01;04

Сила взаимодействия заряженных плоскостей в облаке электронов и в плазме

© С.И. Яковленко

Институт общей физики РАН, Москва

Поступило в Редакцию 18 декабря 2000 г.

Рассмотрено распределение потенциала, напряженности поля и плотности плазмы в случае, когда заряженные плоскости окружены термоэмиссионными электронами, компенсирующими их заряд, или помещены в плазму конечной плотности. Показано, что плоскости, окруженные термоэмиссионными электронами (как и плоскости, помещенные в плазму), расталкиваются за счет электростатических сил. Получено выражение для электростатического давления.

1. Введение

При рассмотрении свойств термоэмиссионной пылевой плазмы [1] некоторый интерес представляет плоская модель пылевых частиц, поскольку для нее возможно общее решение уравнения Пуассона–Больцмана в квадратурах. Обычно (см., например, [2,3]) рассматривают случай, когда положительные заряды в плазме полностью сосредоточены на пылинках, окруженных облаком термоэлектронов. Однако интерес представляет и ситуация, когда имеет место дополнительная ионизация газа, в котором находятся пылинки. Примером может служить как пылевая плазма в электрическом разряде, так и ядерно возбуждаемая пылевая плазма [4,5]. Рассмотрению взаимодействия плоскостей в этих случаях посвящена данная работа.

2. Постановка задачи

Уравнение Пуассона–Больцмана. Здесь рассматривается ситуация, когда электронный газ, окружающий заряженные частицы, формируется за счет эмиссии электронов из пылинок, имеющих достаточно высокую температуру T. Кроме того, пылинки находятся в частично ионизованном газе. Для нахождения распределения по пространству потенциала ϕ, напряженности поля $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ и плотности заряда $\rho = e(N_i - N_e)$ следует решить уравнение Пуассона $\nabla\mathbf{F} = 4\pi\rho$. В этом уравнении плотности ионов N_i электронов N_e определяются распределением Больцмана $N_i = N_{i0}\exp(-e\phi/T)$, $N_e = N_{e0}\exp(e\phi/T)$, где N_{i0}, N_{e0} — плотности ионов и электронов в тех точках, где потенциал равен нулю; ∇ — гамильтонов векторный оператор.

Итак, уравнение Пуассона–Больцмана имеет вид:

$$\Delta\phi = 4\pi e\big(N_{e0}\exp(e\phi/T) - N_{i0}\exp(-e\phi/T)\big), \tag{1}$$

где $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа; температура частиц и плазмы считается одинаковой.

Безразмерные величины. Будем измерять длину в единицах $d = 8\pi e^2/T$. Введем безразмерные величины — потенциал φ, напряженность поля $\mathbf{E}$ и плотность электронов n_e — с помощью соотношений:

$$\varphi = \phi e/T; \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}ed/T; \quad n_e = (8\pi e^2/T)^3 N_e. \tag{2}$$

Для безразмерных величин уравнение (1) сводится к следующему уравнению для безразмерного потенциала φ:

$$\Delta\varphi = (1/2)\big(\exp(\varphi) - \delta\exp(-\varphi)\big), \tag{3}$$

где $\delta = N_{i0}/N_{e0}$ — параметр, характеризующий дополнительную ионизацию. При этом $(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{E}) = -(1/2)(\exp(\varphi) - \delta\exp(-\varphi))$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В силу квазинейтральности плазмы: $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.

В плоском случае уравнение (3) имеет вид:

$$d^2\varphi/dx^2 = (1/2)\big(\exp(\varphi) - \delta\exp(-\varphi)\big),$$
$$E = -d\varphi/dx, \qquad n_e = \exp(\varphi). \tag{4}$$

Здесь x — расстояние до заряженной плоскости.

Граничные условия. В качестве первого граничного условия естественно задавать плотность положительного заряда на заряженной поверхности σ. Этим задается значение напряженности поля на заряженной поверхности F_0. Оно соответствует напряженности поля в плоском конденсаторе: $F_0 = 4\pi\sigma$ или $E_0 = \sigma d^2/2e$.

