

01;09

Влияние связанных состояний микроволновых волноводов на распространение электромагнитных волн

© Е.Н. Булгаков,¹ А.Ф. Садреев^{1,2}

¹Институт физики СО РАН,
660036 Красноярск, Россия

²Department of Physics and Measurement Technology, Linköping University,
S-581 83 Linköping, Sweden
e-mail: almas@tnp.krascience.rssi.ru, almsa@ifm.liu.se

(Поступило в Редакцию 17 июля 2000 г.)

Рассмотрено прохождение микроволнового излучения (TE -волны) с частотой ω через волноводы Γ -, T - и X -типов, заполненные ферромагнетиком. Известно, что такие волноводы имеют связанные состояния с частотами ниже порога распространения. Приложение пробного микроволнового излучения в области рассеяния с частотой Ω приводит к возбуждению магнитных колебаний с частотами $\omega + n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, которые резонансно смешиваются со связанными состояниями волновода. Это дает новый способ изучать связанные состояния волноводов и эффективно управлять прохождением микроволнового излучения.

Введение

Как хорошо известно [1], для планарного волновода постоянной толщины решения для распространяющихся электромагнитных (TE) волн могут быть представлены через скалярный потенциал $\Psi(x, y)$

$$\mathbf{E}(x, y) = ik\hat{z}\Psi(x, y), \quad \mathbf{B}(x, y) = -\hat{z} \times \nabla\Psi, \quad (1)$$

который удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$[\nabla^2 + \omega^2] \Psi = 0 \quad (2)$$

с граничным условием $\psi|_s = 0$ на стенках волновода. Скорость света положена равной единице. Уравнение (2) совпадает с уравнением Шредингера, которое описывает баллистический транспорт электронов в электронных волноводах [2].

Если волновод является изогнутым (так, как показано на рис. 1, *a*), уравнение Гельмгольца приобретает новое связанное решение с частотой TE -колебаний ниже пороговой частоты распространяющихся TE -волн $\omega^2 < (\pi/d)^2$ [3], где d — ширина волновода. Причем связанное состояние является локализованным в окрестности изгиба волновода. Впервые подобные связанные состояния как особые решения уравнения (2) были найдены в волноводах Γ -типа [4,5] и в волноводах T - и X -типов [6,7] (рис. 1, *b-d*). Эти связанные состояния показаны на рис. 2. В приложении к TE -модам в микроволновых волноводах Γ -типа связанные состояния теоретически и экспериментально изучались в [8,9]. Прикладывая пробное поле излучения к центру изгиба волновода, был найден резонансный минимум отраженной мощности поля излучения, что позволило найти частоту связанных ЭМ колебаний [8]. Кроме того, удалось найти пространственную структуру полей локализованных связанных состояний. Также различные связанные состояния реализуются в искусственно созданных

диэлектрических волноводах в двумерных фотонных кристаллах [10].

Однако существование этих связанных состояний никак не отражается на распространение TE -волн в волноводах. Нами в работах [11,12] был предложен способ примешивания связанных состояний к баллистическому транспорту электронов в волноводах с помощью поля излучения с частотой, резонансной между энергией Ферми транспортных электронов и энергией связанного состояния. В результате небольшое по амплитуде поле излучения способно приводить к глубоким резонанс-

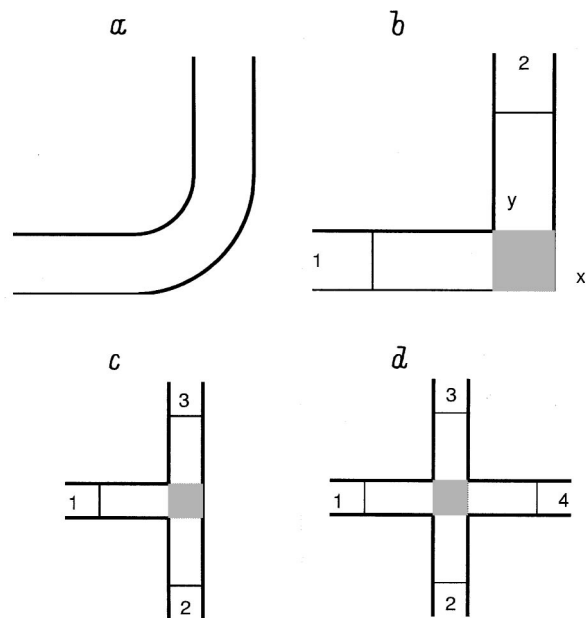


Рис. 1. Типы волноводных структур, в которых существуют связанные состояния, показанные на следующем рисунке. Затемненные участки — область приложения пробного поля излучения. Структуры: *b* — Γ , *c* — T , *d* — X . 1–4 — волноводные тракты.

