

01;03

Капиллярная неустойчивость цилиндрической поверхности раздела феррожидкостей в магнитном поле с круговыми силовыми линиями

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия
e-mail: korovin@inmech.msu.su

(Поступило в Редакцию 5 марта 2001 г.)

В рамках линейной теории изучен капиллярный распад слоя вязкой магнитной жидкости, находящейся в состоянии гидроневесомости при наличии градиентного магнитного поля. Внутренней границей слоя служит цилиндрическая поверхность токонесущего проводника, а внешней — коаксиальная поверхность раздела с несмешивающейся невязкой жидкостью меньшей магнитной проницаемости. Исследовано влияние относительной толщины слоя и магнитного числа Бонда на характерное время развития наиболее быстро растущей гармоники и на характерный размер капель, образующихся в предельных режимах капиллярного распада (при больших и малых числах Онезорге).

Введение

Известно, что жидкая оболочка, покрывающая тонкую нить (именно такое строение имеет рассматривавшийся Рэлеем [1] природный объект — один из видов паутины [2]), вследствие капиллярной неустойчивости [1] изменяет первоначально цилиндрическую форму свободной поверхности. В результате образуются регулярно расположенные по длине нити капельки, нанизанные на нить подобно бусинкам (см. в [2] рис. 37, на котором отчетливо видны также расположенные в промежутках между основными капельками мелкие сателлиты, обязанные своим формированием нелинейным эффектам капиллярного распада жидкой оболочки). Аналогичным образом ведет себя тонкая пленка жидкости, нанесенная на смачиваемую твердую подложку, один из главных радиусов кривизны поверхности которой весьма мал — будь то кварцевая [2], или металлическая [3] нить, или синтетическое волокно. Следует отметить, что использование в экспериментах [3] тонкой (диаметром порядка 10^{-2} и 10^{-3} см) нити и весьма вязкой (мед) жидкости связано с необходимостью организации медленно протекающего процесса формирования мелких капель (с диаметром, много меньшим капиллярной постоянной [4] используемой жидкости), чтобы в последующем избежать их отрыва от подложки под действием силы тяжести.

Модификация подобных экспериментов путем использования находящегося в состоянии гидроневесомости слоя магнитной жидкости, покрывающего охлаждаемую стальную трубку с внешним диаметром $2 \cdot 10^{-1}$ см, по которой пропускается постоянный электрический ток [5,6], позволила не только практически неограниченно долго наблюдать стационарную финальную картину капиллярного распада на несколько порядков более толстого, чем в [3], слоя существенно менее вязкой жидкости, но и легко влиять на характерный размер образующихся капель, изменяя лишь силу тока, а значит, и плотность направленных к оси симметрии объемных магнитных сил.

Почти во всех имеющихся публикациях (см., например, [7–9] и приведенную там библиографию), посвященных теоретическому анализу капиллярного распада как цилиндрических слоев, так и цилиндрических столбов магнитных жидкостей, находящихся в магнитных полях с различными геометриями силовых линий, используется модель идеальной жидкости. Применительно к задаче о распаде цилиндрического слоя покоящейся жидкости в магнитном поле с круговыми силовыми линиями такой подход позволил вычислить критическое значение магнитного числа Бонда Bo_m (равное единице), разделяющее области устойчивости ($Bo_m > 1$) и неустойчивости ($Bo_m < 1$).

В рамках линейной теории устойчивости характерный размер капель, образующихся в результате капиллярного распада сплошного слоя, определяется длиной волны λ_* наиболее быстро растущей гармоники начального возмущения цилиндрической внешней границы слоя. Для случая тонкого цилиндрического слоя невязкой магнитной жидкости, окруженного извне покоящимся газом, в пренебрежении силой тяжести получена формула [6–8], связывающая λ_* и Bo_m . В [9] рассмотрен капиллярный распад тонкой пленки вязкой магнитной жидкости (с ньютоновским механизмом вязкости), покрывающей токонесущий проводник и имеющей внешнюю свободную границу цилиндрической формы. На основе уравнений гидродинамической теории смазки в [9] установлено, что вязкость влияет лишь на инкремент роста возмущений, в то время как λ_* не отличается от соответствующей величины, рассчитанной для тонкого слоя идеальной жидкости.

В данной работе капиллярный распад цилиндрического слоя вязкой магнитной жидкости, окруженного невязкой жидкостью с меньшей магнитной проницаемостью, исследован на базе линеаризованных уравнений феррогидродинамики. Применительно к предельным режимам распада (случаи больших и малых чисел Онезорге) изучено влияние Bo_m и относительной толщины слоя на λ_* и на характерное время развития наиболее быстро растущей гармоники.

Исходные уравнения и постановка задачи

Пусть в безграничном объеме покоящейся магнитной жидкости, имеющей плотность ρ и магнитную восприимчивость χ_2 , находится цилиндрический слой несмещающейся жидкости с той же плотностью и магнитной восприимчивостью $\chi_1 > \chi_2$, сплошь покрывающий горизонтальный проводник радиуса s и удерживаемый на его поверхности объемными силами, создаваемыми магнитным полем, индуцируемым протекающим по проводнику постоянным электрическим током силы I . Считается, что магнитные восприимчивости жидкостей зависят от модуля вектора напряженности магнитного поля. Введем цилиндрическую систему координат r, ϑ, z так, чтобы поверхность раздела жидкостей описывалась уравнением $r = a$, где $a > s$; азимутальный угол ϑ будем отсчитывать от направления силы тяжести ρg . В рассматриваемом случае магнитное поле азимутально $\mathbf{H} = (0, H, 0)$ и в занятой жидкостями области определяется выражением $H = I/(2\pi r)$. В свою очередь плотности объемных магнитных сил $\mathbf{f}_j = (f_j, 0, 0)$ соответственно во внутренней ($j = 1$) и внешней ($j = 2$) жидкостях вычисляются по формулам $\mathbf{f}_j = \mu_0 M_j \nabla H$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная постоянная, $\mathbf{M}_j = \chi_j(H)\mathbf{H}$ — намагниченность жидкости.

