01;05.4

Устойчивость термомагнитной волны в жестких сверхпроводниках

© *Н.А. Тайланов, У.Т. Яхшиев*

Кафедра теоретической физики и НИИ прикладной физики,
Национальный университет Узбекистана
E-mail: taylanov@iaph.silk.org

Поступило в Редакцию 30 января 2001 г.

Изучена проблема устойчивости нелинейной волны относительно малых тепловых и электромагнитных возмущений в жестких сверхпроводниках. Показано, что пространственно-ограниченным решениям соответствуют только затухающие во времени возмущения, что означает устойчивость нелинейной термомагнитной волны.

В работе [1] было показано, что в зависимости от условий на поверхности сверхпроводника возможно существование нелинейных стационарных термомагнитных волн двух типов **E** или **H** соответственно. Менее изученным остается вопрос об устойчивости нелинейных волн относительно малых тепловых и электромагнитных возмущений в сверхпроводнике.

В данной работе изучена устойчивость нелинейных термомагнитных волн по отношению к малым тепловым и электромагнитным возмущениям в сверхпроводниках, находящихся в критическом состоянии. Показано, что пространственно-ограниченным решениям соответствуют только затухающие во времени возмущения.

Эволюция тепловых T и электромагнитных **E**, **H** возмущений в сверхпроводнике описывается нелинейным уравнением теплопроводности [1–4]

$$\nu(T)\frac{dT}{dt} = \Delta[\kappa(T)\Delta T] + \mathbf{jE}, \tag{1}$$

системой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{H}}{dt},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2}$$

и уравнением критического состояния

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c(T, \mathbf{H}) + \mathbf{j}_r(\mathbf{E}), \tag{3}$$

где $\nu = \nu(T)$ и $\kappa = \kappa(T)$ — коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно, $\mathbf{j}_c$ — критическая плотность тока, $\mathbf{j}_r$ — плотность резистивного тока.

Рассмотрим плоский полубесконечный образец $(x > 0)$, помещенный во внешнее магнитное поле $\mathbf{H} = (0, 0, H_e)$, растущее с постоянной скоростью $\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathrm{const}$. Согласно уравнению Максвелла (2), в образце имеется вихревое электрическое поле $\mathbf{E} = (0, E_e, 0)$, направленное параллельно плотности тока j: $\mathbf{E} \parallel \mathbf{j}$.

Для зависимости $j_c(T, H)$ воспользуемся моделью критического состояния Бина–Лондона $\left(\frac{dj_c}{dH} = 0\right)$ [5]. Согласно данной модели, зависимость $j_c(T)$ может быть представлена в виде $j(T) = j_c(T_0)\left[1 - \frac{T - T_0}{T_c - T_0}\right]$, где $j_0 = j_c(T_0)$ — плотность равновесного тока, T_c — критическая температура, T_0 — температура охладителя.

Характерная зависимость $j_r(E)$ в области достаточно сильных электрических полей $(E > E_f)$ может быть аппроксимирована кусочно-линейной функцией $j_r \approx \sigma_f E$, а в области малых полей $E < E_f$ зависимость $j_r(E)$ нелинейна. Такая нелинейность обусловлена термоактивационным крипом потока [6].

Для автомодельного решения вида $\xi = x - vt$, описывающего бегущую волну, движущуюся с постоянной скоростью v вдоль оси x, система уравнений (1)–(3) приобретает следующий вид:

$$-v[N(T) - N(T_0)] = \kappa \frac{dT}{d\xi} - \frac{c^2}{4\pi v} E^2, \tag{4}$$

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{4\pi v}{c^2} j, \tag{5}$$

$$E = \frac{v}{c} H. \tag{6}$$

Здесь $N(T) = \int\limits_0^T \nu(T) dT$.

Исключив переменные T, H с помощью (4) и (6), используя граничные условия $E(z \to -\infty) = E_e$, получим дифференциальное уравнение для распределения $E(\xi)$:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \beta\tau \frac{dE}{dz} + \frac{4\pi\nu^2}{c^2E_\kappa}\big[N(T) - N(T_0)\big] - \frac{E^2}{2E_\kappa} = 0. \qquad (7)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры $z = \frac{\xi}{L}$, $\beta = \frac{vt_\kappa}{L}$; $L = \frac{cH_e}{4\pi j_0}$ — глубина проникновения магнитного потока в сверхпроводник; $\tau = \frac{D_t}{D_m}$ — параметр, описывающий отношение коэффициентов тепловой $D_t = \frac{\kappa}{\nu}$ и магнитной $D_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma_f}$ диффузии соответственно; $t_\kappa = \frac{\nu L^2}{\kappa}$ — время тепловой диффузии, $E_\kappa = \frac{\kappa}{aL^2}$ — постоянный параметр.