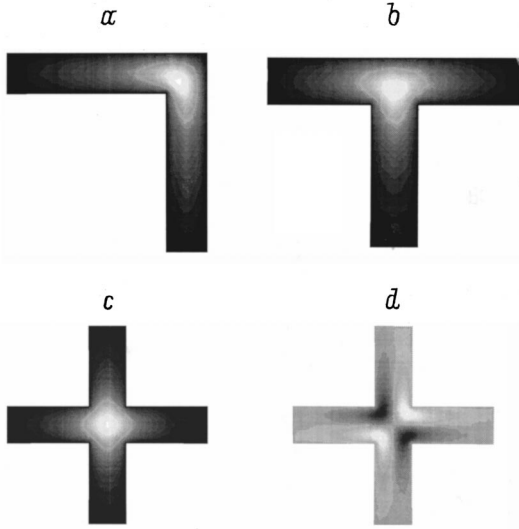


Рис. 2. Пространственные конфигурации электрического поля связанных состояний в волноводах, представленных на рис. 1.

ным провалам проводимости волноводов. Аналогичный подход рассматривается в данной работе для случая распространения TE -волн в Γ -, T - и X -типах волноводов. Однако поскольку в линейной теории взаимодействие ЭМ полей отсутствует, необходима среда, которая бы приводила к подобному взаимодействию. Здесь мы рассматриваем случай заполнения волновода магнитоупорядоченным материалом с намагниченностью M . Тогда за счет взаимодействия магнитного поля пробного поля излучения с частотой Ω с магнитным моментом магнетика будут возбуждаться магнитные колебания с частотами $\omega + n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если частота одной из этих гармоник совпадет с частотой связанных колебаний, можно ожидать резонансное взаимодействие проходящей TE -моды по волноводу со связанным состоянием волновода. Таким образом, настраивая частоту Ω на резонанс между частотой распространяющегося микроволнового поля излучения и частотой связанных ЭМ колебаний, мы можем ожидать резонансные аномалии в прохождении микроволнового излучения через изогнутые волноводы. Такой резонансный способ управления прохождением микроволнового излучения, помимо самостоятельного интереса к изучению связанных состояний, может иметь прикладное значение.

Динамика намагниченности

Запишем уравнение движения магнитного момента в присутствии заданных ЭМ полей [13]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = g(\mathbf{M} \times (\mathbf{H}^{(m)} + \mathbf{H}^{(e)})), \quad (3)$$

где $\mathbf{H}^{(e)}$ — внешнее магнитное поле, состоящее из постоянного магнитного поля H_0 и приложенного внешнего

переменного магнитного поля пробного излучения, направленного по оси z ; $\mathbf{H}^{(m)}$ — магнитное поле, связанное с микроволновым излучением волновода и лежащее в плоскости x, y .

Введем для удобства комплексные амплитуды

$$M_{\pm} = M_x \pm iM_y, \quad H_{\pm}^{(m)} = H_x^{(m)} \pm iH_y^{(m)}, \quad (4)$$

в которых уравнение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_+}{\partial t} &= -igH^{(e)}M_+ + igM_zH_+^{(m)}, \\ \frac{\partial M_z}{\partial t} &= -\frac{1}{2}ig[H_+^{(m)}M_- - H_-^{(m)}M_+]. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае гармонических колебаний $\xi_+ = M_+/M$ малое. Тогда

$$M_z \approx M \left(1 - \frac{M_+M_-}{2M^2} \right) = M \left(1 - \frac{1}{2}|\xi_+|^2 \right).$$

Соответственно уравнения (5) в линейном приближении записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \xi_+}{\partial t} &= gH^{(e)}\xi_+ - gH_+, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial |\xi_+|^2}{\partial t} &= g \operatorname{Im}(H_+^{(m)}\xi_-). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее рассмотрим пробное микроволновое поле в простейшем виде $H^{(e)}(\mathbf{r}, t) = H_0 + \lambda \cos \Omega t$, направленное по оси z . Предполагается, что переменная составляющая этого поля действует лишь в области волновода, занятого связанным состоянием. Рассмотрим амплитуду $H_+^{(m)}(t) = H_+^{(0)}e^{i\omega t}$, которая описывает вращение поля в x, y -плоскости с круговой частотой ω против часовой стрелки.

