

03

## **Условия существования автоколебаний капельного режима течения жидкости через вертикальный капилляр**

© А.В. Мелких, В.Д. Селезнев

Уральский государственный технический университет, Екатеринбург

Поступило в Редакцию 5 октября 2000 г.

На основе модели капельного течения жидкости через вертикальный капилляр, учитывающей взаимное влияние капель, получены условия организации автоколебательного режима. Найдена зависимость периода и амплитуды автоколебаний от параметров системы.

Капельное течение жидкости в капилляре используется в различных устройствах и технологических процессах: при электроструйной печати, при дозировании жидкостей в химической технологии, в медицинской технике и т.д. Переход к капельному режиму изучался как экспериментально, так и теоретически [1–5].

Условия формирования капель достаточно хорошо изучены для систем различной геометрии и разных веществ [4,5]. Однако очевидно, что при наличии внешнего шума или шума, вызванного отрывом капли, границы существования капельного режима могут претерпеть изменения. В работе [6] авторами построена модель перехода от испарительного режима к капельному и обратно. Показано, что влияние капель друг на друга при определенных параметрах системы может приводить к гистерезису. В этом случае переходы от испарительного режима к капельному и обратно могут происходить скачком.

Если над капилляром находится резервуар с жидкостью, постоянно пополняющийся некоторым заданным потоком, то, как показано в [6], существует такая область значений потока через капилляр, для которой нет стационарного решения. В таком случае в системе возможна организация автоколебаний. Целью данной работы является выяснение параметров и условий возникновения автоколебаний при течении жидкости через капилляр.

В работе [6] получено выражение для частоты падения капель ( $J$ ):

$$\frac{32\eta\gamma L}{3r} J = \Delta p - \frac{2\sigma}{r} + \xi\rho gr \exp\left(-\frac{1}{J\tau}\right),$$

где  $\Delta p$  — разность давлений на концах капилляра;  $\gamma$  — коэффициент, учитывающий различие радиусов капли и капилляра [2];  $L$  — длина капилляра,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\xi$  — безразмерный коэффициент порядка единицы,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $r$  — радиус канала,  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости. Время релаксации давлений на свободной поверхности обозначено через  $\tau$ . В безразмерных переменных

$$\Delta p' = \frac{\Delta p}{\xi\rho gr} \quad \text{и} \quad J' = J\tau$$

можно записать это уравнение в виде (штрихи опущены):

$$MJ = \Delta p - B^{-1} + \exp\left(-\frac{1}{J}\right), \quad (1)$$

где  $B = \frac{\rho gr^2 \xi}{2\sigma}$  — число Бонда, характеризующее отношение сил тяжести к силам поверхностного натяжения,  $M = \frac{32\eta\gamma L}{3r^2 \xi \rho g \tau}$  — безразмерное число, характеризующее отношение сил вязкости к силам тяжести.

В [6] показано, что кривая  $J(\Delta p)$  имеет  $S$ -образный вид при  $M < 4e^{-2}$ .

Запишем уравнение баланса объема жидкости в верхнем резервуаре в случае управления потоком:

$$S \frac{dh}{dt} = Q_{in} - Q,$$

где  $Q_{in}$  — управляющий поток (постоянная во времени величина),  $Q$  — поток через капилляр (рис. 1).

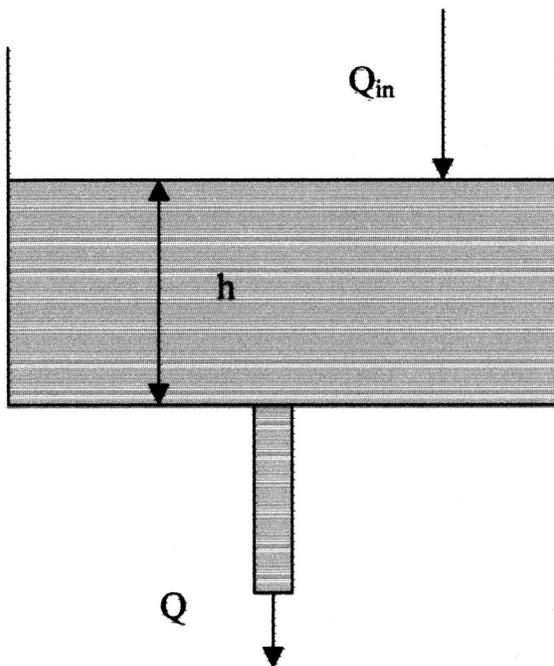


Рис. 1. Схема резервуара с капилляром.

