01;03;08

Об излучении звука при осцилляциях заряженной капли

© А.И. Григорьев, А.Р. Гаибов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 декабря 2000 г.)

Получено дисперсионное уравнение для спектра капиллярных колебаний заряженной капли в сжимаемой среде. Показано, что такие колебания для капель из спектра размеров и зарядов, характерных для облаков, туманов и дождевых капель, приводят к генерации в среде волн звукового и ультразвукового диапазонов. Получено выражение для полной интенсивности звукового излучения от единичной капли.

1. Исследование взаимодействия капиллярных колебаний заряженной капли с полем звуковых колебаний генерируемых во внешней сжимаемой среде представляет интерес для широкого спектра академических проблем и практических приложений: от особенностей распространения звука в облаках и туманах до проблем ультразвуковой коагуляции жидкокапельных систем и акустической и электростатической левитации крупных капель в современных технологиях получения высокочистых веществ и высокоточных измерений физико-химических свойств (см., например, [1–8] и указанную там литературу). Тем не менее некоторые вопросы, связанные с обсуждаемой проблемой, остались невыясненными. Так, в большинстве приложений проблемы взаимодействия звуковых волн с жидкокапельными системами капли рассматривались лишь как рассеивающие звук объекты, лишенные внутренних степеней свободы, или же как источники и стоки водяных паров. В то же время известно [2], что частоты капиллярных колебаний капель воды в приближении идеальной жидкости из диапазона размеров, характерных для облаков и туманов (от единиц до нескольких десятков микрометров), соответствуют ультразвуковым колебаниям, а для дождевых капель (с радиусами, большими $250\,\mu$m) совпадают с частотами звуковых волн. Наличие у капли вязкости, электрического заряда, конечности скорости выравнивания электрического потенциала, движения относительно внешней среды и отклонения формы от сферической приводят к дополнительному смещению спектра частот капиллярных колебаний капли в область низких звуковых частот [9–12]. Сказанное означает, что капли жидкости в естественных жидкокапельных системах способны как поглощать звук и ультразвук, так и генерировать его. Это обстоятельство подтверждается известными фактами искажения спектра и быстрого затухания звука в тумане, а также использованием введения жидкокапельного аэрозоля в реактивные двигатели для снижения уровня их шумов в верхней части звукового спектра.

2. Будем решать задачу о звуковом излучении колеблющейся капли радиуса R несжимаемой идеальной электропроводной жидкости плотностью ρ_1, с коэффициентом поверхностного натяжения γ, несущей зяряд Q. Внешнюю среду будем принимать идеальной сжимаемой, характеризующейся скоростью звука V и плотностью ρ_2.

Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением границы раздела сред представим в виде

$$r(\Theta,t) = R + \xi(\Theta,t),$$

где $\xi(\Theta,t)$ — малое возмущение поверхности капли $|\xi| \ll R$.

Волновые движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ соответственно.

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных колебаний в описанной системе и интенсивности генерируемого ими звукового излучения в линейном по ξ/R приближении будет иметь вид [13]

$$\Delta\psi_1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} - \Delta\psi_2 = 0, \tag{2}$$

$$r = R: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\psi_2}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_1}{\partial r}, \tag{4}$$

$$\Delta p - \rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + F_q(\Theta,t) = \gamma\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}(2+\hat{L})\xi\right], \tag{5}$$

$$r = 0: \quad |\psi_1| < \infty, \tag{6}$$

Δp — перепад давлений на границе раздела сред; $F_q(\Theta,t)$ — давление электрического поля на границу раздела; $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Кроме того, потребуем, чтобы на бесконечности потенциал $\psi_2(\mathbf{r},t)$ удовлетворял условию излучения Зоммерфельда

$$r \to \infty: \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial r} + ik\psi_2 = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{7}$$

Зависимость потенциалов скоростей $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ от времени будем принимать периодической ψ_1, $\psi_2 \sim \exp(i\omega t)$. При этом волновое уравнение (2) преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta\psi_2 + k^2\psi_2 = 0, \quad k \equiv \omega/V. \tag{8}$$

3. Исключая из рассмотрения радиальное центрально-симметричное (невозможное в несжимаемой жидкости) и поступательное (нереализуемое в выбранной системе координат) движения капли, будем искать решение уравнений (1) и (2), потенциалы $\psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\psi_2(\mathbf{r},t)$ в виде

$$\psi_1(\mathbf{r},t) = \sum_{n=z}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu)\exp(i\omega t), \quad \mu \equiv \cos\Theta, \tag{9}$$

$$\psi_2(\mathbf{r},t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu)\exp(i\omega t), \tag{10}$$

$P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра, $h_n^{(2)}(x)$ — вторая сферическая функция Ханкеля.