В состоянии гидростатического равновесия жидкостей распределения давлений P_1, P_2 в соответствующих областях описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j}{\partial r} &= \mu_0 M_j \frac{dH}{dr} + \rho g \cos \vartheta, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P_j}{\partial \vartheta} &= -\rho g \sin \vartheta; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая, что при переходе через цилиндрическую поверхность раздела жидкостей $r = a$ давление испытывает капиллярный скачок $P_1(a, \vartheta) - P_2(a, \vartheta) = \alpha/a$, из уравнений (1) находим

$$\begin{aligned} P_1(r, \vartheta) &= \frac{\alpha}{a} + \rho g r \cos \vartheta + \mu_0 \int_{H(a)}^{H(r)} M_1 dH, \\ P_2(r, \vartheta) &= \rho g r \cos \vartheta + \mu_0 \int_{H(a)}^{H(r)} M_2 dH, \end{aligned} \quad (2)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Сформулируем задачу об устойчивости гидростатического состояния (2) относительно малых осесимметричных возмущений. Пусть уравнение $r = a + \zeta(z, t)$, где $|\zeta| \ll a$, описывает форму возмущенной поверхности раздела, а выражения $P_j(r, \vartheta) + p_j(r, z, t)$ представляют распределения возмущенных давлений в момент времени t . Здесь и всюду далее $j = 1, 2$, причем, как и прежде, $j = 1$ соответствует внутренней, а $j = 2$ — внешней

жидкости. Считается, что внутренняя жидкость является ньютоновской (с коэффициентом динамической вязкости η_1), а окружающая ее жидкость идеальная. Поскольку в рассматриваемом случае распределение исходного магнитного поля и форма возмущенной поверхности раздела обладают осевой симметрией, то в процессе развития капиллярной неустойчивости магнитные силовые линии не пересекают поверхности раздела, так что магнитное поле \mathbf{H} и плотности объемных магнитных сил \mathbf{f}_j не претерпевают возмущений. Ввиду этого линеаризованные уравнения феррогидродинамики (здесь полагается $\eta_2 = 0$) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{u_j}{r} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{\partial p_j}{\partial r} + \eta_j \left(\Delta u_j - \frac{u_j}{r^2} \right), \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial w_j}{\partial t} = -\frac{\partial p_j}{\partial z} + \eta_j \Delta w_j, \quad (5)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$u_j, 0, w_j$ — компоненты вектора скорости \mathbf{v} ; в дальнейшем всюду вместо η_1 будем использовать η .

Условия непроницаемости и обращения в нуль касательной составляющей скорости на поверхности проводника, а также линеаризованные кинематические и динамические условия на поверхности раздела вязкой и невязкой жидкостей записываются следующим образом:

$$r = s: \quad u_1 = 0, \quad w_1 = 0, \quad (6)$$

$$r = a: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_2, \quad u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} r = a: \quad p_1 - p_2 &= 2\eta \frac{\partial u_1}{\partial r} - \alpha \left(\frac{\zeta}{a^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\mu_0 \zeta}{2\pi a^2} I(M_1 - M_2)|_{H=H(a)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Физический смысл имеют, естественно, лишь ограниченные при $r = 0$ и исчезающие при $r \rightarrow \infty$ функции u_j, w_j, p_j .

Влияние магнитного поля на развитие капиллярной неустойчивости исходного цилиндрического слоя магнитной жидкости возникает лишь при наличии скачка магнитной восприимчивости при переходе через поверхность раздела жидкостей и осуществляется за счет вклада магнитных сил в условие баланса нормальных напряжений на поверхности раздела (8). Своим происхождением этот вклад обязан интегральным слагаемым в выражениях (2) для невозмущенных давлений. Физическая причина появления действующих на возмущенную поверхность раздела нестационарных сил, порождаемых градиентным магнитным полем, не претерпевающим возмущений в процессе развития неустойчивости, имеет

простое объяснение: при наличии скачка магнитной восприимчивости эти силы возникают в результате изменения магнитного поля $H(a + \zeta) - H(a) \approx \zeta dH/dr|_{r=a}$, связанного с изменением места нахождения поверхности раздела при осесимметричном деформировании ее исходной цилиндрической формы. Ввиду этого последнее слагаемое в правой части линеаризованного динамического условия (8), описывающее возмущение давления, создаваемое объемными магнитными силами, функционально зависит лишь от возмущения поверхности раздела $\zeta(z, t)$, тогда как возмущение давления, создаваемое капиллярными силами, — второе слагаемое зависит как от $\zeta(z, t)$, так и от $\partial^2 \zeta / \partial z^2$.

Как показывают эксперименты [5–8], среди различных по своей физической природе сил, рассматриваемых в данной задаче, капиллярные и магнитные силы занимают особое положение, поскольку именно их взаимная конкуренция приводит либо к реализации сплошного слоя магнитной жидкости (случай $Bo_m > 1$), либо к его распаду на отдельные капли (случай $Bo_m < 1$). Мерой относительной роли этих сил является магнитное число Бонда $Bo_m = \mu_0 I^2 (\chi_1 - \chi_2)|_{H=H(a)} / (4\pi^2 \alpha a)$ — отношение третьего слагаемого в правой части равенства (8) к зависящей лишь от $\zeta(z, t)$ части второго слагаемого.

С целью упрощения дальнейших выкладок преобразуем выписанные уравнения и краевые условия. Поскольку в рассматриваемом случае внешние силы потенциальны и поле скоростей непрерывно, а движение возникает из состояния покоя, то в области $(a + \zeta \leq r < \infty, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty)$ существует [10] потенциал скоростей $\varphi_2(r, z, t)$, так что

$$u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad w_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \quad (9)$$

При этом движение невязкой магнитной жидкости описывается уравнением Лапласа

$$\Delta \varphi_2 = 0 \quad (10)$$

и линеаризованным интегралом Коши–Лагранжа

$$p_2 = -\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \quad (11)$$

Движение вязкой жидкости, естественно, является вихревым. В области $(s \leq r \leq a + \zeta, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty)$ введем потенциал скоростей $\varphi_1(r, z, t)$ и функцию тока $\psi(r, z, t)$. Полагая

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12)$$

и следуя процедуре, примененной в задаче о плоских колебаниях вязкой жидкости [11], перейдем от системы (3)–(5), описывающей вихревое осесимметричное движение вязкой жидкости в примыкающем к поверхности проводника слое, к уравнениям

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (13)$$

и представлению для возмущения давления

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}. \quad (14)$$

С использованием (9), (11), (12), (14) краевые условия (6)–(8) приводятся к следующей форме записи:

$$\begin{aligned} r = s: \quad & \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \\ r = a: \quad & \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \\ & 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \\ & \rho \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) = 2\eta \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\mu_0 \zeta}{2\pi a^2} I(M_1 - M_2)|_{H=H(a)} - \alpha \left(\frac{\zeta}{a^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В дальнейшем при выводе и анализе дисперсионного соотношения используется постановка задачи (10), (13), (15) в терминах $\zeta, \varphi_1, \varphi_2, \psi$.

Инерционный и вязкий режимы капиллярного распада

В рамках сформулированной задачи возможны различные предельные режимы капиллярного распада слоя, физическая реализация которых определяется степенью влияния (по отношению друг к другу) инерционных и вязких сил на процесс развития возмущений. Эти режимы различаются между собой характерными скоростями жидкости и масштабами времени, характеризующими линейную стадию развития неустойчивости.

