01

Анализ условий коллапса для нелинейного уравнения Клейна–Гордона с периодическими граничными условиями

© *Н.М. Зубарев*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 2 февраля 2001 г.

При помощи метода интегральных оценок исследуется динамика волнового коллапса для уравнения Клейна–Гордона с нелинейностью общего вида в случае периодических условий на границах. Сформулированы достаточные интегральные критерии коллапса, обобщающие известные.

Уравнение Клейна–Гордона для комплексного поля $A(x,t)$ с дестабилизирующей нелинейностью возникает при описании взрывных неустойчивостей поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле [1], заряженной поверхности диэлектрической жидкости [2], тангенциального разрыва по механизму Кельвина–Гельмгольца [3] и др. В работах [3,4] было показано, что эффективным методом исследования сингулярного поведения поля (т.е. процессов волнового коллапса) для уравнения Клейна–Гордона может быть построение обыкновенных дифференциальных неравенств, мажорирующих исходное уравнение в частных производных. В настоящей работе нами рассматривается случай периодических граничных условий: эволюция поля A происходит на интервале $0 \leqslant x \leqslant L$, где L — период. При помощи метода интегральных оценок удается получить дифференциальное неравенство относительно усредненной по периоду величины поля, вводимой как $a(t) = (L^{-1}\int_0^L |A|^2 dx)^{1/2}$, обобщающее предложенные в [3,4]. Это неравенство позволило сформулировать достаточные интегральные критерии коллапса, т.е. определить, при каких начальных распределениях полей A и A_t будет происходить неограниченный рост величины a за конечное время, а также провести сравнительный анализ уже известных критериев.

Пусть нелинейное уравнение Клейна–Гордона имеет следующий вид:

$$A_{tt} = A_{xx} + AU'(|A|^2), \qquad (1)$$

где $U'(y) = dU(y)/dy$, а $U(y)$ — некоторая функция, такая что $F(y, s) = zU'(y) - sU(y)$ является выпуклой вниз функцией переменной $y > 0$ на некотором интервале $1 \leqslant s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ значений параметра s. Отметим, что условия, накладываемые на функцию U, не ограничивают общности рассмотрения: практически во всех представляющих интерес случаях эти условия естественным образом выполняются (см., например, [4]). В частности, для комплексного уравнения Клейна–Гордона с кубической нелинейностью (модель $|\phi|^4$) будет $s_1 = 1$ и $s_2 = 2$.

По аналогии с работами [3,4] рассмотрим временнýю эволюцию нормы $X(t) = \int_0^L |A|^2 dx \geqslant 0$. Дифференцируя величину X дважды по t и затем складывая получившееся соотношение с домноженным на $4s$ выражением для энергии комплексного поля

$$H = \frac{1}{2} \int\limits_0^L \Big[|A_t|^2 + |A_x|^2 - U(|A|^2)\Big] dx,$$

являющейся интегралом движения для (1), получим:

$$X_{tt} + 4sH = 2(1+s) \int\limits_0^L |A|_t^2 dx + 2(s-1) \int\limits_0^L |A_x|^2 dx + 2 \int\limits_0^L F(|A|^2, s) dx.$$

Из неравенства Коши–Буняковского для функций $|A|$ и $|A|_t$ следует, что $4X \int_0^L |A|_t^2 dx \geqslant X_t^2$. Далее, так как функция F — выпуклая вниз функция, то из интегрального неравенства Иенсена получаем: $\int_0^L F(|A|^2, s) dx \geqslant LF(X/L, s)$. Наконец, очевидно, что $\int_0^L |A_x|^2 dx \geqslant 0$. Приходим тогда к дифференциальному неравенству

$$X_{tt} + 4sH \geqslant \frac{1+s}{2} \frac{X_t^2}{X} + 2LF(X/L, s), \qquad (2)$$

справедливому при любом $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Следует отметить, что неравенства этого типа возникают при получении достаточных критериев коллапса для нелинейного уравнения Шредингера [5,6], различных модификаций уравнения Буссинеска [7] и т. д. В работе Маслова и Шагалова [4], где рассматривалась динамика коллапса для скалярного нелинейного уравнения Клейна–Гордона в предположении о локализации возмущения в некоторой ограниченной области, было получено уравнение (2) для частного случая, когда $s = 1$. В работе Кузнецова и Лушникова [3] неравенство, соответствующее частному случаю, когда $s = s_2 = 2$, было получено для модели $|\phi|^4$. Отличительной чертой неравенства (2) является наличие свободного параметра s, величина которого в дальнейшем будет выбираться таким образом, чтобы аппроксимация (2) уравнения (1) была оптимальной.