Второе граничное условие выберем в некоторой точке a_0, соответствующей нулевой напряженности поля, где заряд поверхности полностью компенсируется зарядом слоя электронов: $E(a_0) = 0$.

3. Распределение поля и потенциала

Общее решение. Наиболее полное рассмотрение уравнения (4) случая $\delta = 1\,\mathrm{cm}$ в [6], случай $\delta = 0$ рассмотрен в [3]. Здесь анализируется общая ситуация.

Понизим порядок уравнения Пуассона–Больцмана, рассматривая напряженность поля как функцию потенциала:

$$EdE/d\varphi = (1/2)\big(\exp(\varphi) - \delta\exp(-\varphi)\big).$$

Первое интегрирование дает связь напряженности поля с потенциалом:

$$E = \big(\exp(\varphi) + \delta\exp(-\varphi) - \exp(\varphi_1) - \delta\exp(-\varphi_1)\big)^{1/2}. \qquad (5a)$$

Здесь φ_1 —значение потенциала в точке a_0, где напряженность поля равна нулю.

Второе интегрирование дает связь потенциала φ с координатой x:

$$x = \int\limits_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{dy}{\sqrt{\exp(y) + \delta\exp(-y) - \exp(\varphi_1) - \delta\exp(-\varphi_1)}}. \qquad (5б)$$

Здесь $\varphi_0 = \varphi(0)$ — значение потенциала на заряженной плоскости. Оно связано с задаваемой на границе напряженностью поля E_0 соотношением (5а) при $\varphi = \varphi_0$. Связь φ_1 с φ_0 (и соответственно с E_0) следует из соотношения (5б) при $x(\varphi_1) = a_0$. Формулы (5) являются общим решением плоской задачи в квадратурах.

Уединенная заряженная плоскость. При рассмотрении уединенной плоскости ($a_0 \to \infty$) в полупространстве, где плотность положительных зарядов равна нулю ($\delta = 0$), когда термоэмиссионные электроны полностью экранируют положительный заряд плоскости, полагая в (5б) $\delta = 0$, $\varphi_1 = -\infty$, имеем в результате интегрирования:

$$\varphi(x) = 2\ln\big[2E_0/(xE_0 + 2)\big];$$

$$E(x) = 2E_0/(xE_0 + 2), \qquad n_e(x) = \big[2E_0/(xE_0 + 2)\big]^2. \qquad (6)$$

Рассмотрению уединенной заряженной плоскости ($a_0 \to \infty$) в полупространстве, заполненном плазмой, соответствует случай $\delta = 1$. Дело

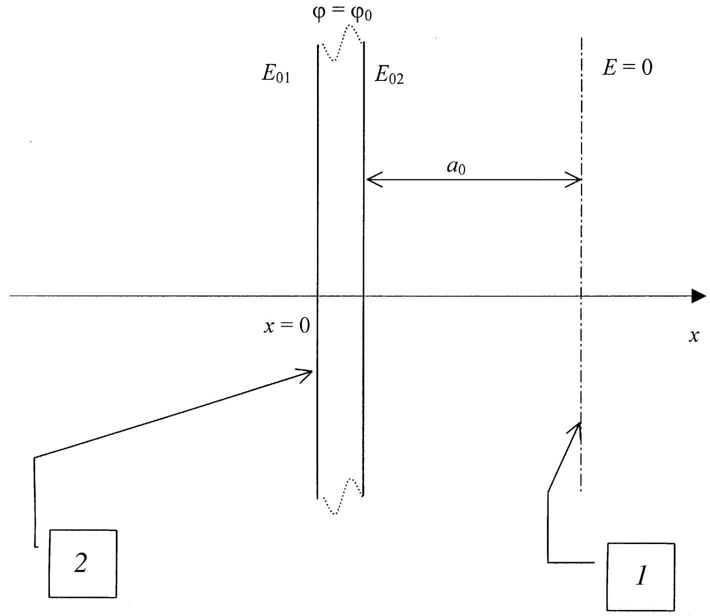

Рис. 1. Геометрия задачи о двух пластинах, окруженных облаком электронов или помещенных в плазму: *1* — ось симметрии; *2* — пластинка под заданным потенциалом.