Если пробное поле излучения отсутствует ($\lambda = 0$), тогда связь колебаний намагниченности $\xi_+(t) = \xi_+^{(0)}e^{i\omega t}$ с микроволновым полем волновода описывается через восприимчивость [13] $\xi_+^{(0)} = \chi(\omega)H_+^{(0)}$, где

$$\chi(\omega) = \frac{g}{\omega + gH_0}. \quad (7)$$

В общем случае, когда $\lambda \neq 0$, подставим $\xi_+(t) = \xi_+^{(1)}e^{i\omega t}$ в уравнения (6), что дает

$$i \frac{\partial \xi_+^{(1)}(t)}{\partial t} = (\omega + gH_0 + g\lambda \cos \Omega t)\xi_+^{(1)}(t) - gH_+^{(0)}. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) можно искать в виде

$$\xi_+^{(1)}(t) = F(t) \exp \left[-i(\omega + gH_0)t - i \frac{g\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right].$$

Подставляя его в (8), получаем

$$F(t) = F_0 + igH_+^{(0)} \int \exp \left[i(\omega + gH_0)\tau + i \frac{g\lambda}{\Omega} \sin \Omega \tau \right] d\tau. \quad (9)$$

В силу того что мы рассматриваем вынужденные колебания, $F_0 = 0$. Поэтому решение уравнения (8) опять может быть выражено через восприимчивость $\chi(t)$, но которое является уже периодической функцией времени

$$\begin{aligned} \xi_+^{(1)}(t) &= \chi_+(t)H_+^{(0)}, \\ \chi_+(t) &= ig \exp \left[-i(\omega + gH_0)t - i \frac{g\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right] \\ &\times \int \exp \left[i(\omega + gH_0)\tau + i \frac{g\lambda}{\Omega} \sin \Omega \tau \right] d\tau \\ &= g \exp \left(-i \frac{g\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right) \sum_m \frac{J_m \left(\frac{g\lambda}{\Omega} \right)}{\omega + gH_0 + m\Omega} \exp(im\Omega t). \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно из (10), восприимчивость $\chi_+(t)$ является периодической функцией времени с периодом внешнего пробного поля. Следовательно, решение для магнитного поля и намагниченности имеет вид суперпозиции TE -мод разных круговых поляризацй с частотами $\omega + n\Omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} H_+(t) &= \sum_n \{ h_n e^{i(\omega+n\Omega)t} + \tilde{h}_n e^{-i(\omega+n\Omega)t} \}, \\ \xi_+(t) &= \sum_n \{ \xi_n(t) e^{i(\omega+n\Omega)t} + \tilde{\xi}_n(t) e^{-i(\omega+n\Omega)t} \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда

$$\xi_n(t) = \chi_{(+n)}(t)h_n, \quad \tilde{\xi}_n(t) = \chi_{(-n)}(t)\tilde{h}_n,$$

где $\chi_{(\pm)n}(t)$ — отклик магнитной системы (10) на вращающееся против (по) часовой стрелке магнитное поле с частотой $\omega + n\Omega$.

Поскольку восприимчивость $\chi_{(\pm)n}(t)$ имеет период $2\pi/\Omega$, как следует из (10), представим ее в виде фурье-ряда по этому периоду

$$\begin{aligned} \chi_{(+n)}(t)e^{in\Omega t} &= \sum_m \chi_{(+n)m} e^{im\Omega t}, \\ \chi_{(-n)}(t)e^{-in\Omega t} &= \sum_m \chi_{(-n)m} e^{-im\Omega t}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{(+n)m} &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \chi_{(+n)}(t) e^{i(n-m)\Omega t} dt, \\ \chi_{(-n)m} &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \chi_{(-n)}(t) e^{-i(n-m)\Omega t} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Для численного нахождения $\chi_{(\pm)n}$ лучше всего воспользоваться тем, что $\chi_{+n}(t)$ являются, как следует из уравнений (8) и (10), решениями уравнений