Прежде чем приступить к обсуждению возможных предельных случаев, заметим, что в рассматриваемой задаче независимо от режима развития неустойчивости имеется масштаб времени $\tau_d = d^2/\nu$ — характерное время диффузии завихренности, порождаемой твердой поверхностью (вследствие наличия на ней условия прилипания жидких частиц) и диффундирующей в глубь слоя вязкой жидкости толщины $d = a - s$.

Имеющиеся теоретические работы посвящены исследованию капиллярного распада слоя магнитной жидкости в случае, когда в уравнениях движения (4), (5), где $j = 1$, и в краевом условии (8) вклад сил вязкости пренебрежимо мал. Согласно (8), в этом случае при $Bo_m < 1$ вызываемое капиллярными силами возмущение давления в слое имеет порядок $p_* \sim \alpha \zeta_* / a^2$, где ζ_* — характерное отклонение поверхности раздела от исходной цилиндрической формы. С учетом выписанной оценки из уравнения (4) находим характерную радиальную скорость вязкой жидкости $u_* \sim p_* \tau_i / (\rho d)$, а затем из уравнения неразрывности (3) находим характерную осевую скорость $w_* \sim u_* \lambda_* / d$; здесь τ_i — характерное время

линейной стадии развития неустойчивости, λ_* — длина волны наиболее быстро растущей гармоники. С другой стороны, из кинематического условия на поверхности раздела жидкостей — первое равенство (7) следует $u_* \sim \zeta_*/\tau_i$. В результате имеем $\tau_i^2 \sim \rho a^2 d/\alpha$. Таким образом, режим распада слоя, управляемый капиллярными и инерционными силами, характеризуется масштабом времени $\tau_i \sim a\sqrt{\rho d/\alpha}$.

С целью записи в терминах безразмерных критериев условия реализации такого режима обратимся к уравнениям движения (4), (5) вязкой жидкости ($j = 1$) и к краевому условию (8), в котором фигурируют силы вязкости. Используя полученные оценки, находим

$$\frac{\eta|\Delta u_1 - u_1/r^2|}{\rho|\frac{\partial u_1}{\partial t}|} \sim \frac{\tau_i}{\tau_d}, \quad \frac{\eta|\Delta w_1|}{\rho|\frac{\partial w_1}{\partial t}|} \sim \frac{\tau_i}{\tau_d},$$

$$\frac{\eta|\frac{\partial u_1}{\partial r}|}{\alpha|\zeta|/a^2} \sim \frac{\tau_i}{\tau_d}, \quad \frac{\tau_i}{\tau_d} \sim \frac{a}{d} \frac{\eta}{\sqrt{\rho\alpha d}}. \quad (16)$$

Таким образом, при выполнении условия $Z \ll \delta$, где $Z = \eta/\sqrt{\rho\alpha d}$, а $\delta = d/a$, $0 < \delta < 1$ — относительная толщина слоя вязкой жидкости, влияние сил вязкости на развитие капиллярной неустойчивости пренебрежимо мал. Безразмерный критерий Z (число Онезорге) впервые, по-видимому, был введен в работе [12] при обработке экспериментальных данных по капиллярному распаду жидких цилиндрических струй диаметром d , инжектируемых в газовую среду. В современной литературе, посвященной капиллярному распаду тонких нитей вязких жидкостей (см., например, [13]), число Онезорге называют величиной Z^2 .

В данной работе основное внимание уделяется другому предельному режиму — случаю капиллярного распада цилиндрического слоя вязкой жидкости, когда силы инерции малы. Пусть τ_v — характерное время линейной стадии развития возмущений в этом режиме. Аналогично предыдущему имеем $p_* \sim \alpha\zeta_*/a^2$, $u_* \sim \zeta_*/\tau_v$, $w_* \sim u_*\lambda_*/d$. Согласно уравнению (4), порядок характерной радиальной скорости определяется балансом сил вязкости и сил давления. Из этого условия получаем $u_* \sim p_*d/\eta$ и далее находим $\tau_v \sim \eta a/(\alpha\delta)$, так что при оценке отношения вязких сил к силам инерции в правых частях выражений (16) вместо τ_i/τ_d получаем $\tau_v/\tau_d \sim (Z/\delta)^2$. Таким образом, при $Z^2 \gg \delta^2$ влияние сил инерции на капиллярный распад цилиндрического слоя вязкой жидкости мал.

С использованием безразмерных параметров $Z = \eta/\sqrt{\rho\alpha d}$ и $\delta = d/a < 1$ нетрудно показать

$$\tau_d = \frac{\tau_0}{Z}, \quad \tau_i \sim \frac{\tau_0}{\delta}, \quad \tau_v \sim \frac{Z}{\delta^2} \tau_0, \quad (17)$$

где $\tau_0 = \sqrt{\rho d^3/\alpha}$ — некоторое характерное время рассматриваемой задачи.

Из представлений (17) следует, что при $Z \sim 1$, $\delta \sim 1$ масштабы τ_d, τ_i, τ_v одинаковы по порядку величины, тогда как в случаях $Z \ll \delta$ (инерционный режим) и $Z \gg \delta$ (вязкий режим) эти масштабы подчинены соответственно условиям $\tau_v \ll \tau_i \ll \tau_d$ и $\tau_d \ll \tau_i \ll \tau_v$.

Дисперсионное соотношение

Исследуем поведение при возрастании времени частных решений поставленной задачи, имеющих вид

$$[\zeta(z, t), \varphi_j(r, z, t), \psi(r, z, t)]$$

$$= \exp[i(kz - \omega t)][\zeta_0, \Phi_j(r), \Psi(r)];$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь ζ_0 — константа, k — задаваемый действительный параметр (волновое число). Содержанием линейной теории устойчивости однородных состояний сплошных сред являются нахождение и анализ поведения функции $\omega = W(k)$ в зависимости от величин безразмерных параметров, характеризующих исследуемое явление.