Исследуем дифференциальное неравенство (2) в предположении, что величина X монотонно растет со временем, т. е. $X_t \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0$, где t_0 — начальный момент времени. Домножая его на X_t/X^{s+1}, находим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta(t)}{X^s} \geqslant 0, \text{ где } \Delta(t) = \frac{1}{4}\frac{X_t^2}{X} - 2H - LU(X/L).$$

Тогда, очевидно, справедливо следующее неравенство:

$$\Delta(t) \geqslant \frac{X^s(t)}{X^s(t_0)}\Delta(t_0). \tag{3}$$

Заметим теперь, что выражение (2) может быть переписано в виде

$$X_{tt} \geqslant \frac{1}{2}\frac{X_t^2}{X} + 2XU'(X/L) + 2s\Delta(t),$$

где мы сгруппировали члены, пропорциональные s. Исключая функцию $\Delta(t)$ при помощи (3), получим:

$$X_{tt} \geqslant \frac{1}{2}\frac{X_t^2}{X} + 2XU'(X/L) + 2s\Delta(t_0)\frac{X^s(t)}{X^s(t_0)}. \tag{4}$$

Поскольку мы считаем, что величина X монотонно увеличивается и, следовательно, $X(t)/X(t_0) \geqslant 1$, то функция $s(X(t)/X(t_0))^s$ монотонно нарастает при увеличении s. Тогда, в случае если $\Delta(t_0) > 0$, правая часть неравенства будет максимальной, и, следовательно, аппроксимация оптимальной при наибольшем возможном s, т. е. при $s = s_2$. Наоборот, при $\Delta(t_0) < 0$ неравенство (4) будет оптимальным при наименьшем возможном s, т. е. при $s = s_1$. Это простое условие дает однозначный ответ на вопрос, при каких начальных условиях следует использовать критерии коллапса, основанные на предложенном в работе [4] подходе (с поправкой на то, что в нашем случае поле A — комплексное, а не скалярное), а при каких более общими будут критерии, построенные по аналогии с [3].

Для анализа неравенства (4) удобно ввести величину $a(t) = \sqrt{X/L}$, имеющую смысл усредненного по периоду L комплексного поля A. Получим тогда:

$$a_{tt} \geqslant s_0 \delta_0 a^{2s_0-1} + aU'(a^2), \tag{5}$$

где $\delta_0 = \Delta(t_0) L^{-1} a_0^{-2s_0}$, а под s_0 мы обозначили оптимальное значение параметра s, определяемое выражением:

$$s_0 = \frac{s_2 + s_1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2}\,\mathrm{sgn}(\delta_0).$$

Неравенство (5) удобно переписать в форме второго закона Ньютона:

$$a_{tt} \geqslant -\frac{\partial P(a)}{\partial a}, \qquad P(a) = -\frac{1}{2}\left[\delta_0 a^{2s_0} + U(a^2)\right],$$

где a играет роль координаты "частицы", а P — ее потенциальной энергии. Введем также величину $E(t) = a_t^2/2 + P(a)$, которая имеет смысл полной механической энергии "частицы".

Таким образом, уравнению в частных производных (1) со средней плотностью энергии $h = H/L$ для комплексного поля $A(x,t)$ можно поставить в соответствие обыкновенное дифференциальное неравенство (5) для его усредненной по периоду величины $a(t) = (L^{-1}\int_0^L |A|^2 dx)^{1/2}$, описывающее движение ньютоновской частицы с энергией E в заданном потенциале. Примечательно, что в начальный момент времени величины h и E совпадают, т.е. $E(t_0) = h$, а выражения (1) и (5) имеют сходную структуру. Это делает наглядными результаты исследования процессов волнового коллапса для нелинейного уравнения Клейна–Гордона, основанные на рассмотрении движения эффективной "частицы". Поскольку при $X_t > 0$ ее скорость положительна, то, домножая (5) на a_t и затем интегрируя по t, получим: $E(t) \geqslant E(t_0)$, т.е. "частица" набирает энергию при движении. Понятно, что достаточным критерием обращения величины a в бесконечность за конечное время будет условие, что "частица" не встретит потенциальной стенки, даже если $E_t = 0$, т.е. условие $P(a) < h$ при $a \geqslant a_0$.

В заключение отметим, что все результаты данной работы легко обобщаются на многомерный случай; при этом оказывается, что, как уже отмечалось в работе [3] для модели $|\phi|^4$, поведение системы практически не зависит от размерности пространства.

Автор благодарен Е.А. Кузнецову, П.М. Лушникову, Е.М. Маслову и А.Г. Шагалову за плодотворные обсуждения. Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00–02–17428) и INTAS (проект 99–1068).

Список литературы

[1] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 21. С. 65–69.
[2] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // ДАН СССР. 1976. Т. 228. В. 4. С. 829–832.
[3] *Кузнецов Е.А., Лушников П.М.* // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. В. 2 (8). С. 614–630.
[4] *Maslov E.M., Shagalov A.G.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 239. P. 46–50.
[5] *Kuznetsov E.A., Rasmussen J.J., Rypdal K., Turitsyn S.K.* // Physica D. 1995. V. 87. P. 273–284.
[6] *Лушников П.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. В. 5. С. 447–452.
[7] *Turitsyn S.K.* // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. N 2. P. R796–R799.