Тогда скорость изменения разности давлений на капилляре можно записать в виде

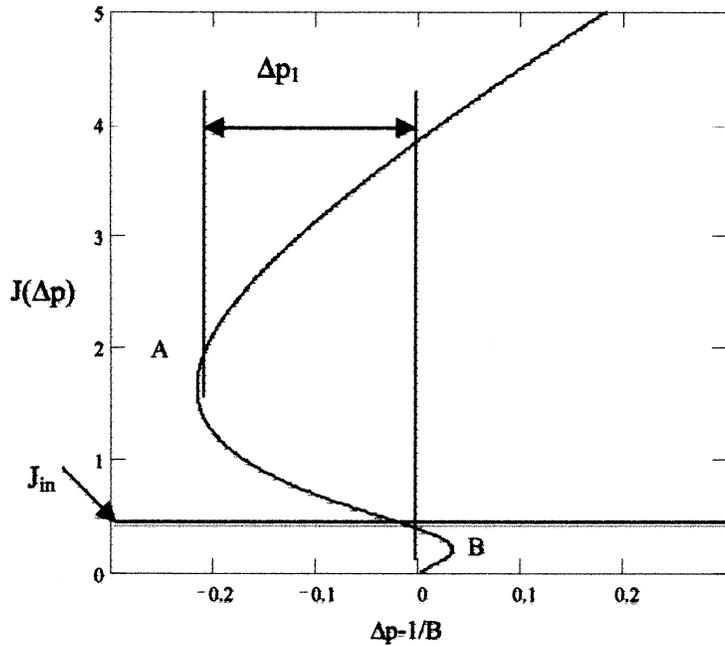
$$\frac{d\Delta p}{dt} \frac{S}{\rho g} = Q_{in} - Q. \quad (2)$$

Поток  $Q$  можно выразить через частоту падения капель:

$$Q = J \frac{4\gamma\pi r^3}{3}.$$

Подставляя вместо  $\Delta p$  его выражение через  $J$  и вводя безразмерное время

$$dt' = dt \frac{4\pi r^2 \gamma}{3\xi S \tau},$$



**Рис. 2.** Зависимость частоты падения капель от разности давлений. Горизонтальная линия — управляющий поток.

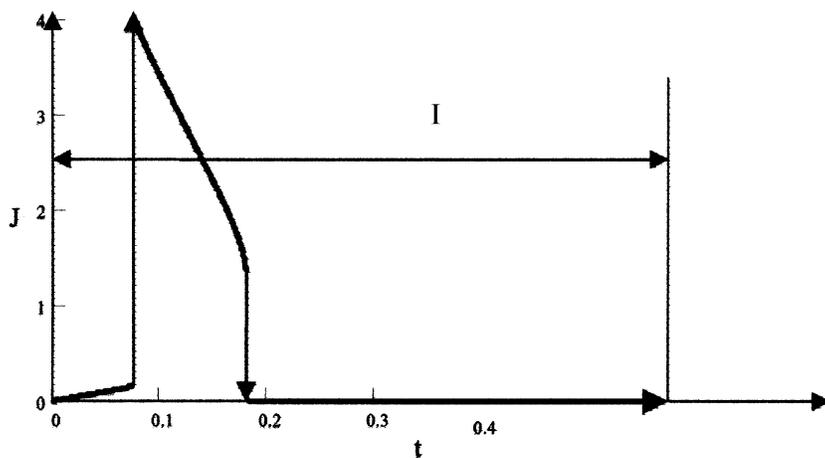
получим в безразмерных переменных (опуская штрих):

$$\left[ M - \frac{1}{J^2} \exp\left(-\frac{1}{J}\right) \right] \frac{dJ}{J_{in} - J} = dt. \quad (3)$$