При подстановке выражений (18) в уравнения (10), (13) получаем

$$\Phi_j'' + \frac{1}{r} \Phi_j' - k^2 \Phi_j = 0, \quad \Psi'' - \frac{1}{r} \Psi' - m^2 \Psi = 0,$$

$$m = \sqrt{k^2 - i \frac{\omega}{\nu}}, \quad \text{Re } m > 0, \quad (19)$$

в то время как краевые условия (15) принимают вид

$$\Phi_1'(s) + \frac{ik}{s} \Psi(s) = 0, \quad ik\Phi_1(s) - \frac{1}{s} \Psi'(s) = 0,$$

$$i\zeta_0\omega + \Phi_2'(a) = 0, \quad \Phi_1'(a) - \Phi_2'(a) + \frac{ik}{a} \Psi(a) = 0,$$

$$2ik\Phi_1'(a) - \frac{1}{a}[k^2\Psi(a) - \Psi''(a)] + \frac{1}{a^2} \Psi'(a) = 0,$$

$$i\rho\omega[\Phi_2(a) - \Phi_1(a)] + 2\eta \left\{ \Phi_1''(a) + \frac{ik}{a} \left[\Psi'(a) - \frac{1}{a} \Psi(a) \right] \right\}$$

$$+ \frac{\alpha\zeta_0}{a^2} [\text{Bo}_m - 1 + (ka)^2] = 0. \quad (20)$$

Последнее равенство (20) показывает, что для гармонического возмущения цилиндрической формы поверхности раздела жидкостей $\zeta = \zeta_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ с некоторым волновым числом k вклад поверхностных сил магнитного происхождения в условие баланса нормальных напряжений на поверхностных раздела (а значит, и степень влияния магнитных сил на эволюцию данной гармоники) не зависит от k , т.е. при заданном $\text{Bo}_m \neq 0$ этот вклад одинаков для всех гармоник. Таким образом, изменяя протекающий по проводнику ток, можно эффективно влиять на процесс развития гармоник во всем диапазоне изменения волнового числа $0 < k < \infty$.

Из уравнений (19) находим

$$\Phi_1 = A_1 I_0(kr) + B K_0(kr), \quad \Phi_2 = A_2 K_0(kr),$$

$$\Psi = r[C_1 I_1(mr) + C_2 K_1(mr)], \quad (21)$$

где $I_l(x), K_l(x)$ ($l = 1, 2$) — модифицированные функции Бесселя; A_1, A_2, B, C_1, C_2 — произвольные константы.

Полученные решения должны удовлетворять краевым условиям (20). При подстановке выражений (21) в равенства (20) с использованием рекуррентных формул для функций Бесселя [14] приходим к следующей системе линейных однородных уравнений относительно $\zeta_0, A_1, A_2, B, C_1, C_2$

$$\begin{aligned} I_1(x)A_1 - K_1(x)B + iI_1(x_1)C_1 + iK_1(x_1)C_2 &= 0, \\ ixI_0(x)A_1 + ixK_0(x)B + x_1I_0(x_1)C_1 - x_1K_0(x_1)C_2 &= 0, \\ i\omega a\zeta_0 - \varkappa K_1(\varkappa)A_2 &= 0, \\ I_1(\varkappa)A_1 - K_1(\varkappa)B + K_1(\varkappa)A_2 + iI_1(\varkappa_1)C_1 + iK_1(\varkappa_1)C_2 &= 0, \\ 2i\varkappa^2 I_1(\varkappa)A_1 - 2i\varkappa^2 K_1(\varkappa)B - (\varkappa^2 + \varkappa_1^2)I_1(\varkappa_1)C_1 & \\ - (\varkappa^2 + \varkappa_1^2)K_1(\varkappa_1)C_2 &= 0, \\ \alpha\zeta_0(1 - \text{Bo}_m - \varkappa^2) + [i\rho\omega a^2 I_0(\varkappa) - 2\eta\varkappa^2 I_1'(\varkappa)]A_1 & \\ + [i\rho\omega a^2 K_0(\varkappa) + 2\eta\varkappa^2 K_1'(\varkappa)]B - i\rho\omega a^2 K_0(\varkappa)A_2 & \\ - 2i\eta\varkappa\varkappa_1 I_1'(\varkappa_1)C_1 - 2i\eta\varkappa\varkappa_1 K_1'(\varkappa_1)C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $x = \varkappa(1 - \delta)$, $x_1 = \varkappa_1(1 - \delta)$, $\varkappa = ka$, $\varkappa_1 = \sqrt{\varkappa^2 - i(a^2/\nu)\omega}$, $\text{Re}\varkappa_1 > 0$.

Обозначим $\|a_{ij}\|$ матрицу, составленную из коэффициентов алгебраической системы уравнений (22). Условие существования нетривиального решения задачи (19), (20)

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (23)$$

представляет дисперсионное соотношение, служащее для нахождения функции $\omega = W(k)$.

Обращаясь к (23), легко видеть, что матрицу $\|a_{ij}\|$ путем умножения и деления ее строк и столбцов на некоторые размерные коэффициенты, определяемые постановкой задачи, можно привести к безразмерному виду без потери общности последующего результата вычисления $\omega = W(k)$.

В случае выбора величины τ_ν в качестве масштаба времени безразмерный вид $\|c_{ij}\|$ исходной матрицы $\|a_{ij}\|$ представлен в табл. 1, где

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega\tau_\nu, \quad \varepsilon = Z^{-2}, \quad y = \sigma(1 - \delta), \\ \sigma &= \sqrt{\varkappa^2 - i\varepsilon\Omega}, \quad \text{Re}\sigma > 0, \\ c_{61} &= 1 - \text{Bo}_m - \varkappa^2, \quad c_{62} = i\varepsilon\Omega I_0(\varkappa) - 2\varkappa^2 I_1'(\varkappa), \\ c_{63} &= i\varepsilon\Omega K_0(\varkappa) + 2\varkappa^2 K_1'(\varkappa). \end{aligned} \quad (24)$$

В свою очередь в табл. 2 представлена запись исходной матрицы $\|a_{ij}\|$ в безразмерном виде $\|s_{ij}\|$, полученном при использовании τ_i в качестве характерного времени; при этом дополнительно к (24) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega\tau_i, \quad y_1 = \sigma_1(1 - \delta), \\ \sigma_1 &= \sqrt{\varkappa^2 - i\Omega_1/(Z\delta)}, \quad \text{Re}\sigma_1 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{61} &= 1 - \text{Bo}_m - \varkappa^2, \quad s_{62} = i\Omega_1 I_0(\varkappa) - 2Z\varkappa^2 I_1'(\varkappa), \\ s_{63} &= i\Omega_1 K_0(\varkappa) + 2Z\varkappa^2 K_1'(\varkappa). \end{aligned}$$

В случае $Z \sim 1$, $\delta \sim 1$ безразлично какую из матриц $\|c_{ij}\|$, $\|s_{ij}\|$ использовать при анализе дисперсионного соотношения $\det \|a_{ij}\| = 0$. Напротив, при $Z \gg 1$ надлежит обратиться к табл. 1, а при $Z \ll \delta$ — к табл. 2.