Подставляя (9) и (10) в (3), свяжем коэффициенты A_n и B_n соотношением

$$r = R: \quad B_r = \frac{A_n n R^{n-1}}{k[\partial h_n^{(2)}(kr)/\partial(kr)]}. \tag{11}$$

Продифференцируем по времени динамическое граничное условие (5) и с учетом кинематического граничного условия (4) получим

$$-\rho_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} + \rho_1\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{R^2}(2+\hat{L})\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}F_q(\Theta,t) = 0. \tag{12}$$

Для производной по времени от давления электрического поля на поверхность капли имеем (см. Приложение)

$$\frac{\partial F_q}{\partial t} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^6}\sum_{n=2}^{\infty} A_n n(n-1)R^n P_n(\mu)\exp(i\omega t). \tag{13}$$

Подставляя (9)–(11) и (13) в (12), получим дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний в анализируемой системе в виде

$$\omega_n^2 = (n-1)\frac{\gamma}{R^3}\left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\gamma R^3} - (n+2)\right] \times \left[\frac{(\rho_2/\rho_1)h_n^{(2)}(kR)}{kRh_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1)h_n^{(2)}(kR)} - \frac{1}{n}\right]^{-1}, \tag{14}$$

где при вычислении производной от сферической функции Ханкеля по аргументу была использована формула (14)

$$\frac{d}{dx}h_n^{(2)}(x) = h_{n-1}^{(2)}(x) - \frac{(n+1)}{x}h_n^{(2)}(x).$$

Если положить, что $V \to \infty$, т.е. принять внешнюю среду несжимаемой, то выражение (14) переходит в известное [15] дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний идеальной несжимаемой электропроводной капли в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющее вид

$$\omega^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{\rho_2 n + (n+1)\rho_1}\cdot\frac{\gamma}{R^3}\left[(n+2) - W\right],$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\gamma R^3}. \tag{15}$$

4. Чтобы выяснить смысл корней дисперсионного уравнения (14), выпишем его для основной моды капиллярных колебаний капли ($n = 2$), используя связь сферических функций Ханкеля с тригонометрическими функциями [3],

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x),$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin(x) - \frac{3}{x^2}\cos(x),$$

$$y_2(x) = \left(-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x}\right)\cos(x) - \frac{3}{x^2}\sin(x).$$

Здесь $j_2(x)$ и $y_2(x)$ — сферические цилиндрические функции первого и второго рода соответственно. Дисперсионное уравнение (14) для основной моды колебаний капли будет иметь вид

$$\omega_2^2 = \frac{\gamma}{R^3}(W-4) \times \left[\frac{(\rho_2/\rho_1)[3R\omega/V + i(-3 + R^2\omega^2/V^2)]}{(-9R\omega/V + R^3\omega^3/V^3) + i(9 - 4R^2\omega^2/V^2)} - \frac{1}{2}\right]^{-1}. \tag{16}$$