$$\begin{aligned} i \frac{d\chi_{(+n)}}{dt} &= (\omega + n\Omega + gH_0 + g\lambda \cos \Omega t) \chi_{(+n)} - g, \\ i \frac{d\chi_{(-n)}}{dt} &= (gH_0 - \omega - n\Omega + g\lambda \cos \Omega t) \chi_{(-n)} - g. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в (14) разложения (12), получаем алгебраическую систему уравнений для $\chi_{(+n)m}$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \chi_{(+n,m-1} + (H_0 + \omega/g + m\Omega/g) \chi_{(+n)m} \\ + \frac{\lambda}{2} \chi_{(+n,m+1} = \delta_{nm}, \\ \frac{\lambda}{2} \chi_{(-n,m-1} + (H_0 - \omega/g - m\Omega/g) \chi_{(-n)m} \\ + \frac{\lambda}{2} \chi_{(-n,m+1} = \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения электромагнитных полей

Запишем уравнения Максвелла в магнитной среде

$$\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} + 4\pi\mathbf{M}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(m)}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(m)} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(m)} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (16)$$

Будем искать такие решения (16) совместно с (11), в которых электрическое поле направлено по оси z , а магнитное поле $\mathbf{H}^{(m)}$ лежит в плоскости x, y и оба поля являются функциями x, y . Представим E_z через комплексные поля Ψ_n

$$E_z(x, y, t) = \text{Im} \left[\sum_n \Psi_n(x, y) e^{i(\omega+n\Omega)t} \right]. \quad (17)$$

Удобно ввести производную Коши

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

с помощью которой можно записать следующий ряд полезных соотношений:

$$(\nabla \times \mathbf{M})_z = 2M \text{Im} \left(\frac{\partial \xi_+}{\partial u} \right) = 2M \text{Re} \left(-i \frac{\partial \xi_+}{\partial u} \right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 2 \text{Re} \left(\frac{\partial \xi_+}{\partial u} \right),$$

$$(\nabla \times \mathbf{H}^{(m)})_z = 2 \text{Im} \left(\frac{\partial H_+^{(m)}}{\partial u} \right) = 2 \text{Re} \left(-i \frac{\partial H_+^{(m)}}{\partial u} \right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}^{(m)} = \text{Re} \left(\frac{\partial H_+^{(m)}}{\partial u} \right). \quad (18)$$

Удобно также уравнения Максвелла (16) свести к дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}^{(m)}}{\partial t},$$

$$\nabla \times (\mathbf{B}^{(m)} - 4\pi\mathbf{M}) = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

откуда следует еще одно уравнение

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi \nabla \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Так как сторонние токи равны нулю $\mathbf{j} = 0$, имеем

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - 4\pi \nabla \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Далее, комбинируя уравнение $\nabla(\mathbf{H}^{(m)} + 4\pi \mathbf{M}) = 0$ и (18), получаем

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial H_+^{(m)}}{\partial u} + 4\pi M \frac{\partial \xi_+}{\partial u} \right) = 0.$$

Подставляя в эту формулу представление (11) для H_+ , ξ_+ , получаем

$$\operatorname{Re} \sum_n \left\{ \mu_{(+n)}(t) \frac{\partial h_n}{\partial u} e^{i(\omega+n\Omega)t} + \mu_{(-n)}(t) \frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} e^{-i(\omega+n\Omega)t} \right\} = 0, \quad (20)$$

где мы ввели магнитную проницаемость

$$\begin{aligned} \mu_{(\pm n)}(t) &= 1 + 4\pi M \chi_{(\pm)n}(t), \\ \mu_{(\pm)nm} &= \delta_{nm} + 4\pi M \chi_{(\pm)nm}. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя теперь разложения (12), имеем

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{nm} \left[\frac{\partial h_n}{\partial u} e^{i(\omega+m\Omega)t} \mu_{(+nm)} + \frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} e^{-i(\omega+m\Omega)t} \mu_{(-nm)} \right] \right\} = 0,$$

откуда получаем

$$\sum_n \frac{\partial h_n}{\partial u} \mu_{(+nm)} = - \sum_n \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right)^* \mu_{(-nm)}^*. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь второе уравнение Максвелла (16)

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial H_+}{\partial u} \right).$$