Пусть $Z \gg 1$, т.е. вклад сил инерции в процесс развития возмущений мал по сравнению с силами вязкости. Нетрудно видеть, что выражения в элементах матрицы $\|c_{ij}\|$, содержащие в качестве множителя ε , своим происхождением обязаны именно силам инерции в уравнениях Стокса (4), (5), описывающих движение вязкой ($j = 1$) жидкости. Ввиду этого при постановке задачи в рамках квазистационарных уравнений Стокса (т.е. при отбрасывании в (4), (5), где $j = 1$, производных по времени) в элементах матрицы $\|c_{ij}\|$ исчезают слагаемые, содержащие ε . При этом второй столбец рассматриваемой матрицы становится пропорциональным пятому столбцу, а третий — шестому, так что $\det \|c_{ij}\| = 0$ при любых $\Omega, \varkappa, \delta$. Таким образом, несмотря на малость сил инерции (в случае $Z \gg 1$), их учет в рассматриваемой задаче принципиально необходим, поскольку, как показывает проведенный анализ, в рамках квазистационарных уравнений Стокса дисперсионного соотношения не существует. Эта ситуация аналогична известному парадоксу, состоящему в том, что при отбрасывании в уравнении движения как нелинейной, так и линейной части инерционного члена не существует решения задачи о поперечном обтекании бесконечного цилиндра при его движении в вязкой жидкости (заполняющей все пространство), удовлетворяющего краевым условиям на поверхности цилиндра и обращаемого к нулю на бесконечности [15,16].

Анализ предельных режимов развития капиллярной неустойчивости

В общем случае ввиду сложности дисперсионного соотношения (23) имеющие физический смысл корни могут быть получены лишь численно, тогда как предельные режимы допускают аналитическое исследование. Обратимся вначале к случаю $Z \gg 1$ (т.е. $\varepsilon \ll 1$) и введем обозначение $\det \|c_{ij}\| = F(\Omega, \varkappa; \varepsilon, \delta)$. Легко видеть $F(0, \varkappa; \varepsilon, \delta) = 0$, поскольку при $\Omega = 0$ второй столбец матрицы $\|c_{ij}\|$ пропорционален пятому, а третий — шестому столбцу. Вычислив $F'_\Omega(\Omega, \varkappa; \varepsilon, \delta)$, нетрудно заметить, что каждый определитель, фигурирующий в виде отдельного слагаемого в выражении $F'_\Omega(0, \varkappa; \varepsilon, \delta)$, содержит два пропорциональных между собой столбца, ввиду чего $F'_\Omega(0, \varkappa; \varepsilon, \delta) = 0$. С использованием пакета символьных вычислений MAPLE установлено, что при всех $\varkappa, \varepsilon, \delta$, допускаемых постановкой задачи, выполняется условие $F''_{\Omega\Omega}(0, \varkappa; \varepsilon, \delta) \neq 0$. Таким образом, дисперсионное соотношение $\det \|c_{ij}\| = 0$ имеет корень $\Omega = 0$ кратности два. С физической точки зрения тривиальный корень не представляет интереса.

Таблица 1. Безразмерный вид матрицы из коэффициентов системы уравнений (22). Вязкий режим капиллярного распада

0	$I_1(x)$	$-K_1(x)$	0	$iI_1(y)$	$iK_1(y)$
0	$ixI_0(x)$	$ixK_0(x)$	0	$-yI_0(y)$	$yK_0(y)$
$i\Omega\delta$	0	0	$-xK_1(x)$	0	0
0	$I_1(x)$	$-K_1(x)$	$K_1(x)$	$iI_1(\sigma)$	$iK_1(\sigma)$
0	$2ix^2I_1(x)$	$-2ix^2K_1(x)$	0	$-(x^2 + \sigma^2)I_1(\sigma)$	$-(x^2 + \sigma^2)K_1(\sigma)$
c_{61}	c_{62}	c_{63}	$-i\epsilon\Omega K_0(x)$	$-2ix\sigma I_1'(\sigma)$	$-2ix\sigma K_1'(\sigma)$

Таблица 2. Безразмерный вид матрицы из коэффициентов системы уравнений (22). Инерционный режим капиллярного распада

0	$I_1(x)$	$-K_1(x)$	0	$iI_1(y_1)$	$iK_1(y_1)$
0	$ixI_0(x)$	$ixK_0(x)$	0	$-y_1I_0(y_1)$	$y_1K_0(y_1)$
$i\Omega_1$	0	0	$-xK_1(x)$	0	0
0	$I_1(x)$	$-K_1(x)$	$K_1(x)$	$iI_1(\sigma_1)$	$iK_1(\sigma_1)$
0	$2ix^2I_1(x)$	$-2ix^2K_1(x)$	0	$-(x^2 + \sigma_1^2)I_1(\sigma_1)$	$-(x^2 + \sigma_1^2)K_1(\sigma_1)$
s_{61}	s_{62}	s_{63}	$-i\Omega_1 K_0(x)$	$-2ix\sigma_1 I_1'(\sigma_1)$	$-2ix\sigma_1 K_1'(\sigma_1)$

Аналогичный анализ показывает, что при произвольных $\Omega, x, \delta \neq 0$ имеют место равенства $F(\Omega, x, 0, \delta) = 0$, $F'_\epsilon(\Omega, x, 0, \delta) = 0$. Ввиду этого разложение $F(\Omega, x, \epsilon, \delta)$ по степеням ϵ начинается с квадратичного члена. Таким образом, при $\epsilon \ll 1$ условие существования нетривиального решения системы алгебраических уравнений (22) в первом приближении записывается следующим образом:

$$F''_{\epsilon\epsilon}(\Omega, x, 0, \delta) = 0. \quad (25)$$

Разлагая $\det\|c_{ij}\|$ по первому столбцу, имеем

$$F(\Omega, x, \epsilon, \delta) = i\Omega\delta C_{31} + (1 - \text{Bo}_m - x^2)C_{61},$$

где $C_{31}(\Omega, x, \epsilon, \delta)$, $C_{61}(\Omega, x, \epsilon, \delta)$ — алгебраические дополнения соответственно элементов c_{31} и c_{61} .

С учетом этого равенства при выполнении условия $\delta \neq 0$ из (25) находим приближенное выражение корня дисперсионного соотношения

$$\omega = \frac{i\alpha}{\eta a} q(x, \delta)(1 - \text{Bo}_m - x^2),$$

$$q(x, \delta) = \frac{d^2 C_{61}}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} \left(\frac{d^2 C_{31}}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} \right)^{-1}, \quad (26)$$

используемое далее при анализе влияния безразмерных параметров Bo_m и на процесс капиллярного распада слоя.

Отметим, что в предельном (при $\delta \rightarrow 0$, $\text{Bo}_m = 0$) случае из (26) следует известный со времени Рэлея результат

$$\omega = \frac{i\alpha}{2\eta a} \frac{(1 - x^2)I_1^2(x)}{x^2 I_0^2(x) - (x^2 + 1)I_1^2(x)}$$

теории капиллярной неустойчивости тонких нитей сильно вязких жидкостей [1,17–19].