Численный анализ этого уравнения показывает, что оно имеет пять корней. Если принять $\rho_1 = 1\,\text{g/cm}^3$, $\rho_2 = 1.3\cdot10^{-3}\,\text{g/cm}^3$, $V = 3.3\cdot10^4\,\text{cm/s}$, $R = 0.01\,\text{cm}$, $\gamma = 72\,\text{dyna/cm}$, $W = 1$ (что соответствует капиллярным колебаниям в воздухе при атмосферном давлении капли воды, несущей заряд, равный одной четвертой от предельного в смысле устойчивости по (Рэлею), то получим следующие значения корней: $\omega_2^{(1)} = (2.1\cdot10^4 + i2.5\cdot10^{-12})s^{-1}$; $\omega_2^{(2)} = (-2.1\cdot10^4 + i2.5\cdot10^{-12})s^{-1}$; $\omega_2^{(3)} = (6.5\cdot10^6 + i3.7\cdot10^6)s^{-1}$; $\omega_2^{(4)} = (-6.5\cdot10^6 + i3.7\cdot10^6)s^{-1}$; $\omega_2^{(5)} = i6\cdot10^6 s^{-1}$. Первые два корня соответствуют капиллярным осцилляциям капли с частотами, примерно равными определенным соотношением (15) при $n = 2$. Эти осцилляции весьма медленно затухают за счет отбора энергии на создание продольных волн ультразвукового диапазона во внешней среде, которые реализуются на частотах $\omega_1^{(1)}$ и $\omega_2^{(2)}$ и описываются соотношением (10). Вторая пара корней соответствует быстро затухающим колебаниям сжимаемой среды в малой окрестности поверхности капли на частотах порядка частот собственных колебаний среды в объеме, равном объему капли (вихревым движениям среды у поверхности капли). Пятый корень соответствует быстрому апериодическому рассасыванию возмущений плотности внешней среды у поверхности капли. Из сказанного следует, что в плане исследования звуковых колебаний, генерируемых осцилляциями несжимаемой капли, основной интерес представляют первые два корня уравнения (16).

Чтобы получить аналитическое выражение для величины декремента затухания η, соответствующего первым двум корням (16), будем искать решение (16) в виде $\omega = \omega_0 + i\eta$, где, согласно вышеприведенным результатам численных расчетов, $\eta \ll \omega_0$. Подставим в (16) $\omega = \omega_0 + i\eta$ и, раскладывая различные степени ω в линейном по η приближении, приравняем нулю мнимую часть получившегося соотношения, линейного по η. В итоге для декремента затухания η получим выражение

$$\eta \approx \frac{\rho_2 R^5 \omega_0^6}{81 \rho_1 V^5}. \tag{17}$$

При $\rho_2 \ll \rho_1$ для ω_0 имеем $\omega_0^2 \approx 8\gamma/\rho_1 R^3$ [15] и для декремента затухания основной моды капиллярных осцилляций капли, связанного с генерацией звуковых волн, получим

$$\eta \approx \frac{6.3 \rho_2 \gamma^3}{\rho_1^4 R^4 V^5}.$$

5. Найдем полную интенсивность звукового излучения колеблющейся капли, используя известное [13] выражение

$$I = \rho_2 V \oint \overline{v^2} ds, \tag{18}$$

где черта над выражением означает среднее по периоду колебания значение, т.е. $\overline{v^2}$ есть среднее значение квадрата скорости частиц среды в звуковой волне, а интегрирование производится по замкнутой поверхности, охватывающей начало координат.

Выберем в качестве такой поверхности сферу радиуса R_0, где $R_0 \gg \lambda$, λ — длина волны. Тогда в выражении (10) можно отбросить члены, наиболее быстро убывающие с увеличением R_0. Для этого воспользуемся представлением сферической функции Ханкеля в виде ряда по отрицательным степеням аргумента [14]

$$h_n^{(2)}(x) = i^{n+1} x^{-1} \exp(-ix) \times \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!} (2ix)^{-m}. \tag{19}$$

Тогда на больших расстояниях r (при $kr \gg 1$, когда в (19) сумму можно заменить единицей) выражение для потенциала скоростей во внешней среде (10) с учетом (11) и (19) будет иметь вид

$$\psi_2 \approx \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1} A_n n R^n P_n(\mu)}{kR h_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1) h_n^{(2)}(kR)} \times \frac{1}{kr} \exp[-i(k_n r - \omega_n t)], \tag{20}$$

т.е. зависимость от радиальной координаты отдельных парциальных волн будет определяться сферическими волнами. Поскольку $\mathbf{v} = \mathrm{Re}[\mathrm{grad}(\psi_2)]$, то в линейном по r^{-1} приближении скорость может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} \approx \mathrm{Re}\left\{ -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+2} A_n n R^n P_n(\mu)}{kR h_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1) h_n^{(2)}(kR)} \times \frac{1}{r} \exp[-i(k_n r - \omega_n t)] \right\} \mathbf{n}_r, \tag{21}$$

т.е. имеет в используемом приближении только радиальную компоненту.