В приближении слабого разогрева сверхпроводника $(T - T_0) \ll T_0$ коэффициенты теплоемкости ν и теплопроводности κ слабо зависят от профиля температуры. Как известно (см. [6]), в жестких сверхпроводниках движения магнитного потока происходят значительно быстрее, чем происходит перенос тепла, и, следовательно, $\tau \ll 1$ или $D_t \ll D_m$. В этом приближении в уравнение (7) можно пренебречь членами, содержащими диссипативные эффекты, и представить его решение в виде [7]

$$E(z) = \frac{E_1}{2}\left[1 - \mathrm{th}\,\frac{\beta\tau}{2}(z - z_0)\right]. \qquad (8)$$

Выражение (8) описывает профиль ударной термомагнитной волны, распространяющейся в глубь сверхпроводника.

Для выяснения вопроса об устойчивости нелинейной волны относительно малых возмущений представим решение системы (1)–(3) в виде

$$T(z,t) = T(z) + \delta T(z,t)\exp\left[\frac{\lambda t}{t_\kappa}\right],$$

$$E(z,t) = E(z) + \delta E(z,t)\exp\left[\frac{\lambda t}{t_\kappa}\right], \qquad (9)$$

где $T(z)$ и $E(z)$ — стационарные решения, δT, δE — малые возмущения. Подставляя (9) в (1)–(3), полагая δT, $\delta E \ll T$, E в пределе $\tau \ll 1$, что отвечает "быстрой" $\lambda \gg \frac{\nu v^2}{\kappa}$ нустойчивости [6], получим уравнение для определения собственных значений λ [8]:

$$\frac{d^2\epsilon}{dz^2} + \left[\frac{2}{ch^2} - \Lambda\right]\epsilon = 0. \qquad (10)$$

Замена переменных вида $\xi = \operatorname{th} y$, $1 - \xi = 2s$, $\epsilon(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{\Omega}{2}}\Phi(\xi)$ приводит его к стандартному гипергеометрическому уравнению

$$s(1-s)\frac{d^2\Phi}{ds^2} - [\Omega+1-2s(\Omega+1)]\frac{d\Phi}{ds} - [\Omega(\Omega-1)-p(p-1)]\Phi = 0, \quad (11)$$

четные и нечетные интегралы которого представляются в следующем виде:

$$\Phi_1 = F(\epsilon-1, \epsilon+2, \epsilon+1, s), \quad (12)$$

$$\Phi_2 = s^{-\epsilon}F(-1, 2, 1-\epsilon, s), \quad (13)$$

где F — гипергеометрическая функция [9]. Функция Φ должна быть конечной в особой точке $s = 1$. Значения ϵ, при которых Φ_1 является конечной, очевидно, соответствуют дискретному спектру и равны $\epsilon_i = 0.1$ или $\lambda_i = -\tau^{-1}$, 0. Функция Φ_2 является ограниченной только при $\epsilon = 0$.

Для любого решения в виде бегущей волны характерной является трансляционная симметрия, что означает, если "возмущаемая" форма стационарного профиля $E(z)$ определяется выражением (8), тогда собственное значение основного состояния $\lambda_0 = 0$. Продифференцировав уравнение (7) по z, легко убедиться, что $\frac{dE_0}{dz}$ является собственной функцией, соответствующей нулевому значению $\lambda_0 = 0$. Действительно, возмущение $\delta E = \frac{dE_0}{dz}$ представляет собой малое смещение волны. Отсюда можно предполагать, что функция $\frac{dE_0}{dz}$ экспоненциально стремится к нулю при $z \to +\infty$, а также соответствующее ей собственное значение равно нулю, положительных собственных значений в задаче быть не может, т.е. $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$. Это означает, что волна устойчива относительно малых тепловых δT и электромагнитных δE флуктуаций. Изучение второго линейно-независимого решения приводит к такому же результату.

Список литературы

[1] *Максимов И.Л., Мастаков Ю.Н., Тайланов Н.А.* // ФТТ. 1986. Т. 28. В. 8. С. 2323.
[2] *Тайланов Н.А.* // Металлофизика. 1991. Т. 13. В. 9. С. 713.
[3] *Тайланов Н.А., Кучкаров С.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 7. С. 197.
[4] *Тайланов Н.А., Кучкаров С.* // ФТТ. 1991. Т. 33. В. 6. С. 1873.
[5] *Bean C.P.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 8. N 6. P. 250.

[6] *Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. М.: Наука, 1984.
[7] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
[9] *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965.