01;03;11

Осесимметричные решения уравнений движения диэлектрической жидкости со свободной заряженной поверхностью

© *Н.М. Зубарев*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 30 августа 2000 г.

Рассматривается эволюция границы идеальной диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом в пределе значительной кривизны поверхности. Получены частные осесимметричные решения уравнений движения, описывающие втягивание параболоидной границы в глубь жидкости с постоянной скоростью.

Известно [1,2], что плоская граница диэлектрической жидкости со свободным поверхностным зарядом достаточно большой плотности неустойчива. Развитие неустойчивости может приводить к втягиванию границы в глубь жидкости [3] и, как следствие, уходу заряда с поверхности. В настоящей работе будут получены частные решения уравнений движения, описывающие эволюцию параболоидального возмущения границы жидкости. Эти результаты относятся к предельному случаю значительной кривизны поверхности, когда неприменим основанный на построении амплитудных уравнений подход [2,4].

Рассмотрим потенциальное движение идеальной диэлектрической жидкости плотности ρ, занимающей область, ограниченную свободной поверхностью $z = \eta(x, y, t)$. Потенциал электрического поля в среде $\varphi(x, y, z, t)$ и потенциал скорости жидкости $\Phi(x, y, z, t)$ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\Phi = 0, \tag{1}$$

которые следует решать совместно с кинематическим и динамическим граничными условиями:

$$\eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta \cdot \nabla_\perp\Phi, \qquad z = \eta(x, y, t), \tag{2}$$

$$\Phi_t = -\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{8\pi\rho}|\nabla\varphi|^2, \qquad z = \eta(x, y, t), \tag{3}$$

условием эквипотенциальности поверхности жидкости при наличии свободного поверхностного заряда:

$$\varphi = 0, \qquad z = \eta(x, y, t), \tag{4}$$

а также условием затухания электрического поля и поля скоростей на бесконечном удалении от поверхности (это относится к случаю неограниченно глубокого слоя жидкости):

$$|\nabla\varphi| \to 0, \qquad |\nabla\Phi| \to 0, \qquad z \to -\infty. \tag{5}$$

Уравнение (3) приведено в приближении малости электростатического давления над поверхностью жидкости и капиллярного давления по сравнению с электростатическим давлением под поверхностью. К вопросу о применимости этого приближения мы вернемся ниже.

В работе [5], где исследовалось движение заряженной поверхности жидкого гелия в сильном внешнем электрическом поле, было показано, что уравнения вида (1)–(5) совместны с условием $\sqrt{4\pi\rho}\Phi = \varphi$, причем подобная связь между потенциалами выделяет представляющие наибольший физический интерес неустойчивые решения исходной системы уравнений. В настоящей работе мы рассмотрим простейшие осесимметричные возмущения поверхности, соответствующие подстановке:

$$\sqrt{4\pi\rho}\,\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(u(x, y, z, t)), \tag{6}$$

$$u(x, y, z, t) = -z - Vt + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + Vt)^2}, \tag{7}$$

где постоянная V имеет смысл скорости втягивания поверхности в глубь жидкости (см. [6], где аналогичной подстановкой был получен ряд осесимметричных решений задачи Стефана). Несложно заметить, что эквипотенциальные поверхности, соответствующие (6) и (7), представляют собой семейство софокусных параболоидов вращения:

$$x^2 + y^2 = 2u(z + Vt) + u^2. \tag{8}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в исходные уравнения (1), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$u\tilde{\varphi}_{uu} + \tilde{\varphi}_u = 0. \tag{9}$$

Как следует из (2)–(4), граничные условия к нему имеют вид

$$\tilde{\varphi}_u(u_0) = \sqrt{\pi\rho}\,V, \quad \tilde{\varphi}(u_0) = 0. \tag{10}$$

Здесь u_0 — значение параметра u на поверхности жидкости. В дальнейшем мы будет использовать величину $K = 1/u_0$, которая, как видно из (8), задает кривизну поверхности диэлектрической жидкости на оси симметрии. Решая (9) и (10), получим окончательно:

$$\tilde{\varphi}(u) = \sqrt{\pi\rho}\,V \ln(Ku)/K, \tag{11}$$

что в сочетании с (7) задает временнýю эволюцию потенциала электрического поля. Несложно заметить, что условия (5) выполняются естественным образом. Форма поверхности для найденного нами точного решения уравнений движения жидкости задается соотношением:

$$\eta(x, y, t) = K(x^2 + y^2)/2 - Vt - (2K)^{-1},$$

что соответствует втягивающемуся в глубь жидкости углублению ее поверхности.

Для реальной конфигурации системы, когда глубина слоя диэлектрической жидкости — обозначим ее D — конечна, а разность потенциалов между заряженной поверхностью жидкости и дном (металлической подложкой) есть U, получим из (11) в предположении, что $DK \gg 1$:

$$V = \frac{UK}{\sqrt{\pi\rho}\,\ln(DK)}. \tag{12}$$

Это означает, что скорость втягивания поверхности внутрь жидкости линейно увеличивается с увеличением разности потенциалов и кривизны поверхности (в последнем случае слабой логарифмической зависимостью от K в знаменателе (12) можно пренебречь) и медленно — логарифмически — уменьшается при увеличении расстояния D.

Обсудим теперь применимость нестационарного уравнения Бернулли (3). Из уравнений (7), (10) и (12) несложно получить, что максимальная напряженность поля на поверхности есть

$$E = \frac{2UK}{\ln(DK)}.$$

Тогда электростатическое давление $P_E \sim E^2 \sim K^2 \ln^{-2} K$. С другой стороны, поверхностное давление $P_L \sim K$. Ясно, что при достаточно большой кривизне поверхности $P_E \gg P_L$ и мы можем пренебречь капиллярными эффектами. Также очевидно, что при значительных K поле над границей (т. е. в углублении эквипотенциальной поверхности) вследствие экранирования будет пренебрежимо малым по сравнению с полем под границей (т. е. вблизи острия). Это означает, что динамическое граничное условие вполне применимо в виде (3).

Таким образом, нам удалось найти частные осесимметричные решения задачи о движении заряженной эквипотенциальной поверхности в глубь диэлектрической жидкости, а также определить зависимость скорости втягивания поверхности от параметров задачи. Важно, что полученные решения не ограничены условием малости возмущений поверхности, как например в работах [2,4]. Напротив, они описывают эволюцию локализованного возмущения поверхности со значительной кривизной. Тем не менее найденные решения не следует считать решениями общего положения. Более вероятно, что доминировать будут решения взрывного типа, для которых происходит неограниченное заострение поверхности за конечное время. Однако методика построения подобных решений разработана лишь в случае плоской геометрии задачи, когда применима техника конформных отображений.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00–02–17428) и INTAS (проект 99–1068).

Список литературы

[1] *Melcher J.R.* Field-coupled Surface Waves. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1963.
[2] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // ДАН СССР. 1976. Т. 228. В. 4. С. 829.
[3] *Володин В.П., Хайкин М.С., Эдельман В.С.* // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 26. В. 10. С. 707.
[4] *Ikezi H.* // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. N 25. P. 1688.
[5] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71. В. 9. С. 534.
[6] *Иванцов Г.П.* // ДАН СССР. 1947. Т. LVIII. В. 4. С. 567.