С учетом $\overline{(\mathrm{Re}[z])^2} \equiv |\overline{z}|^2/2$ получим, что для нахождения входящего в (18) квадрата скорости движения частиц в звуковой волне нужно соотношение (21) умножить скалярно на комплексно ему сопряженное, которое получим, изменяя в (21) знак пред мнимой единицей и заменяя вторые сферические функции Ханкеля $h_n^{(2)}$ на первые сферические функции Ханкеля $h_n^{(1)}$, поскольку $h_n^{(2)}$ и $h_n^{(1)}$ являются комплексно сопряженными. В итоге для среднего значения квадрата скорости частиц в звуковой волне получаем следующее выражение:

$$\overline{v^2} = -\sum_{2_{n=z}}^{1^{\infty}} \sum_{m=z}^{\infty} \frac{A_n A_m m n P_n(\mu) P_m(\mu) R^n R^m}{[kR h_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1) h_n^{(2)}(kR)] \times [kR h_{m-1}^{(1)}(kR) - (m+1) h_m^{(1)}(kR)] r^2}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (18) и учитывая ортогональность полиномов Лежандра, для полной интенсивности звукового излучения осциллирующей без изменения объема капли получим

$$I = \pi \rho_2 V \sum_{n=z}^{\infty} \frac{A_n^2 n^2 R^{2n}}{[kR h_{n-1}^{(2)}(kR) - (n+1) h_n^{(2)}(kR)] \times [kR h_{m-1}^{(1)}(kR) - (m+1) h_m^{(1)}(kR)]}. \tag{23}$$

Полученное соотношение для интенсивности звукового излучения осциллирующей капли не совсем удобно для практического использования, поскольку в него входят неизвестные в экспериментальных либо в естественных условиях амплитуды потенциала поля скоростей A_n. Чтобы избавиться от них, запишем возмущение равновесной сферической формы капли в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=z}^{\infty} C_n P_n(\mu) \exp(i\omega t). \tag{24}$$

Тогда, подставляя (9) и (24) в кинематическое граничное условие (4), несложно выразить неизвестные амплитуды A_n через амплитуды капиллярных осцилляций капли C_n, которые легко оценить в экспериментальных и естественных условиях,

$$|A_n| \equiv |C_n(\omega_n/nR^{n-1})|. \qquad (25)$$

Теперь из (23) с учетом (25) можно провести численные оценки для различных ситуаций в жидкокапельных системах естественного происхождения.

6. Оценим интенсивность звукового излучения от слабо заряженной ($W = 0.01$) дождевой капли минимально возможного размера с $R = 0.025$ cm (согласно [16], размеры дождевых капель изменяются от 0.025 до 0.25 cm, капли более мелких размеров относятся к "мороси", а более крупные при падении в воздухе разрушаются из-за аэродинамического сопротивления; см. также [12]). Примем, что капля совершает осцилляции за счет возбуждения основной моды своих колебаний ($n = 2$) с амплитудой $C_2 = 0.1\,\mathrm{R}$. Причиной колебаний капли могут служить процессы ее столкновения с более мелкими и медленно летящими, а также гидродинамическое притяжение и к равным себе по размеру (в последнем случае амплитуда колебаний может иметь порядок R). Тогда $\gamma = 73\,\mathrm{dyn/cm}$, $\rho_1 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, $\omega_2 \approx 6.1 \cdot 10^3\,\mathrm{s^{-1}}$, $k_2 \approx 0.2\,\mathrm{cm^{-1}}$, $k_2R \approx 4.6 \cdot 10^{-3}$. Примем, кроме того, что $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$, $V = 3.3 \cdot 10^4\,\mathrm{cm/s}$. В итоге из (23), (25) несложно найти

$$I \approx \frac{4\pi\rho_2 V C_2^2 R^2 \omega^2}{|k_2Rh_1^{(2)}(k_2R) - 3h_2^{(2)}(k_2R)|^2} 2.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{erg/s}. \qquad (26)$$

Отметим, что для капли с принятыми размером и зарядом в звуковом диапазоне будут излучать первые четыре моды, но интенсивность их излучения убывает с ростом номера моды (более чем на порядок при переходе к следующей моде).