Воспользовавшись уравнениями (17) и (11), получаем

$$\sum_n \operatorname{Im} \left\{ e^{i(\omega+n\Omega)t} \left[i(\omega+n\Omega) \Psi_n - 2 \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) - 2 \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right) e^{-i(\omega+n\Omega)t} \right] \right\} = 0$$

или

$$i(\omega+n\Omega) \Psi_n - 2 \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) = -2 \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right)^*. \quad (23)$$

Если подставить это уравнение в (22), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) [\mu_{(+nm)} + \mu_{(-nm)}^*] \\ = \frac{i}{4} \sum_n \mu_{(-nm)}^* (\omega+n\Omega) \Psi_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, связывающую $\partial h_n / \partial u$ с Ψ_n ,

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial u} = \hat{A} \mathbf{\Psi}, \quad (25)$$

где $\mathbf{h} = (\dots, h_1, h_0, h_{-1}, \dots)$, $\mathbf{\Psi} = (\dots, \Psi_1, \Psi_0, \Psi_{-1}, \dots)$.

Соотношение (24) позволяет выписать замкнутое уравнение на Ψ_n . Действительно, с учетом (18) уравнение (19) принимает следующий вид:

$$\nabla^2 E_z - \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - 8\pi M \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Im} \frac{\partial \xi_+}{\partial u} = 0. \quad (26)$$

Так как, согласно (11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_+}{\partial u} &= \sum_{nm} \left\{ e^{i(\omega+m\Omega)t} \chi_{(+nm)} \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\omega+m\Omega)t} \chi_{(-nm)} \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right) \right\}, \end{aligned}$$

то, подставляя это соотношение в (26), получаем с учетом (17)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{nm} \left\{ e^{i(\omega+m\Omega)t} \left[\delta_{nm} (\nabla^2 \Psi_m + (\omega+m\Omega)^2 \Psi_m) \right. \right. \\ \left. \left. - 8\pi M i (\omega+m\Omega) \chi_{(+nm)} \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) \right] \right. \\ \left. + 8\pi M i e^{-i(\omega+m\Omega)t} (\omega+m\Omega) \chi_{(-nm)} \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_m + (\omega+m\Omega)^2 \Psi_m + 8\pi M i \sum_n (\omega+m\Omega) \\ \times \left[\chi_{(-nm)}^* \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right)^* - \chi_{(+nm)} \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя сюда выражение для $(\partial \tilde{h}_n / \partial u)^*$ из (23), окончательно имеем замкнутое уравнение для Ψ_n

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_m + (\omega+m\Omega)^2 \Psi_m + 4\pi M \sum_n (\omega+m\Omega) \\ \times (\omega+n\Omega) \chi_{(-nm)}^* \Psi_n - 8\pi M i \sum_n (\omega+m\Omega) \\ \times \left(\frac{\partial h_n}{\partial u} \right) (\chi_{(+nm)} - \chi_{(-nm)}^*) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где в свою очередь производные $(\partial h_n / \partial u)$ определяются через Ψ_n уравнением (25).

Убедимся, что в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ уравнение (27) описывает известную задачу о распространении микроволнового поля через магнитную среду [14]. Из соотношений (10) и (13) следует, что матрица восприимчивости $\chi_{(\pm)mn}$ является диагональной

$$\chi_{(+)mn} = \frac{g}{gH_0 + \omega + n\Omega}, \quad \chi_{(-)mn} = \frac{g}{gH_0 - \omega - n\Omega}.$$

Соответственно уравнения (24) и (27) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_m}{\partial u} \right) [\mu_{(+)m} + \mu_{(-)m}^*] &= \frac{i}{4} \mu_{(-)m}^* (\omega + m\Omega) \Psi_m, \\ \nabla^2 \Psi_m + (\omega + m\Omega)^2 \mu_{(-)m} \Psi_m & \\ - 2i(\omega + m\Omega)(\mu_{(+)m} - \mu_{(-)m}) \left(\frac{\partial h_m}{\partial u} \right) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\mu_{(\pm)m} = 1 + 4\pi M \chi_{(\pm)mm}.$$

Объединяя пару последних уравнений, получаем уравнение, приведенное в [14],

$$\nabla^2 \Psi_m + (\omega + m\Omega)^2 \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} \Psi_m = 0, \quad (28)$$

где $\mu_{(\pm)m} = \mu \pm \mu_a$.