в том, что плотность положительных зарядов в плоском плазменном слое на единицу поверхности будет бесконечной для слоя бесконечной толщины (при конечной объемной плотности заряда). Соответственно на бесконечно удаленном расстоянии можно пренебречь термоэмиссионными электронами. Полагая поле и потенциал на бесконечном расстоянии от заряженной плоскости равными нулю (соответственно $\varphi_1 = 0$), проводя интегрирование и разрешая получившееся выражение относительно φ, приходим к известному результату (см., например, [6,7]):

$$\varphi(x, \varphi_0) = 2\ln\left(\frac{1 + \exp(-x)\cdot\tanh(\varphi_0/4)}{1 - \exp(-x)\cdot\tanh(\varphi_0/4)}\right),$$

$$E = 2\cdot\mathrm{sh}(\varphi/2), \qquad n_e(x, \varphi_0) = \left(\frac{1 + \exp(-x)\cdot\tanh(\varphi_0/4)}{1 - \exp(-x)\cdot\tanh(\varphi_0/4)}\right)^2,$$

где $\varphi_0 = 2\mathrm{arcsh}(E_0/2)$.

Две заряженные плоскости. Между двумя заряженными плоскостями поле обращается в нуль при конечном значении $x = a_0$. В случае плоскостей с одинаковой поверхностной плотностью заряда, a_0 равно половине расстояния между плоскостями.

В случае $\delta = 0$ интегрирование уравнения (5б), дает:

$$\varphi(x) = \ln(E^2 + E_1^2),\; E(x) = E_1 \cdot \mathrm{tg}\big[(a_0 - x)E_1/2\big],\; n_e(x) = (E^2 + E_1^2). \quad (7)$$

Величина $E_1 \equiv \exp(\varphi_1/2)$ (и соответственно φ_1) связана с a_0 простым соотношением:

$$a_0 = (2/E_1) \cdot \mathrm{arctg}(E_0/E_1). \quad (8)$$

Для $\delta \neq 0$ связь φ_1 с задаваемыми величинами a_0, φ_0 и δ определяется намного сложнее:

$$a_0 = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_0} \frac{dy}{\sqrt{\exp(y) + \delta \exp(-y) - \exp(\varphi_1) - \delta \exp(-\varphi_1)}}$$

$$= \frac{1}{\delta^{1/4}} \int\limits_{\varphi_1 + 2\ln(1/\delta)}^{\varphi_0 + 2\ln(1/\delta)} \frac{dy}{\sqrt{2(\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(\varphi_1 + 2\ln(1/\delta))}}$$

$$= \frac{1}{\delta^{1/4}} \int\limits_{\varphi_1 + 2\ln(1/\delta)}^{\varphi_0 + 2\ln(1/\delta)} \frac{(1/2)dy}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(y/2) - \mathrm{ch}^2(y_1/2)}}$$

$$= \frac{k}{\delta^{1/4}} \int\limits_{u(\varphi_0 + 2\ln(1/\delta))}^{u(\varphi_1 + 2\ln(1/\delta))} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = \frac{k}{\delta^{1/4}} F\Big(k, u\big(\varphi_0 + 2\ln(1/\delta)\big)\Big).$$

Или

$$a_0 = \delta^{-1/4} k \cdot F\Big(k, u\big(\varphi_0 + 2\ln(1/\delta)\big)\Big), \quad (9)$$