Принимая, что в одном кубическом километре пространства, занятого дождем, находится $3\cdot10^{14}$ указанного размера (примерно $3\,\mathrm{cm^3}$ на одну каплю), несложно найти, что интегральная интенсивность звукового излучения, связанного с основной модой, капиллярных колебаний капли ($n = 2$) из объема в $1\,\mathrm{km^3}$ будет ≈ 0.66 erg/s на частоте $\omega_2 \approx 6.1 \cdot 10^3\,\mathrm{s^{-1}}$. Это соответствует силе звука ≈ 22 dB на границе излучающего объема, что примерно соответствует силе звука тихой человеческой речи.

При увеличении заряда капли частота ее капиллярных колебаний будет уменьшаться в соответствии с (15). При этом будут уменьшаться k_2 и k_2R, а следовательно, и интенсивность излучения. Так, при $W = 1$ интенсивность I при $\omega_2 \approx 5.3 \cdot 10^3\,\mathrm{s^{-1}}$ будет равна $\approx 7.6 \cdot 10^{-16}$ erg/s, а сила звука на границе излучающего объема в один кубический километр теперь будет равна ≈ 17 dB.

Если в (26) подставить выражение для k_2 через ω_2 и ω_2 через R, то несложно получить, что интенсивность звукового излучения от колеблющейся капли $I \sim R^{-2}$. Это означает, что звуковое излучение от крупных капель при прочих равных условиях будет существенно более слабым. Так, для наиболее крупной дождевой капли с $R = 0.25$ cm и $W = 0.01$ интенсивность звукового излучения, связанного с основной модой, происходящего на частоте $190\,\mathrm{s^{-1}}$, составляет всего $\approx 1.8 \cdot 10^{-17}$ erg/s. Расчет силы звука при тех же условиях, что и в вышеприведенном примере, дает весьма малую величину ≈ 1 dB. Звук такой силы человеческий слух не воспринимает. Сила звука, порождаемого капиллярными колебаниями больших капель, будет восприниматься на слух только при большой амплитуде колебаний капли $\sim R$. В этом случае она будет такой же, как сила звука, связанная с капиллярными колебаниями капель с $R = 0.025$ cm, в вышеприведенном примере. Следует также отметить, что частотам звуковых колебаний, воспринимаемых слухом человека, соответствует более сорока первых частот капиллярных колебаний капли с $R = 0.25$ cm, но их интенсивность, как отмечалось выше, мала.

Интересно отметить, что зависимость интенсивности звукового излучения колеблющейся капли от скорости звука в среде V, плотности среды ρ_2 и частоты капиллярных колебаний капли ω_2 имеет такой же вид, как и зависимость от этих величин декремента затухания капиллярных осцилляций капли η, определяемого (17): $I \sim \eta \sim \rho_2\omega_2^6V^5$. В этом несложно убедиться, если в (26) подставить выражение для k_2 через ω_2 и V. Отмеченное обстоятельство обусловлено тем, что затухание капиллярных осцилляций капли связано именно с излучением звуковых волн.

Проведенные оценки справедливы и для кучевых облаков. Туманы же со средним значением радиусов капель $\sim 10\,\mu$m могут излучать звуковые волны в слышимом диапазоне длин волн только при зарядах отдельных капель, близких к предельному в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду (когда $W \to 4$) [9,15].

Заключение

Интегральное звуковое излучение, связанное с капиллярными колебаниями капель в жидкокапельных системах естественного происхождения, может превышать предел восприятия его человеческими органами слуха.

