

01;03

Распространение волн в жидкости, протекающей в сосуде с упругими стенками

© Ю.Н. Зайко

Поволжская Академия государственной службы, Саратов

Поступило в Редакцию 6 марта 2001 г.

Исследуется распространение волн в идеальной жидкости, протекающей по цилиндрическому каналу кругового сечения, рассматриваемому как упругая оболочка. Учтено взаимодействие волн плотности и давления в жидкости с упругими волнами в стенках канала. Получено дисперсионное уравнение для связанных волн. Показано, что при определенных условиях возникает неустойчивость течения. Получены условия конвективной и абсолютной неустойчивости. Показано, что возникновение неустойчивостей и переход к турбулентности в рассматриваемой модели отличаются рядом особенностей от аналогичных явлений в модели вязкой жидкости.

Рассмотрим поток жидкости или газа, распространяющийся в круглом сосуде, имеющем поперечное сечение $A = \pi a^2$, где a — радиус сосуда. Для волн плотности и скорости жидкости в таком сосуде в случае, если A мало, можно использовать приближение, учитывающее только одну компоненту скорости v вдоль оси трубопровода. Задачу при этом можно рассматривать как одномерную и записать систему уравнений для величин A , v и давления p , зависящих только от продольной координаты x [1]. Уравнения, следуя [1], запишем в безразмерной форме. Для этой цели используются следующие величины, имеющие смысл единиц времени, длины и давления:

$$T = \sqrt{\frac{\rho a^2}{E}}, \quad L = \sqrt{\frac{\rho a h}{2\rho_0}}, \quad P = \frac{Eh}{2a}.$$

Здесь ρ_0 — плотность жидкости, ρ — плотность материала стенок сосуда, h — толщина стенок, E — модуль Юнга материала стенок.

Исходная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} A_t + (Av)_x &= 0, \\ v_t + vv_x + p_x &= 0, \\ A_{tt} + RA_{xxxx} + A - p &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, индексы означают частные производные. В (1) первое уравнение является уравнением непрерывности, второе — уравнением движения в форме Эйлера, третье — уравнением, описывающим упругие волны в стенке сосуда, рассматриваемого как упругая оболочка. Член RA_{xxxx} соответствует учету взаимодействия между волнами в потоке и волнами изгиба в стенке, которое становится существенным при длинах волн $\lambda \leq (a \cdot h)^{1/2}$ [2]. Величина $R = \rho_0^2 [3(1 - \mu^2)\rho^2]$ есть так называемая цилиндрическая жесткость, μ — коэффициент Пуассона [2]. В такой форме последнее уравнение применялось для исследования волн в цилиндрических оболочках, подвергающихся воздействию внешней распределенной нагрузки [3]. Оно может быть получено из строгих уравнений для волн в цилиндрических оболочках [4], если в них оставить наиболее существенные члены в рассматриваемом приближении. При этом давление $p = 1$ там, где $v = v_0$ — средней скорости потока.

Для волн малой амплитуды положим $v = v_0 + v'$, $A = 1 + A'$, $p = 1 + p'$, причем $v' \ll v_0$, $A' \ll 1$, $p' \ll 1$, и ищем решение линеаризованного уравнения (1) в виде $\sim \exp(ikx - i\omega t)$. Подстановка приводит к дисперсионному уравнению, связывающему волновое число k и частоту ω :

$$D(\omega, k) = (1 + Rk^4 - \omega^2)k^2 - (kv_0 - \omega)^2 = 0. \quad (2)$$

На рис. 1 представлены решение уравнения (2) для различных значений v_0 , а также кривая маргинальной устойчивости $v_0(k)$, которая получается из (2) при условии отсутствия нарастающих решений линеаризованной системы:

$$v_0(k) = \frac{1}{k} \sqrt{(1 + k^2)(1 + Rk^4)}. \quad (3)$$

Эта кривая имеет типичный вид для подобного рода задач с минимумом $v_{0m} = v_0(k_m)$, как показано на рис. 1. На ней (и ниже) мнимая часть частоты $\text{Im}(\omega(k)) = 0$, выше — $\text{Im}(\omega(k)) \neq 0$. Следовательно,

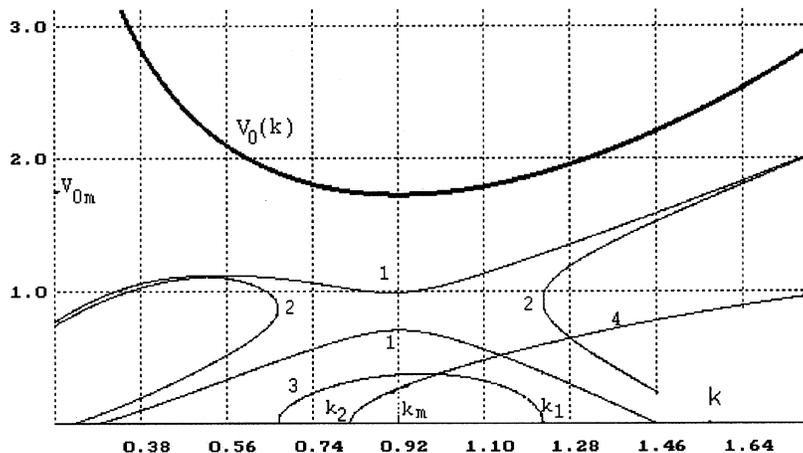


Рис. 1. Решения уравнения (2) и кривая маргинальной устойчивости (3); $R = 0.51$. 1 — зависимость $\omega(k)$ для $v_0 = 1.7 < v_{0m}$; 2, 3 — зависимости $\text{Re}(\omega(k))$ и $\text{Im}(\omega(k))$ для $v_0 = 1.89 > v_{0m}$; 4 — линия сингулярных точек $D(k(\omega), \omega)$, полученная с помощью (4).