где

$$u(\varphi) = 1/(k \cdot \mathrm{ch}(\varphi)), \quad k = 1/\mathrm{ch}(\varphi_1 + 2\ln(1/\delta)),$$

$$F(k, u) = \int\limits_{u}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

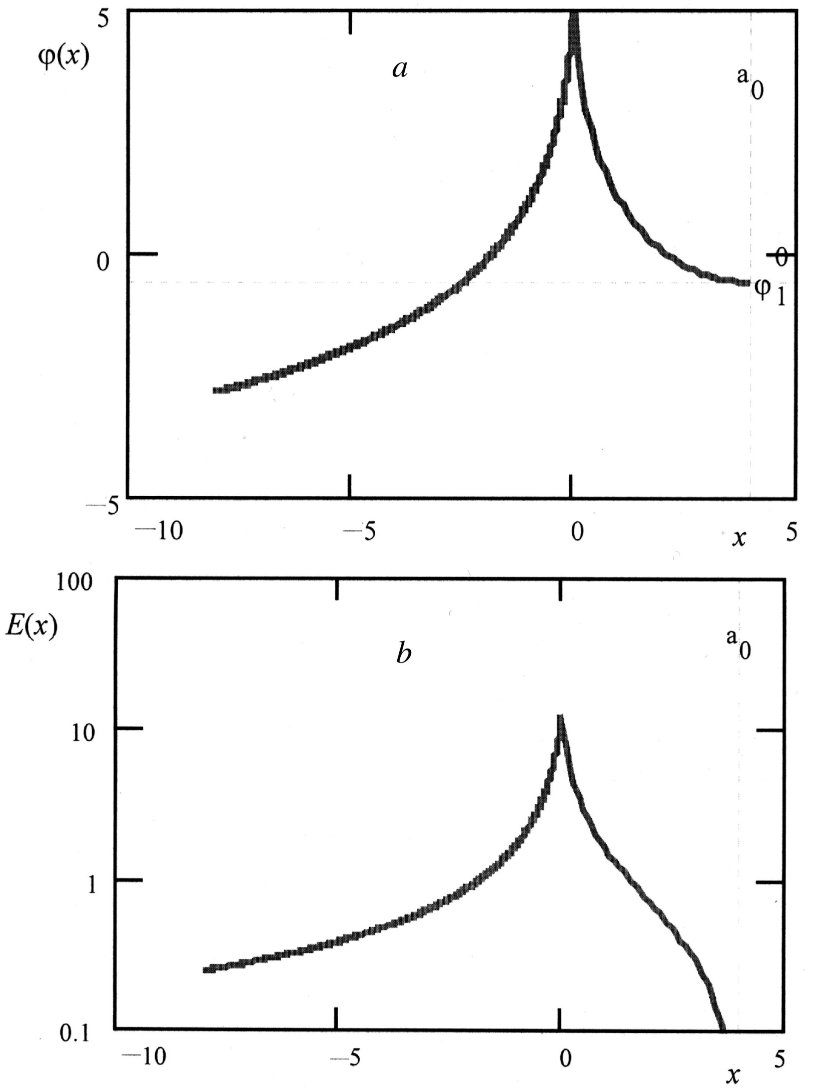

Рис. 2. Зависимость потенциала (a) и напряженности поля (b) от координаты в задаче о двух пластинах при $\delta = 0$, $a_0 = 4$, $\varphi_0 = 5$.