Приложение

Расчет частной производной по времени от давления электрического поля на поверхность заряженной электропроводной капли несжимаемой электропроводной жидкости, возмущенную капиллярным волновым движением

Давление электрического поля напряженностью $\mathbf{E}(\Theta, t)$ в среде с диэлектрической проницаемостью ε определяется выражением

$$F_q(\Theta, t) = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,\mathbf{E}^2.$$

Искомую производную $\partial F/\partial t$ легко представить в виде

$$\frac{\partial F_q(\Theta,t)}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\,\mathbf{E}(\Theta,t)\,\frac{\partial \mathbf{E}(\Theta,t)}{\partial t}.$$

Но для того чтобы воспользоваться этой формулой в рассматриваемом случае, необходимо найти выражение для напряженности электрического поля в окрестности возмущенной волновым движением сферической поверхности капли.

Будем искать потенциал поля Φ, создаваемого возмущенной заряженной каплей в окружающем пространстве, учитывая, что он должен быть гармонической функцией

$$\Delta\Phi=0, \tag{1П}$$

$$r\to\infty:\quad \Phi\to 0$$

и удовлетворять на границе раздела условию

$$r=R+\xi:\quad \Phi=\mathrm{const}. \tag{2П}$$

Потенциал Φ представим в виде

$$\Phi=\Phi_0+\delta\Phi,$$

где Φ_0 — потенциал невозмущенной сферической капли: $\delta\Phi$ — добавка к потенциалу, возникающая из-за возмущения поверхности.

Тогда задача (1П), (2П) примет вид

$$\Delta(\Phi_0+\delta\Phi)=0, \tag{3П}$$

$$r=R+\xi:\quad \Phi_0+\delta\Phi=\frac{Q}{\varepsilon\cdot R}. \tag{4П}$$

Ввиду малости амплитуды возмущения поверхности ($|\xi|\ll R$) разложим граничное условие (4П) в ряд в окрестности точки $\xi=0$ и, отбрасывая члены 2-го порядка малости, получим

$$r=R:\quad \Phi_0+\delta\Phi+\xi\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Phi_0=\frac{Q}{\varepsilon R}. \tag{5П}$$

Тогда задача (3П), (5П) разбивается на две: задачу нахождения Φ

$$\Delta\Phi_0=0,$$

$$r=R:\quad \Phi_0=\frac{Q}{\varepsilon\cdot R} \tag{6П}$$

и задачу нахождения $\Delta\Phi$

$$\Delta(\delta\Phi)=0, \tag{7П}$$

$$r=R:\quad \delta\Phi+\xi\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Phi_0=0. \tag{8П}$$

Из (8П) (учитывая, что решение задачи (7П) известно: $\Phi_0(r)=Q/r$) имеем

$$r=R:\quad \delta\Phi=-\xi\,\frac{\partial}{\partial r}\,\Phi_0=\xi E_{or}=\xi\,\frac{Q}{\varepsilon R^2}. \tag{9П}$$

Будем искать $\delta\Phi$ в виде ряда

$$\delta\Phi=\sum_n Dn\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}P_n(\mu). \tag{10П}$$

Подставляя (10П) в (9П), получим

$$r=R:\quad \delta\Phi=\sum_n D_nP_n\mu=\xi\,\frac{Q}{\varepsilon R^2}.$$

Из этого выражения легко найти коэффициенты D_n

$$D_n=\frac{Q}{R^2}\int\limits_0^{\pi}\xi P_n(\mu)\sin\Theta d\Theta. \tag{11П}$$

Отметим, что коэффициент D_n является малой величиной того же порядка, что и ε.

Найдем теперь напряженность поля в окрестности капли

$$r=R+\xi:\quad \mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\Phi=-\boldsymbol{\nabla}(\Phi_0+\delta\Phi).$$

Относя это выражение к границе раздела $r=R+\xi$ и разлагая получившееся соотношение в окрестности невозмущенной границы, найдем в линейном приближении по $|\xi|/R$

$$\mathbf{E}\Big|_{r=R+\xi}\approx\left[-\boldsymbol{\nabla}(\Phi_0+\delta\Phi)-\xi\,\frac{\partial}{\partial r}\,\boldsymbol{\nabla}\Phi_0\right]_{r=R}. \tag{12П}$$

