01

Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ГосУНЦ "Колледж", Саратов
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 19 июня 2000 г.

Основываясь на использовании вейвлетного преобразования, предлагается метод эффективного определения длительности ламинарных и турбулентных фаз во временнóй реализации при переходе к динамическому хаосу через перемежаемость.

Одним из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим является переход к хаосу через перемежаемость (см., например, [1,2]). В этом случае периодическая временнáя реализация, порожденная нелинейной динамической системой, с увеличением управляющего параметра начинает прерываться нерегулярными (или, как говорят, турбулентными) движениями. Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе "текущего" периода колебаний или амплитуды колебаний. Очевидно, что первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал, очень близкий к строго регулярному, что не всегда имеет место. Реально ламинарная фаза представляет собой почти периодическое движение, что затрудняет применение данного метода и снижает его точность. Второй метод может быть применен только в том случае, когда в хаотической области амплитуда колебаний существенно отличается от амплитуды колебаний в регулярном режиме. В противном случае мы опять сталкиваемся с необходимостью иметь строгую периодичность колебаний в фазе ламинарного движения.

Для точного диагностирования ламинарных и турбулентных фаз и определения их длительностей в настоящей работе предлагается использовать вейвлетное преобразование [3,4]:

$$W(t,s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t')\psi^*\left(\frac{t-t'}{s}\right)dt', \tag{1}$$

где $x(t)$ — временнáя реализация, $\psi(\eta)$ — базисный вейвлет (звездочка обозначает комплексное сопряжение), s — анализируемый временнóй масштаб. В качестве базисного вейвлета использовался Морлет-вейвлет [5] $\psi(\eta)=\pi^{-1/4}e^{j\omega_0\eta}e^{-\eta^2/2}$, представляющий собой быстро затухающую гармоническую волну. Здесь ω_0 было выбрано равным 6, что позволяет проводить аналогию с преобразованием Фурье [3]. С этой целью удобно рассматривать вейвлетную поверхность W, как функцию времени t и масштаба $f_s=1/s$, соответствующего частоте.

Оказывается, структура вейвлетной поверхности $W(t, f_s)$ в области ламинарной и турбулентной фазы движения существенно различна. Причем слабая нерегулярность сигнала в течение ламинарной фазы движения практически не отражается на структуре вейвлетной поверхности и, следовательно, не приводит к ошибке в определении длительности каждой из характерных фаз движения. Поэтому, если тем или иным образом анализировать структуру вейвлетной поверхности, то можно достаточно просто осуществить поиск различных фаз или перемежаемости.

Механизм диагностирования ламинарных и турбулентных фаз иллюстрируется на традиционном примере — системе Лоренца:

$$\dot{x}=\sigma(y-x),\qquad \dot{y}=rx-xz-y,\qquad \dot{z}=xy-bz. \tag{2}$$

При значениях управляющих параметров $\sigma=10$, $b=8/3$ и при $r<r^*\cong 166.07$ временнáя реализация, генерируемая системой Лоренца (например, величина x, которую мы и будем рассматривать в дальнейшем), представляет собой периодическое движение. При превышении порога r^* регулярные колебания $x(t)$ (ламинарная фаза) прерываются

хаотическими всплесками, которые с ростом r становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в системе Лоренца классифицируется как перемежаемость I-го типа [6].

На рис. 1, *a* демонстрируется временна́я реализация $x(t)$ и соответствующая проекция вейвлетной поверхности $W(t, f_s)$ при значении бифуркационного параметра $r = 166.1$. Наиболее темные участки соответствуют максимумам поверхности. Кривая на рисунке ограничивает области влияния краевых эффектов [3]. На проекции вейвлетной поверхности четко выделяются характерные структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам временно́й реализации.

Структура вейвлетной поверхности, соответствующая регулярной фазе движения, имеет профиль $W(t, f_s)|_{t=\mathrm{const}}$ с двумя глобальными максимумами (им соответствуют две темные области, расположенные параллельно оси времени, на проекции поверхности W), не изменяющийся с течением времени t в пределах ламинарной фазы. Наличие такой структуры, демонстрирующей два глобальных максимума, связано в первую очередь с особенностями спектра Фурье ламинарной фазы сигнала. В нем присутствуют две преобладающие гармоники с частотами $f_1 = 41.3$ и $f_2 = 131.3$. Именно этим частотам на вейвлетной поверхности соответствуют два максимума.

С входом системы в турбулентную фазу вид поверхности W сильно изменяется. Можно сказать, что в режиме хаотической динамики наблюдается "всплеск" разномасштабных колебательных явлений, причем основная энергия приходится на масштабы f_s, соответствующие $f_s \in (f_1, f_2)$. Заметим, что области вейвлетной поверхности, соответствующие турбулентным фазам, четко локализованы во времени.

Как уже обсуждалось, для ламинарной фазы структура поверхности не меняется с течением времени. Мгновенное распределение энергии по масштабам $E(f_s)|_{t=\mathrm{const}}$ в этом случае также не зависит от времени. Его вид приведен на рис. 1, *b*. Распределение имеет характерный вид с двумя глобальными максимумами, природа которых обсуждалась выше (они связаны с наличием преобладающих в спектре Фурье, построенном в течение длительности ламинарной фазы, частот f_1 и f_2). Переход к турбулентной фазе начинается с "расщепления" масштабов $1/f_1$ и $1/f_2$. Причем в результате этого наблюдается выделение в энергетическом спектре одного преобладающего масштаба. Далее в течение всей турбулентной фазы наблюдаются возбуждение и подавление колебаний в