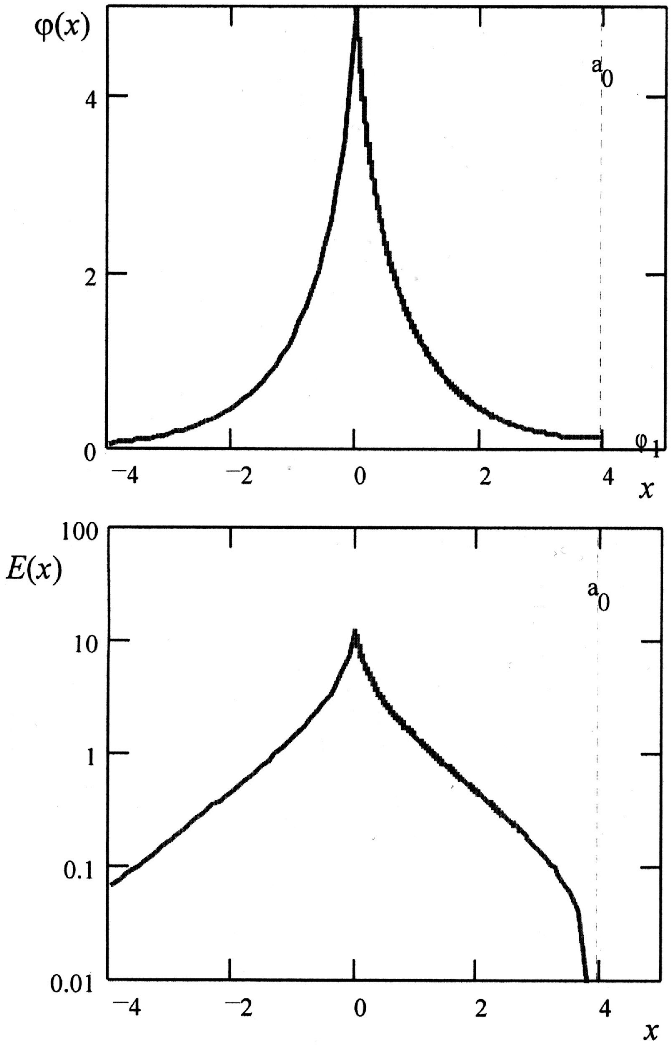

Рис. 3. То же, что на рис. 3 при $\delta = 1$, $a_0 = 4$, $\varphi_0 = 5$.

При этом неявная зависимость потенциала от координаты определяется выражением:

$$x = a_0 - \delta^{-1/4} k \cdot F\Big(k, u\big(\varphi + 2\ln(1/\delta)\big)\Big). \qquad (10)$$

Интересен случай большого положительного потенциала $\varphi_0 \gg 1$. При $\varphi_0 \to \infty$ имеем [6]: $a_0 = \delta^{-1/4} k \cdot K(k)$, где $K(k) \equiv F(k, 0)$ — полный эллиптический интеграл в нормальной форме.

Распределения потенциала для ситуации (рис. 1), когда две проводящие плоскости под одинаковым потенциалом $\varphi = \varphi_0$ находятся в электронном облаке, компенсирующем их заряд ($\delta = 0$), и в неограниченной плазме ($\delta = 1$) приведены на рис. 2, 3.

4. Расталкивание заряженных плоскостей

Электростатическое давление. Напряженность поля на поверхности плоскости слева $F_{01} = (T/ed) \cdot E_{01}$ со стороны неограниченного полупространства и напряженность поля справа $F_{02} = (T/ed) \cdot E_{02}$ со стороны, ограниченной другой плоскостью (рис. 1), отличаются. При этом возникает электростатическое давление на плоскость:

$$P = (1/8\pi)(F_{01}^2 - F_{02}^2) = (1/8\pi)(T/ed)^2 p = T(T/8\pi e^2)^3 p,$$

где $p = (E_{01}^2 - E_{02}^2)$ — безразмерное давление. Когда $E_{01} > E_{02}$, имеет место отталкивание плоскостей, при $E_{01} > E_{02}$ плоскости притягиваются.

Термоэмиссионная плазма. В случае термоэмиссионной плазмы ($\delta = 0$) имеем (см. также [3]):

$$E_{01}^2 = n_{e0}, \qquad E_{02}^2 = n_{e0} - E_1^2.$$

Здесь $n_{e0} = C(b)\vartheta^{-3/2}\exp(-1/\vartheta)$ — безразмерная плотность термоэмиссионных электронов вблизи нагретой поверхности, вытекающая из формулы Ричардсона–Дешмана; $C(b) = 2(m_e/2\pi\hbar^2)^{3/2}(8\pi e^2)^3/b^{3/2} = 2.9 \cdot 10^5 \cdot (\text{eV/b})^{3/2}$; $\vartheta = T/b$ — приведенная температура; b — работа выхода электронов со стенки, $\hbar$ — постоянная Планка.