Учтем, что давление электрического поля на поверхность капли с точностью до малых первого порядка малости выражается только через радиальную компоненту напряженности поля, и выпишем выражение для радиальной компоненты $\mathbf{E}$, подставляя соответствующие компоненты векторов $\nabla\Phi_0$, $\nabla(\delta\Phi)$, $(\partial/\partial r)(\nabla\Phi_0)$ в (12П),

$$\mathbf{E}\Big|_{r=R+\xi}\approx\left[\frac{Q}{\varepsilon R^2}+\frac{1}{R}\sum_n D_n(n+1)P_n(\mu)-\varepsilon\,\frac{2Q}{R^3}\right]_{r=R}\mathbf{n}_r.$$

На данном этапе рассмотрения можно найти и выражение для частной производной по времени от напряженности поля на поверхности капли

$$\frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{r=R+\xi}\approx\left[\frac{1}{R}\sum_n\frac{\partial D_n}{\partial t}(n+1)P_n(\mu)-\frac{2Q}{\varepsilon R^3}\,\frac{\partial\xi}{\partial t}\right]. \tag{13П}$$

Производную $\partial D_n/\partial t$ легко найти из (11П)

$$\frac{\partial D_n}{\partial t}=\frac{Q}{\varepsilon R^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial\xi}{\partial t}\,P_n(\mu)d\mu.$$

Из (4П) и (9П) несложно получить

$$r = R: \quad \frac{\partial D_n}{\partial t} = \frac{Q}{\varepsilon R^2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} P_n(\mu) d\mu$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon R^2} \sum_m \int_{-1}^{1} A_m m R^{m-1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu \exp(-i\omega t)$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon R^3} \sum_m m A_m \exp(-i\omega t) R^m \int_{-1}^{1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon R^3} n C_n \exp(-i\omega t), \qquad (14П)$$

где $C_n \equiv R^n / A_n$.

Учтем далее, что, согласно (4П),

$$r = R: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} \approx \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = \sum_n C_n P_n(\mu) n \frac{1}{R} \exp(-i\omega t). \qquad (15П)$$

Подставляя (15П) и (14П) в (13П), окончательно найдем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{Q}{\varepsilon R^4} \sum_n n(n+1) C_n P_n(\mu) \exp(-i\omega t)$$

$$- \frac{2Q}{\varepsilon R^4} \sum_n n C_n P_n(\mu) \exp(-i\omega t)$$

$$= \frac{Q}{R^4} \sum_4 n(n-1) C_n P_n(\mu) \exp(-i\omega t).$$

Тогда для искомой частной производной по времени от давления поля на поверхности капли получится соотношение

$$\frac{\partial F_q}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{8\pi} 2E \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{Q}{\varepsilon R^2} + \frac{1}{R} \sum_n D_n (n+1) P_n(\mu) - \xi \frac{2Q}{\varepsilon R^3} \right)$$

$$\times \left(\frac{Q}{\varepsilon R^4} \sum_n n(n-1) C_n P_n(\mu) \exp(-i\omega t) \right).$$

Отбросим члены второго порядка малости, пропорциональные произведениям $D_n C_n$ и $\sim \xi C_n$. Тогда

$$\frac{\partial F_q}{\partial t} \approx \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon R^6} \sum_n n(n-1) C_n P_n(\mu) \exp(-i\omega t).$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 351 с.

[2] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехтеориздат, 1955. 476 с.

[3] *Грин Х., Лейн В.* Аэрозоли — пыли, дымы и туманы. Л.: Химия, 1969. 427 с.

[4] *Won-Kyu Phim, Sang Kun Chung, Hyson M.T.* et al // IEEE Trans. on Industry Appl. 1987. Vol. IA-23. N 6. P. 975–979.

[5] *Шагапов В.Ш.* // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. N 5. С. 506–512.

[6] *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.

[7] *Suryanarayana P.V.R., Bayazitoglu Y.* // Phys. Fluids. 1991. Vol. 3. N 5. P. 967–977.

[8] *Yarin A.L., Brenn G., Kastner O.* et al. // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 399. P. 151–204.

[9] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.

[10] *Ширяева С.О., Муничев М.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.

[11] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 28–36.

[12] *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 26–34.

[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1953. 788 с.

[14] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

[15] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 1–10.

[16] *Матвеев Л.Т.* Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 278 с.