Теперь вернемся к случаю, когда на волновод, заполненный магнетиком, приложено локально поле излучения с частотой Ω . Рассмотрим простейший случай пространственной неоднородности пробного поля излучения, в котором предполагается, что в области существования связанного состояния поле излучения постоянно и равно нулю вне этой области. Для того чтобы вывести граничные условия на границе раздела, воспользуемся еще одним уравнением Максвелла

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (29)$$

где магнитная индукция в силу соотношений (11) также может быть представлена в виде ряда по h_m, \tilde{h}_m .

Подставляя сюда эти ряды для магнитной индукции B_+ и разложение электрического поля E_z (17) через $\Psi_n(x, y)$, можно получить следующие уравнения:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial y} = (\omega + n\Omega) \sum_m (\mu_{(+)mn} h_m + \mu_{(-)mn}^* \tilde{h}_m^*), \quad (30)$$

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial x} = i(\omega + n\Omega) \sum_m (\mu_{(+)mn} h_m - \mu_{(-)mn}^* \tilde{h}_m^*), \quad (31)$$

где матрица μ определена соотношением (21).

Из этой пары уравнений нетрудно получить выражения для производных Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_n}{\partial u} &= -i(\omega + n\Omega) \sum_m \mu_{(-)mn}^* \tilde{h}_m^*, \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial u^*} &= i(\omega + n\Omega) \sum_m \mu_{(+)mn} h_m. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнение (22), являющееся следствием уравнения $\nabla \mathbf{B} = 0$, обобщается на неоднородный случай следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_n \left\{ \frac{\partial h_n}{\partial u} \mu_{(+)nm} + \frac{\partial \mu_{(+)nm}}{\partial u} h_n \right\} & \\ = - \sum_n \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right)^* \mu_{(-)nm}^* + \frac{\partial \mu_{(-)nm}^*}{\partial u^*} \tilde{h}_n^* \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

В случае пространственной неоднородности вдоль оси x из уравнения (33) находим, что величины скачков на границе раздела удовлетворяют уравнению

$$\Delta \left\{ \sum_n h_n \mu_{(+)nm} \right\} = -\Delta \left\{ \sum_n \tilde{h}_n^* \mu_{(-)nm}^* \right\}$$

или с учетом уравнений (32)

$$\Delta \left\{ \frac{\partial \Psi_n}{\partial u} \right\} = \Delta \left\{ \frac{\partial \Psi_n}{\partial u^*} \right\}. \quad (34)$$

Уравнение (23), которое является следствием третьего уравнения Максвелла (16), выполняется всюду

$$\left(\frac{\partial \tilde{h}_n}{\partial u} \right)^* = \frac{\partial h_n}{\partial u} - \frac{i}{2} (\omega + n\Omega) \Psi_n. \quad (35)$$

При переходе через границу раздела электрическое поле непрерывно. В противном случае, как видно из (32), это привело бы к сингулярностям полей h_m . Следовательно, уравнение (35) даст еще одно граничное условие

$$\Delta \tilde{h}_m^* = \Delta h_m. \quad (36)$$

Если граница раздела сред расположена ортогонально оси y , из уравнений (32), (33) и (35) находим аналогичные граничные условия

$$\begin{aligned} \Delta \left\{ \frac{\partial \Psi_n}{\partial u} \right\} &= -\Delta \left\{ \frac{\partial \Psi_n}{\partial u^*} \right\}, \\ \Delta \tilde{h}_n^* &= -\Delta h_n. \end{aligned} \quad (37)$$

Удобно представить уравнение для обобщенного вектора Ψ в матричной форме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \hat{L}_- \tilde{\mathbf{h}}^*, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial u^*} = \hat{L}_+ \mathbf{h}. \quad (38)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{L}_{(-)nm} &= -i(\omega + n\Omega) \mu_{(-)nm}^*, \\ \hat{L}_{(+)nm} &= i(\omega + n\Omega) \mu_{(+)nm}. \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда уравнения (24) и (27) приобретают более компактный вид соответственно

$$(\hat{L}_+ - \hat{L}_-) \frac{d\mathbf{h}}{du} = -\frac{1}{2} \hat{L}_- \hat{\mathbf{P}} \Psi, \quad (40)$$

$$\nabla^2 \Psi + \hat{L}_- \hat{\mathbf{P}} \Psi - 2(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \frac{d\mathbf{h}}{du} = 0, \quad (41)$$