Формула (26) представляет главный член разложения ω по степеням ϵ при всех $x \geq 0$, $0 < \delta < 1$. Исходя

из (26) принципиально невозможно найти главный член разложения ω по степеням δ , поскольку функция $q(x, \delta)$ не определена при $\delta = 0$. Для решения такой задачи необходимо установить отношение порядка между δ и ϵ и при построении приближенного решения уравнения $\det\|c_{ij}\| = 0$ использовать разложение $F(\Omega, x, \epsilon, \delta)$ по асимптотической последовательности функций, содержащей произведения $\epsilon^m \delta^n$, $m, n = 1, 2, \dots$. В случае $\epsilon \ll 1$, $\delta \sim \epsilon$ с использованием MAPLE получено

$$F(\Omega, x, \epsilon, \delta) = \epsilon^2 \delta [P(\Omega, x) + \delta Q(\Omega, x) + \delta^2 R(\Omega, x)], \quad (27)$$

где

$$P(\Omega, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial \epsilon^2 \partial \delta} \Big|_{\epsilon=0, \delta=0} = \frac{i}{x} \Omega^3 K_1(x),$$

$$Q(\Omega, x) = \frac{1}{4} \frac{\partial^4 F}{\partial \epsilon^2 \partial \delta^2} \Big|_{\epsilon=0, \delta=0} = \frac{i}{x} \Omega^3 K_1(x),$$

$$R(\Omega, x) = \frac{1}{12} \frac{\partial^5 F}{\partial \epsilon^2 \partial \delta^3} \Big|_{\epsilon=0, \delta=0} = \frac{1}{3x} \Omega^2 K_1(x)$$

$$\times [x^2(1 - \text{Bo}_m - x^2) + 3i\Omega(1 + 2x^2)].$$

Приравнивая нулю правую часть выражения (27), в первом приближении находим

$$\omega = \frac{i\alpha\delta^3}{3\eta a} x^2(1 - \text{Bo}_m - x^2). \quad (28)$$

Отметим, что в знаменателе аналогичной формулы [9], полученной в рамках уравнений гидродинамической теории смазки, вместо численного коэффициента 3 стоит 2. В отличие от [9] проведенный анализ позволил установить условие применимости формулы (28), а именно $\delta \sim \epsilon \ll 1$.

При $Bo_m > 1$ из (28) следует $\text{Im } \omega < 0$, т.е. слой устойчив. В случае же $Bo_m < 1$ $0 < \varkappa < \sqrt{1 - Bo_m}$, т.е. слой неустойчив, поскольку $\text{Im } \omega > 0$, но магнитное поле все же стабилизирует неустойчивый при $Bo_m = 0$ диапазон гармоник с волновыми числами $\sqrt{1 - Bo_m} < \varkappa < 1$. Таким образом, в соответствии с имеющимися работами значение $Bo_m = 1$ является критическим.

Несложный анализ показывает, что при $Bo_m < 1$ наиболее быстро растет гармоника с безразмерным волновым числом $ka = \sqrt{(1 - Bo_m)}/2$. Длина волны и инкремент роста этой гармоники выражаются соответственно формулами

$$\lambda_*^0 = 2\pi a \sqrt{\frac{2}{1 - Bo_m}}, \quad \text{Im } \omega_*^0 = \frac{\alpha \delta^3}{12\eta a} (1 - Bo_m)^2. \quad (29)$$

Рассмотрим инерционный режим капиллярного распада слоя, реализующийся при $Z \ll \delta$. Из дисперсионного соотношения (23) с использованием табл. 2 имеем

$$\Omega_1 = i(1 - Bo_m - \varkappa^2)T(\Omega_1, \varkappa; Z, \delta),$$

$$T(\Omega_1, \varkappa; Z, \delta) = S_{61}S_{31}^{-1},$$

где $S_{31}(\Omega_1, \varkappa; Z, \delta)$, $S_{61}(\Omega_1, \varkappa; Z, \delta)$ — алгебраические дополнения элементов s_{31} и s_{61} .

С помощью MAPLE найдено

$$\lim_{Z \rightarrow 0} T = \frac{i\varkappa^2 K_1(\varkappa)}{\Omega_1 K_1[\varkappa(1 - \delta)]} \times \{I_1(\varkappa)K_1[\varkappa(1 - \delta)] - I_1[\varkappa(1 - \delta)]K_1(\varkappa)\}.$$

Таким образом, в случае полного пренебрежения влиянием вязкости (т.е. в рамках модели идеальной жидкости) дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho a^2 d} \frac{\varkappa^2 K_1(\varkappa)}{K_1[\varkappa(1 - \delta)]} (Bo_m - 1 + \varkappa^2) \times \{I_1(\varkappa)K_1[\varkappa(1 - \delta)] - I_1[\varkappa(1 - \delta)]K_1(\varkappa)\}. \quad (30)$$

При $\varkappa > 0$, $0 < \delta < 1$ выражение в фигурных скобках в (30) положительно, так что знак ω^2 как функции \varkappa , Bo_m , δ определяется выражением $Bo_m - 1 + \varkappa^2$. Легко видеть, что $\omega^2 < 0$ при $Bo_m < 1$ (т.е. слой неустойчив), тогда как $\omega^2 > 0$ при $Bo_m > 1$ (слой устойчив). В предельных случаях $\delta \rightarrow 1$, $\delta \rightarrow 0$ из (30) соответственно получаем

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho a^3} \varkappa^2 I_1(\varkappa) K_1(\varkappa) (Bo_m - 1 + \varkappa^2), \quad (31)$$

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho a^3} \varkappa^2 (Bo_m - 1 + \varkappa^2). \quad (32)$$

Отметим, что в имеющихся работах дисперсионные соотношения (30), (31) не выписывались и не использовались при анализе влияния Bo_m и δ на длину волны наиболее быстро растущей гармоники, хотя аналогичная

выражению (30) формула (получаемая при другом обезмеривании ω и толщины слоя) следует из формулы (3.88) в [8]. В отсутствие магнитного поля выражение (31) существенно отличается от дисперсионного соотношения задачи о капиллярном распаде цилиндрического столба идеальной жидкости, окруженного покоящимся газом [20], которое использовано в [8] при анализе ка-