Выражение (3) верно в случае, когда рассматривается промежуток времени, больший характерного времени образования капли. В случае, когда капля нет, время существования этого режима ( $t_0$ ) можно найти (из (2)) по формуле:

$$\frac{\Delta p_1}{J_{in}} = t_0. \quad (4)$$

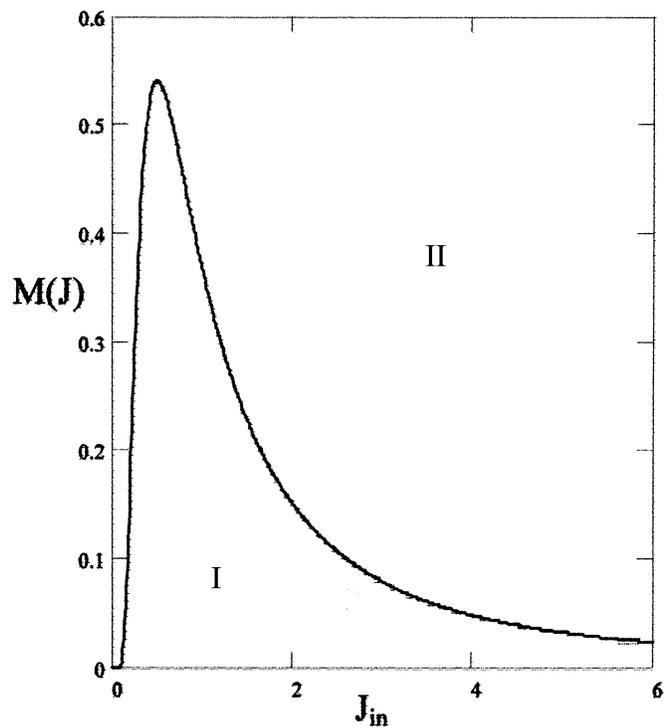
Тогда (при отсутствии шума) система будет двигаться циклически: по нижней ветви кривой  $J(\Delta p)\Delta p = 1/B$  (рис. 2), потом в точке  $B$



**Рис. 3.** Зависимость частоты падения капель от времени при  $M = 0.2$  и  $J_{in} = 0.5$ . I — период автоколебаний.

произойдет скачок на верхнюю ветвь кривой, потом по верхней кривой система дойдет до точки A и затем опять перейдет на нижнюю кривую. Физически это выразится в периодическом наличии и отсутствии капель. Регулируя управляющий поток, можно добиться изменения периода автоколебаний. Численно интегрируя уравнение (3) с использованием (1) и (4), можно получить кусочную зависимость частоты падения капель от времени. На рис. 3 представлена зависимость частоты падения капель от времени при  $J_{in} = 0.5$  и  $M = 0.2$ . Период автоколебаний можно разделить на три части, каждая из которых отвечает движению по определенному отрезку кривой (рис. 2). При малых значениях  $M$  большую часть периода автоколебаний составляет "время молчания" — отсутствие потока. Если же  $M$  приближается к критическому значению, то начиная со значения  $M = 0.37$  область молчания исчезает, однако автоколебания продолжают существовать. В этом случае они будут представлять собой чередование различных режимов падения капель: "быстрого" и "медленного" [6]. Величина периода автоколебаний зависит как от управляющего потока, так и от числа  $M$ .

Зависимость периода от управляющего потока имеет следующий характер: при приближении управляющего потока к точке потери



**Рис. 4.** Фазовая диаграмма автоколебаний в координатах  $M-J_{in}$ . I — автоколебания, II — нет автоколебаний.

устойчивости (точки  $A$  и  $B$  на рис. 2) время движения системы по соответствующей части кривой неограниченно возрастает (например, при приближении  $J_{in}$  к точке  $A$  неограниченно возрастать будет время движения по верхней части кривой). Соответственно период автоколебаний будет стремиться к бесконечности. Такое поведение периода можно получить, разлагая уравнение (3) в ряд около точки потери устойчивости. Минимальное значение периода достигается, когда управляющий поток находится между точками потери устойчивости.

При приближении числа  $M$  к критическому период автоколебаний уменьшается.

Область существования автоколебаний (фазовая диаграмма) в координатах  $M - J_{in}$  представлена на рис. 4.

При наличии шума скачкообразные переходы от одного режима к другому могут происходить раньше, чем система достигнет точки потери устойчивости. В этом случае период автоколебаний и их амплитуда уже не будут постоянными, а будут изменяться случайным образом около средних величин.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 98-01-00879).

## Список литературы

- [1] *Wilson S.D.R.* // J. Fluid Mech. 1988. 190. P. 561–570.
- [2] *Скотников А.С., Холина Т.Б.* // Химическая промышленность. 1985. № 5. С. 44–46.
- [3] *Дунский В.Ф., Никитин Н.В.* // Журнал прикладной механики и технической физики. 1980. № 1. С. 49–55.
- [4] *Григорьев А.И., Земсков А.А., Ширяева С.О.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 2. С. 50–58.
- [5] *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
- [6] *Мелких А.В., Селезнев В.Д.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 24. С. 30–36.