где

$$\hat{\mathbf{P}} = i \text{diag} (\omega + n\Omega).$$

Если объединить (40) и (41), получаем замкнутое уравнение на Ψ

$$\nabla^2 \Psi + \hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{P}} \Psi + (\hat{\mathbf{L}}_+ + \hat{\mathbf{L}}_-)(\hat{\mathbf{L}}_+ - \hat{\mathbf{L}}_-)^{-1} \hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{P}} \Psi = 0. \quad (42)$$

Если ввести матрицу

$$\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{L}}_-^{-1} - \hat{\mathbf{L}}_+^{-1}) \{ (\hat{\mathbf{L}}_- \hat{\mathbf{P}} + (\hat{\mathbf{L}}_+ + \hat{\mathbf{L}}_-)(\hat{\mathbf{L}}_+ - \hat{\mathbf{L}}_-)^{-1} \hat{\mathbf{L}}_-) \hat{\mathbf{P}} \}$$

и использовать равенство

$$(\hat{\mathbf{L}}_-^{-1} - \hat{\mathbf{L}}_+^{-1}) \hat{\Delta} = 4 \frac{\partial}{\partial u^*} \hat{\mathbf{L}}_-^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u} - 4 \frac{\partial}{\partial u} \hat{\mathbf{L}}_+^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u^*},$$

то уравнение (42) можно переписать в следующем виде:

$$4 \frac{\partial}{\partial u^*} \hat{\mathbf{L}}_-^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u} - 4 \frac{\partial}{\partial u} \hat{\mathbf{L}}_+^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u^*} + \hat{\mathbf{D}} \Psi = 0. \quad (43)$$

Граничные условия (34) и (36) имеют следующий вид:

$$\Delta \left\{ \hat{\mathbf{L}}_-^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \hat{\mathbf{L}}_+^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u^*} \right\} = 0, \\ \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial u^*}. \quad (44)$$

Для границы раздела, ортогональной оси x , последнее граничное условие означает, что $\partial \Psi / \partial u$ непрерывно при переходе через границу и тем самым выполняется автоматически. Первое граничное условие (44) легко учитывается в самом уравнении (43), включая границу, где $\hat{\mathbf{L}}_{\pm}$ претерпевает изменение. Нетрудно убедиться, что уравнение (43) также согласуется с граничными условиями (37) для границы раздела, ортогональной оси y . Этот вывод является важным, поскольку мы можем решать уравнение (43) всюду, включая и границы раздела, где $\hat{\mathbf{L}}_{\pm}$ претерпевает скачок.

Г-, Т- и Х-структуры

Рассмотрим микроволновые волноводы Г-, Т- и Х-типов с границами раздела, указанными на рис. 1. Заштрихованные области означают области, к которым приложено пробное поле излучения $\lambda \cos \Omega t$. Предполагается, что пробное поле излучения мало и его магнитное поле пересекает двумерный волновод ортогонально, т.е. по оси z . Возьмем для расчетов типичные значения $M = 1700$ Gs, $g = 2 \cdot 10^7$ CGS для ферромагнетика. Если обозначить ширину волновода как d , можно ввести следующие безразмерные величины:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/d, \quad \tilde{\omega} = d\omega/c, \quad \tilde{\Omega} = d\Omega/c, \\ \tilde{H}_0 = gH_0d/c, \quad \tilde{\lambda} = g\lambda d/c, \quad m = gMd/c, \quad (45)$$

где c — скорость света.

Если выключить пробное поле излучения, уравнение для микроволнового поля в безразмерных величинах принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0, \\ k^2 = \tilde{\omega}^2 \frac{2\mu_+ \mu_-}{\mu_+ + \mu_-}, \\ \mu_{\pm} = 1 + 4\pi \frac{m}{\tilde{H}_0 \pm \tilde{\omega}}. \quad (46)$$

Проведем оценки. Если выбрать типичный сантиметровый волновод с шириной $d = 1$ см, а внешнее постоянное магнитное поле $H_0 = 1000$ из (44), имеем $m \approx 1$, $\tilde{H}_0 \sim 1$, $\tilde{\omega} = 3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, $\tilde{\omega} \sim 1$.