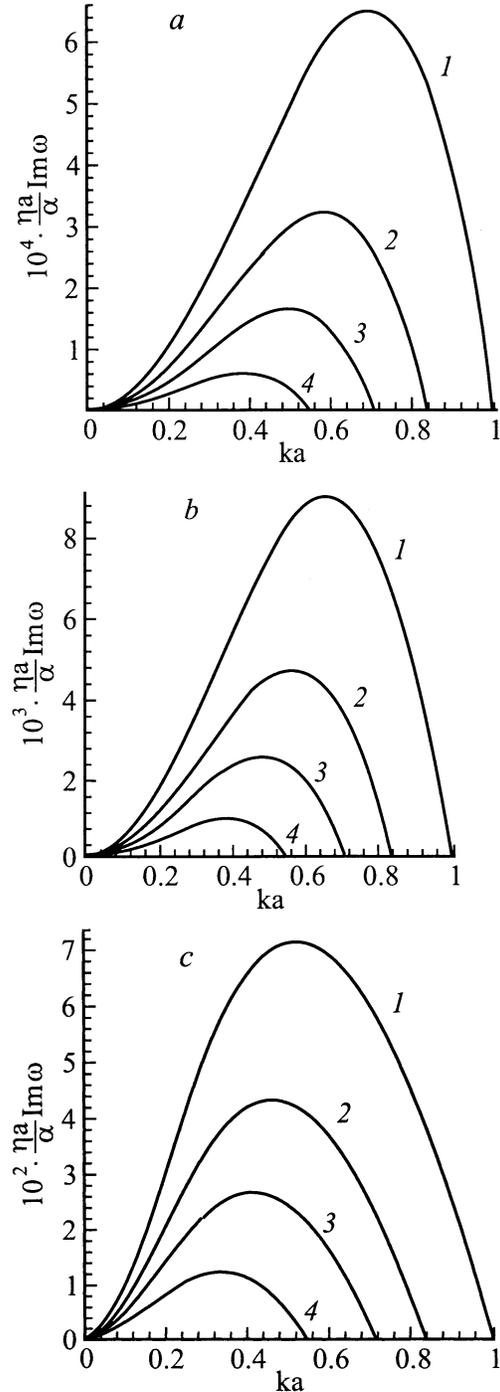


Рис. 1. Зависимость безразмерного инкремента от безразмерного волнового числа. Вязкий режим капиллярного распада. $\delta = 0.2$ (a), 0.5 (b), 0.99 (c); $Bo_m = 0$ (1), 0.3 (2), 0.5 (3), 0.7 (4).

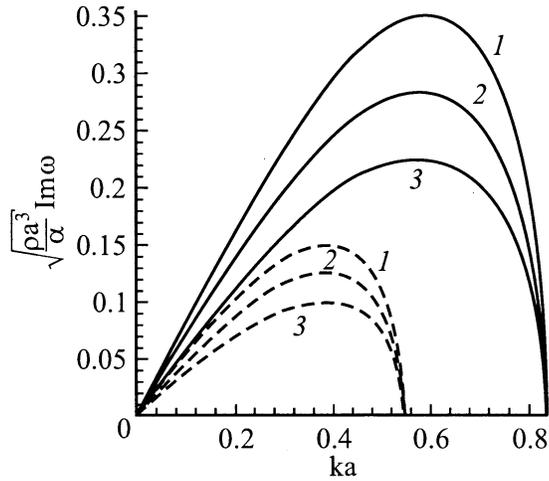


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для инерционного режима капиллярного распада. δ : 1 (1), 0.5 (2), $\delta \ll 1$ (3). Сплошные кривые — $\text{Bo}_m = 0.3$, штриховые — $\text{Bo}_m = 0.7$.

пиллярного распада цилиндрического столба жидкости, находящегося в состоянии гидроневесомости.

Пользуясь (32), нетрудно показать, что при $\delta \ll 1$ длина волны наиболее быстро растущей гармоники выражается первой формулой (29), а инкремент роста этой гармоники равен

$$\text{Im} \omega_* = \sqrt{\frac{\alpha}{4\rho a^3}} (1 - \text{Bo}_m).$$

Таким образом, капли, образующиеся при предельных (вязком и инерционном) режимах капиллярного распада двух различных тонких ($\delta \ll 1$) слоев, при фиксированном $\text{Bo}_m < 1$ имеют одинаковые характерные размеры. Инкременты же роста характерных гармоник, определяющих процесс распада, в каждом из этих режимов существенно различны.

Рис. 1 (вязкий режим капиллярного распада) и 2 (инерционный режим) иллюстрируют влияние магнитного числа Бонда (грубо говоря, силы протекающего по проводнику тока) и относительной толщины слоя на зависимость мнимых частей ω (записанных в безразмерном виде) от безразмерного волнового числа ka . Кривые на рис. 1, а-с представляют графики функции (26) при фиксированном δ и различных Bo_m , а кривые 1-3 на рис. 2 построены с использованием соответственно формул (31), (30), (32) при различных значениях Bo_m . Из рис. 1, 2 видно, что при фиксированном δ с увеличением Bo_m увеличивается характерное время развития $(\text{Im} \omega_*)^{-1}$ наиболее быстро растущей гармоники (реализующей максимум соответствующей кривой). В случае же фиксированного Bo_m с увеличением δ характерное время $(\text{Im} \omega_*)^{-1}$ уменьшается, т. е. при неизменной силе тока, протекающего по проводнику заданного диаметра, в каждом из рассматриваемых предельных режимов процесс капиллярного распада более толстого слоя магнитной жидкости протекает быстрее. Из сравнения

рис. 1, а, б и с видно, что в вязком режиме распада величина $(\text{Im} \omega_*)^{-1}$ гораздо более сильно реагирует на изменение δ , чем на изменение Bo_m , т. е. характерное время развития наиболее быстро растущей гармоники определяется относительной толщиной слоя, тогда как влияние слоя тока существенно слабее. В инерционном режиме распада (рис. 2) прослеживается противоположная ситуация — величина $(\text{Im} \omega_*)^{-1}$ определяется главным образом силой тока, в то время как относительная толщина слоя играет второстепенную роль.

Рис. 3, 4 позволяют сопоставить степень влияния параметров Bo_m и δ на характерный размер капель λ_*/a , образующихся в предельных режимах капиллярного рас-

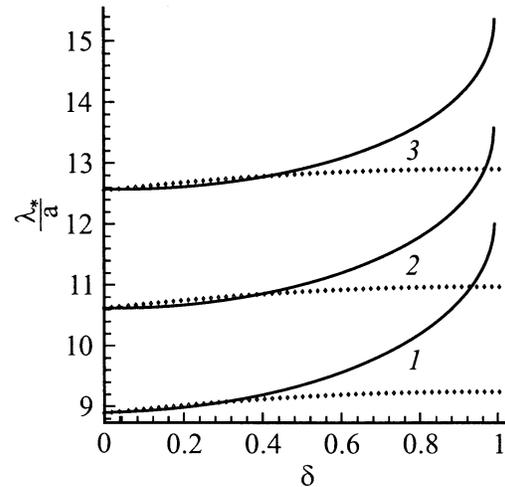


Рис. 3. Зависимость безразмерной длины волны наиболее быстро растущей гармоники от относительной толщины слоя. Bo_m : 0 (1), 0.3 (2), 0.5 (3). Сплошные кривые — вязкий режим капиллярного распада, ромбы — инерционный режим.