Соответственно для безразмерного давления получаем:

$$p = E_{01}^2 - E_{02}^2 = E_1^2 \geqslant 0.$$

Итак, сила, направленная в сторону неограниченного полупространства в рассматриваемой задаче, всегда больше, чем сила, направленная в сторону пространства, ограниченного другой плоскостью. Иначе говоря, плоскости расталкиваются. Это обусловлено отмеченным в [3] эффектом выдавливания электронов из пространства между плоскостями на электроды.

Величина $E_1 \equiv \exp(\varphi_1/2)$ связана с половиной расстояния между плоскостями a_0 и потенциалом на электроде φ_0 трансцендентным соотношением (6), откуда следует связь давления с a_0:

$$a_0 = \frac{2}{E_1} \operatorname{arctg}\left(\frac{E_{02}}{E_1}\right) = \frac{2}{E_1} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{E_{01}^2 - E_1^2}}{E_1}\right)$$

или

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{p}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{n_{e0} - p}{p}}\right). \tag{11}$$

Модуль давления падает пропорционально квадрату расстояния между плоскостями при больших расстояниях и стремится к конечному

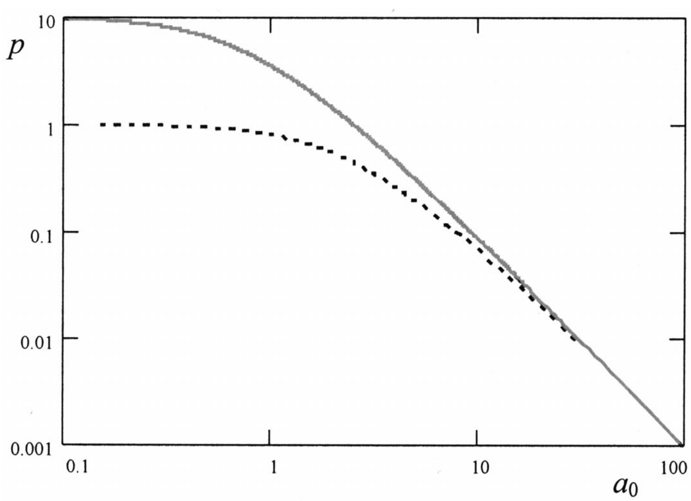

Рис. 4. Зависимость электростатического давления p от половины расстояния между плоскостями a_0 при $\delta = 0$; $n_{e0} = 10$ — сплошная кривая, $n_{e0} = 1$ — пунктир.

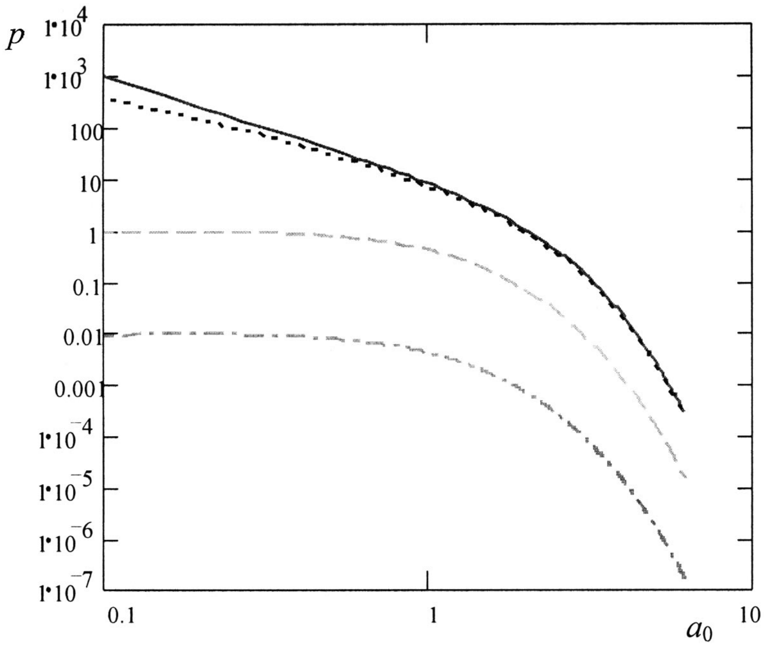

Рис. 5. Зависимость электростатического давления p от половины расстояния между плоскостями a_0 при $\delta = 1$; $\varphi_0 \to \infty$, $n_{e0} \to \infty$ — сплошная кривая, $\varphi_0 = 7$, $n_{e0} = 10^3$ — пунктир; $\varphi_0 = 1$, $n_{e0} = 2.7$ — штрихи; $\varphi_0 = 0.1$, $n_{e0} = 0.1$ — штрихпунктир.