кривая $v_0(k)$ разделяет области устойчивого и неустойчивого движений в сосуде. Для значений $v_0 < v_{0m}$ поток является устойчивым, т. е. любые малые возмущения в нем не нарастают со временем и движение остается одномерным сколь угодно долго. Это действительно так, поскольку неоднмерные возмущения на фоне одномерного течения имеют большую энергию, чем одномерные. Для значений $v_0 > v_{0m}$ возмущения с волновыми числами в малой окрестности k_m будут нарастать и одномерность потока нарушится. Размер этой области неустойчивости вблизи k_m изменяется как $\sim (v_0 - v_{0m})^{1/2}$.

Теория неустойчивостей [5] утверждает, что неустойчивость будет абсолютной (конвективной), если на плоскости комплексного ω кривая $\text{Im}(\omega(k))$, полученная из (2), лежит дальше (ближе) от вещественной оси частоты, чем линия $\omega = \omega_s(k)$, на которой расположены нули функции $D_k(k(\omega), \omega)$, или точки ветвления функции $k(\omega)$, полученной из (2). Уравнение $\omega_s(k)$ определяется из решения системы уравнений:

$D(k(\omega), \omega) = 0$ и $D_k(k(\omega), \omega) = 0$ и имеет вид:

$$\omega_s(k) = \frac{k}{1 + \frac{2}{3}k^2} \left\{ \frac{5}{6}v_0 \pm \sqrt{\frac{25}{36}v_0^2 + \frac{2}{3}(1 - v_0^2)\left(1 + \frac{2}{3}k^2\right)} \right\}. \quad (4)$$

При $k < k_1 = 1/4 \cdot \sqrt{(v_0^2 + 24)/(v_0^2 - 1)}$ $\omega_s(k)$ проходит вдоль вещественной оси на плоскости комплексной частоты, а при $k > k_1$ выходит в комплексную плоскость, как показано на рис. 1. Совпадение k_1 и k_2 , которое определяет правую границу области неустойчивости (рис. 1), приводит к уравнению границы между областями конвективной и абсолютной неустойчивости на плоскости R и v_0 (правая кривая на рис. 2):

$$R = 256 \frac{(v_0^2 + 8)(v_0^2 - 1)^3}{(17v_0^2 + 8)(v_0^2 + 24)}. \quad (5)$$

Левая кривая на рис. 2 представляет собой границу между областью устойчивости и конвективной неустойчивости. Она получена из уравне-

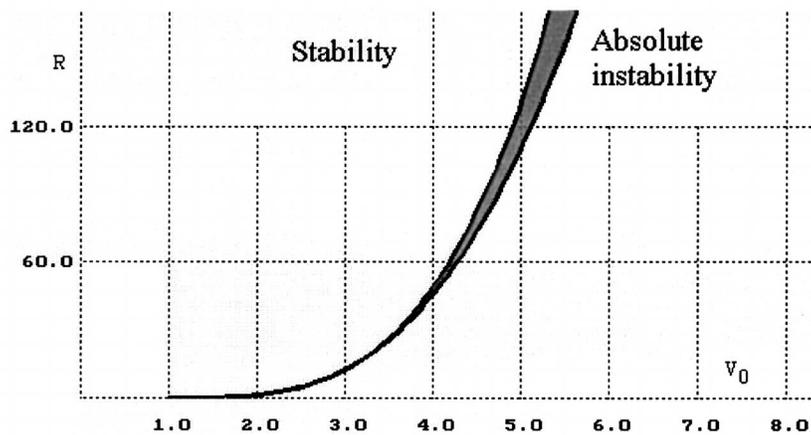


Рис. 2. Кривые $R(v_0)$, полученные из (5) (правая) и (6) (левая), разделяющие Rv_0 -плоскость на три области в соответствии с характером устойчивости решений линеаризованной системы (1). Узкая серая область между кривыми — область конвективной неустойчивости.

ния $R = R(k_m)$, где:

$$R(k) = \frac{v_0^2}{(1+k^2)k^2} - \frac{1}{k^4}; \quad k_m^2 = \frac{4 - v_0^2 + v_0\sqrt{v_0^2 + 8}}{4(v_0^2 - 1)}; \quad \frac{dR(k_m)}{dk} = 0. \quad (6)$$

Полученный результат показывает, что учет изгибной жесткости стенок сосуда приводит к появлению иного по сравнению с вязким механизмом переноса энергии по спектру, заключающегося в возбуждении упругих волн в стенке сосуда волнами в жидкости. Это в свою очередь обуславливает отличие картины перехода к турбулентному режиму в сосудах с упругими стенками, что наблюдалось экспериментально [6].

С одной стороны, учет взаимодействия волн в жидкости с упругими волнами в стенках сосуда приводит к тому, что даже при сколь угодно малом взаимодействии ($R \rightarrow 0$) осесимметричное течение оказывается неустойчивым по отношению к возмущениям малой амплитуды, тогда как без учета этого взаимодействия течение считалось устойчивым и в конвективном, и в абсолютном смысле при любых скоростях v_0 [2].

С другой стороны, при достаточно сильном взаимодействии, обеспечивающем перекачку значительной доли энергии от волн в жидкости к упругим волнам, развитие неустойчивостей в потоке и переход к турбулентному состоянию затягиваются.

Список литературы

- [1] Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов / Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 294 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [3] Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
- [4] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- [5] Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы / Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 719 с.
- [6] Krindel P., Silberberg A. // J. Colloid Interface Sci. 1979. V. 71. P. 39.