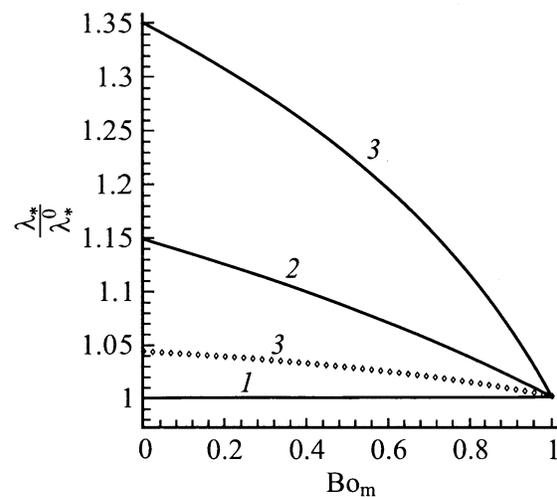


Рис. 4. Зависимость нормированной длины волны наиболее быстро растущей гармоники от магнитного Бонда. $\delta = 0.01$ (1), 0.8 (2), 0.99 (3). Сплошные кривые — вязкий режим капиллярного распада, ромбы — инерционный режим.

пада слоя. Из рис. 3 видно, что при $\delta \leq 0.4$ и фиксированном Bo_m различие характерных размеров капель, образующихся в разных предельных режимах распада, невелико, а сама величина λ_*/a определяется в основном величиной магнитного числа Бонда, увеличиваясь с увеличением Bo_m . В вязком режиме распада при $Bo_m \leq 0.5$ рост λ_*/a , вызываемый увеличением силы тока, сопоставим с ростом, вызываемым увеличением (во всем диапазоне $0 < \delta \leq 1$) относительной толщины слоя. В инерционном же режиме распада характерный размер капель незначительно увеличивается с увеличением δ , но в основном определяется величиной магнитного числа Бонда. Из рис. 3 видно также, что при фиксированном $Bo_m \leq 0.5$ в случае толстых (δ близко к единице) слоев при вязком режиме распада образуются заметно более крупные капли, чем при инерционном режиме распада.

Рис. 4 относится к обоим предельным режимам и иллюстрирует отличие зависимостей $\lambda_*(Bo_m)$ (при фиксированном δ) от кривой, описываемой аналитическим выражением, определяемым первой формулой (29). Сравнение кривых 1 и 3 (пунктир) показывает, что в инерционном режиме распада максимальное увеличение λ_*/a , реализуемое при $Bo_m = 0$ за счет увеличения относительной толщины слоя от значения $\delta \ll 1$ до предельного значения $\delta = 1$ (чему соответствует сплошной цилиндрический столб жидкости), не превышает 5%. В случае же вязкого режима распада подобное увеличение λ_*/a при $Bo_m = 0$ (сплошные кривые 1, 3) составляет 35%. Для сравнения укажем, что при $Bo_m = 0$ в обоих предельных режимах капиллярного распада тонкого ($\delta = 0.01$) слоя $\lambda_*/(2\pi a) = \sqrt{2}$, тогда как при $Bo_m = 0$, $\delta = 0.99$ в инерционном режиме $\lambda_*/(2\pi a) = 1.477$, а в вязком режиме распада $\lambda_*/(2\pi a) = 1.912$.

Заключение

В рамках линейной теории изучена капиллярная неустойчивость слоя вязкой магнитной жидкости, покрывающего длинный цилиндрический проводник, по которому пропускается постоянный электрический ток. Наружная сторона слоя граничит с несмешивающейся идеальной жидкостью, плотность которой равна плотности жидкости, образующей слой, а магнитная восприимчивость меньше, чем восприимчивость слоя. Рассматриваемое явление характеризуется тремя безразмерными параметрами: магнитным числом Бонда Bo_m , числом Онезорге Z и относительной толщиной слоя δ .

Проведен анализ предельных режимов капиллярного распада слоя, реализующихся в случаях $Z \gg 1$ (вязкий режим) и $Z \ll \delta$ (инерционный режим). Показано, что при вязком режиме распада принципиально необходим учет сил инерции в уравнении движения вязкой жидкости, несмотря на их малость по сравнению с силами вязкости; при пренебрежении силами инерции дисперсионного соотношения не существует. Данная ситуация

аналогична известному парадоксу, возникающему в рамках уравнений Стокса при попытке построить решение задачи о поперечном обтекании бесконечного цилиндра при его движении с постоянной скоростью в вязкой жидкости, заполняющей все пространство.

В случае $Z \gg 1$ приближенно найден корень дисперсионного соотношения, переходящий при $Bo_m = 0$, $\delta = 1$ в классическое выражение, описывающее капиллярную неустойчивость тонкой нити вязкой жидкости, окруженной идеальной жидкостью. Показано, что в обоих предельных режимах капиллярной неустойчивости толщина слоя оказывает существенное влияние на характерное время развития наиболее быстро растущей гармоники. Особенно ярко этот эффект проявляется при $Z \gg 1$; с ростом толщины слоя процесс распада ускоряется. В случае $Z \ll \delta$ характерный размер капель, образующихся в результате распада слоя, определяется в основном величиной Bo_m и слабо зависит от δ , в то время как при $Z \gg 1$ и малых Bo_m различие в размерах капель, вызываемое увеличением относительной толщины слоя (от $\delta \ll 1$ до значений, близких к единице), превышает 30%. В случае же тонких ($\delta \ll 1$) слоев характерный размер капель не зависит от типа предельного режима распада и определяется лишь величиной Bo_m .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01057).

Список литературы

- [1] Lord Rayleigh. // Phil. Magazine. 1892. Vol. 34. P. 145–154.
- [2] Бойс Ч. Мыльные пузыри. Петроград: Научное книгоиздательство, 1919. 192 с.
- [3] Goren S.L. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 12. Pt 2. P. 309–319.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [5] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баитовой В.Г. и др. // ДАН БССР. 1979. Т. 23. № 4. С. 341–343.
- [6] Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баитовой В.Г. и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 3–8.
- [7] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [8] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [9] Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 386 с.
- [10] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
- [11] Мусеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
- [12] von Ohnesorge W. // ZAMM. 1936. Bd 16. N 6. S. 355–358.
- [13] Lister J.R., Stone H.A. // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. N 11. P. 2758–2764.
- [14] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Мир, 1979. 830 с.
- [15] Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
- [16] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

- [17] *Tomotika S.* // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1935. Vol. 150. N 870. P. 322–337.
- [18] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 654 p.
- [19] *Lee W.-K. Flumerfelt R.W.* // Int. J. Multiphase Flow. 1981. Vol. 7. N 4. P. 363–383.
- [20] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.