектора $L^{(1)}$ на производную du_2/dt вектор-функции u_2 по t в направлении сильного разрыва не меняется в процессе взаимодействия сильного разрыва со встречным слабым разрывом и равно

$$L^{(1)} \frac{du^{(n)}}{dt} = L^{(1)} \frac{du^{(1)}}{dt} =: L^{(1)} \frac{du_2}{dw} = L^{(1)} b. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим линию $x(t)$ разрыва вектор-функции $u(x, t)$, задаваемую уравнением $dx/dt = D$. Домножим второе равенство в (4) на D и сложим эти два уравнения. Учитывая, что сумма $\partial u/\partial t + D\partial u/\partial x$ равна производной dn/dt вектор-функции u по t в направлении сильного разрыва, получим, что

$$L^{(1)}\,\frac{du^{(n)}}{dt} - L^{(1)}\,\frac{du^{(1)}}{dt} = 0.$$

Последнее равенство означает, что производная u в направлении сильного разрыва, умноженная слева на $L^{(1)}$, не меняется при взаимодействии сильного разрыва с произвольным встречным слабым разрывом:

$$L^{(1)}\,\frac{du^{(n)}}{dt} = L^{(1)}\,\frac{du^{(1)}}{dt} = \mathrm{const} =: C. \tag{8}$$

Осталось найти стоящую в правой части константу. Для этого рассмотрим приходящую в точку взаимодействия характеристику первого семейства, задаваемую уравнением $dx/dt = \lambda_1(u_2(t), x(t), t)$ (см. рисунок). Так как она лежит в зоне (n), отвечающей $u = u^{(n)}$, то условия на этой характеристике имеют вид

$$L^{(1)}V^{(n)} + \lambda_1 L^{(1)}U^{(n)} = L^{(1)}b. \tag{9}$$

Вычитая из (8) соотношение (9), получим в левой части:

$$L^{(1)}V^{(n)} + DL^{(1)}U^{(n)} - L^{(1)}V^{(n)} - \lambda_1 L^{(1)}U(n)$$
$$= (D - \lambda_1)(L^{(1)}U^{(n)} - L^{(1)}U^{(n)}) \equiv 0.$$

Следовательно, $C = L^{(1)}b$, что и требовалось доказать.

По-видимому, впервые частный случай формулы (7) был получен в работах Уизема [3,4] на основе анализа результатов работ Честера [5] и Чиснелла [6,7]. В работе Честера рассматривалась задача о распаде разрыва в канале со скачком площади сечения в случае, когда скачок невелик и расчетные формулы можно линеаризовать. В результате линеаризации Честер получил следующую связь между малым изменением относительной скорости $M = D/a$ движения ударной волны и изменением площади A сечения трубы:

$$d\ln A = -\frac{dM^2}{(M^2-1)k(M)}, \tag{10}$$

$$k(M) = 2\left[\left(1 + (1-\varepsilon)\,\frac{1-g^2}{g}\right)\left(2g + 1 + \frac{1}{M^2}\right)\right]^{-1},$$

$$g(M) = \frac{(\gamma-1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}.$$

Уизем заметил, что этот же результат можно получить, записывая условие на характеристике второго семейства в спутном потоке за ударной волной

$$d\ln p_2 + \frac{\gamma}{a_2}\,du_2 + \frac{\gamma u_2}{u_2 + a_2}\,d\ln A = 0$$

и подставляя вместо p_2, u_2, a_2 их выражения через M из условий на ударной волне, которые для случая распространения ударной волны по покоящемуся газу с параметрами p_1, u_1, a_1 могут быть записаны так:

$$\frac{p_2}{p_1} = (1+\varepsilon)M^2 - \varepsilon, \quad \frac{u_2}{a_1} = (1-\varepsilon)\left(M - \frac{1}{M}\right),$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\left[(1+\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{M^2}\right][(1-\varepsilon) + \varepsilon M^2]}.$$

Указанный прием Уизем назвал правилом характеристик [3]. Полученные в настоящей работе результаты показывают, что это правило непосредственно вытекает из решения задачи взаимодействия сильного разрыва со слабым встречным разрывом.

Чиснелл [6] предложил использовать формулу (10) для описания траектории ударной волны, движущейся по покоящемуся газу в канале переменного сечения. В теории Чиснелла канал с непрерывно меняющимся сечением аппроксимируется последовательностью цилиндрических каналов, примыкающих друг к другу, а переход ударной волны из одного цилиндрического участка в другой описывается формулой (10). Изложенная теория Чиснелла не учитывает дополнительного воздействия вторичных волн, отраженных от стенок канала и догоняющих ударную волну. Однако сравнение приближенного аналитического решения (10) с точным численным решением показывает прекрасное совпадение.

Полученная в настоящей работе формула (7), которую можно назвать обобщенной формулой Честера–Уизема, позволяет использовать аналогичные идеи при решении широкого класса задач, связанных со взаимодействием сильных разрывов. Так, в стационарной газовой динамике (7) можно использовать при решении задач взаимодействия скачков уплотнения с изэнтропическими волнами Прандтля–Майера [8] и со сдвиговыми слоями [9], а в нестационарной газововй динамике — при решении задач интерференции ударных волн с волнами Римана.

Автор благодарен Э.А. Троппу за обсуждение работы.

Список литературы

[1] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
[2] *Lax P.D.* // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
[3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
[4] *Witham G.B.* // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 337.
[5] *Честер Б.* // Механика. 1954. Вып. 6. С. 76–87.
[6] *Chisnell R.F.* // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 286.
[7] *Chisnell R.F.* // Proc. Roy. Soc. 1955. V. 232. P. 350.
[8] *Мешков В.Р., Омельченко А.В., Усков В.Н., Чернышов М.В.* // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42 (в печати).
[9] *Адрианов А.Л.* Об одной модели течения за криволинейным скачком уплотнения // Деп. в ВИНИТИ 7.11.1997, № 3357, В-97.