пределу при малых расстояниях. Иначе говоря: $p = (\pi/a_0)^2$ при $a_0 \gg 1$ (наиболее интересный случай) и $p = n_{e0}$ при $a_0 \ll 1$ (рис. 4).

Заряженные плоскости в плазме. Рассмотрим ситуацию, когда плоскости находятся в неограниченной плазме $(\delta = 1)$. Из (5а) имеем:

$$E_{01}^2 = 4 \cdot \mathrm{sh}^2(\varphi_0/2), \qquad E_{02}^2 = 4 \cdot \left(\mathrm{sh}^2(\varphi_0/2) - \mathrm{sh}^2(\varphi_1/2)\right),$$

откуда следует

$$p = (E_{01}^2 - E_{02}^2) = 4 \cdot \mathrm{ch}(\varphi_1). \tag{12}$$

В случае $\delta = 1$ плоскости также отталкиваются [6]. При этом согласно (9):

$$a_0(\varphi_0, \varphi_1) = k(\varphi_1) \cdot F\big(k(\varphi_1),\, u(k(\varphi_1), \varphi_0)\big), \tag{13}$$

где $u(\varphi) = 1/(k \cdot \mathrm{ch}(\varphi))$, $k = 1/\mathrm{ch}(\varphi_1)$. Зависимость φ_0 от n_{e0} определяется выражением:

$$n_{e0} = \left(\frac{1 + \tanh(\varphi_0/4)}{1 - \tanh(\varphi_0/4)}\right)^2 = \exp(\varphi_0).$$

Соответственно $\varphi_0 = \ln(n_{e0})$.

Выражения (11)–(12) параметрически задают зависимость давления от расстояния между плоскостями и от n_{e0} (рис. 5).

5. Выводы

Итак, электростатическое взаимодействие между плоскостями, как окруженными облаком электронов, так и помещенными в плазму, приводит к расталкиванию этих плоскостей. В то же время численные расчеты [8] показывают, что в случае сферических частиц имеет место притяжение. Возможно, это связано со следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, в плоской задаче не учитывается перетекание электронов с периферии в центральную область на оси, соединяющей пылинки. Во-вторых, сила взаимодействия заряженных плоскостей (в отсутствие зарядов вокруг них) не зависит от расстояния между плоскостями, в то время как сила взаимодействия заряженных сфер обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Поэтому электроны, скопившиеся примерно на середине расстояния между пылинками, в случае взаимодействия сферических пылинок вносят больший вклад, чем в случае плоскостей. Во всяком случае вопрос о взаимодействии пылинок конечных размеров в облаке электронов и в плазме требует дополнительного исследования.

Список литературы

[1] *Фортов В.Е., Нефедов А.П., Петров О.Ф., Самарян А.А., Чернышев А.В.* // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 467–477.
[2] *Ткачев А.Н., Яковленко С.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. № 1. С. 53–57.
[3] *Яковленко С.И.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 8. С. 47–55.
[4] *Фортов В.Е., Владимиров В.И., Депутатова Л.В., Молотков В.И., Нефедов А.П., Рыков В.А., Торчинский В.М., Худяков А.В.* // ДАН. 1999. Т. 336. № 2. С. 184–187.
[5] *Яковленко С.И.* // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2001 (направлено в печать).
[6] *Derjagin B., Landau L.* // Acta Physicochimica U.R.S.S. V. XIV. N 6. P. 633.
[7] *Сивухин Д.В.* Вопросы теории плазмы. Вып. 4 / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1964. С. 81–187.
[8] *Яковленко С.И.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 16. С. 83–89.