Численные решения и результаты

Система линейных дифференциальных уравнений второго порядка для амплитуд $\{\Psi_n\}$ (43) образует исходную основу для численного анализа задачи рассеяния падающего микроволнового излучения в волноводной структуре, заполненного магнетиком. Граничные условия предполагают асимптотический вид ЭМ волн вдали от области рассеяния (условия волноводной дифракции). В типичной схеме рассеяния рассматривается падающая волна лишь в каком-то выбранном присоединенном волноводе (волноводном тракте), который мы выберем за первый. Рассеяние происходит во все присоединенные волноводы.

Численно решение системы уравнений (43) проводилось на квадратной сетке, что естественно для рассматриваемых типов волноводов (рис. 1). Поскольку пробное поле излучения прикладывается только в области рассеяния (затемненная область на рис. 1), оператор $\hat{\mathbf{L}}_{\pm}$ становится недиагональным в этой области, что приводит к перемешиванию распространяющегося микроволнового поля со связанными колебаниями ЭМ поля волновода. Вдали от области рассеяния, т.е. в присоединенных волноводах, уравнение (43) представляет собой уравнение Гельмгольца и описывает ТЕ-волны в идеальном ферромагнетике (уравнение (28)) с частотами $\omega + n\Omega$. Решение задачи волноводной дифракции находится сшиванием решения уравнения (43) в области рассеяния со всеми ТЕ-волнами вне области рассеяния. Задача практически совпадает с задачей баллистического транспорта электронов в электронных волноводах, численная основа решения которой была заложена Андо [15] для стационарного случая. Обобщение на случай динамической задачи рассеяния электронов было проведено нами в работе [12].

Определим коэффициент прохождения T_{ij} как отношение выходной мощности поля в i -м волноводе к входной мощности в j -м волноводе. Здесь i нумерует входной присоединенный волновод, а j нумерует выходной волновод. Очевидно, если пробное поле излучения выключено, из

закона сохранения энергии следует, что

$$1 + G = \sum_j T_{ij} = 1.$$

Однако если включить пробное поле излучения, возможен отбор (или, наоборот, передача) мощности ЭМ поля в процессе прохождения микроволнового поля через волновод. Таким образом, величина G определяет мощность поглощения пробного поля излучения.

Мощность может быть рассчитана численно с помощью вектора Умова–Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Подставляя сюда представления (11) и (17), получаем после усреднения во времени

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_x &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sum_m \{ \Psi_m \tilde{h}_m - \Psi_m^* h_m \}, \\ \bar{\Pi}_y &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Im} \sum_m \{ \Psi_m \tilde{h}_m - \Psi_m^* h_m \}. \end{aligned} \quad (47)$$

Распределение токов $\bar{\Pi}$ в резонансном случае для всех рассматриваемых структур показано на рис. 3. Хорошо видно, что резонансное примешивание локализованных связанных состояний во всех типах волноводов приводит к появлению вихревых структур потоков мощности. Причем последний рисунок рис. 3 демонстрирует, как нодальные линии второго связанного состояния в X -структуре отражаются на потоках мощности. Все эти явления также были рассмотрены для баллистического электронного транспорта через электронные волноводы [12].

Если интересоваться потоком микроволнового поля излучения в присоединенных волноводах (вне области рассеяния), h_m можно выразить с помощью уравнения (38) через Ψ_m . Выбирая для определенности входной волновод 1 (рис. 1) и проводя интегрирование по сечению волновода шириной 1, получаем из (47) среднюю по времени мощность

$$W_1 = -\frac{icL}{16\pi} \sum_m \left\{ ([\hat{L}_+]_m^{-1} - [\hat{L}_-]_m^{-1}) \operatorname{Im} \left(\Psi_m^* \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} \right) \right\}. \quad (48)$$

Аналогично рассчитываются мощности в других присоединенных волноводах. В результате находятся коэффициенты прохождения

$$T_{ij} = W_j / W_i.$$

На рис. 4 приведены частотные зависимости коэффициента прохождения TE -волны с фиксированной частотой $\tilde{\Omega} = 0.4$ пробного поля излучения через Γ -образный волновод, где обозначения даны соотношениями (45). Зависимости без поля излучения показаны тонкими линиями. Рисунок отчетливо демонстрирует

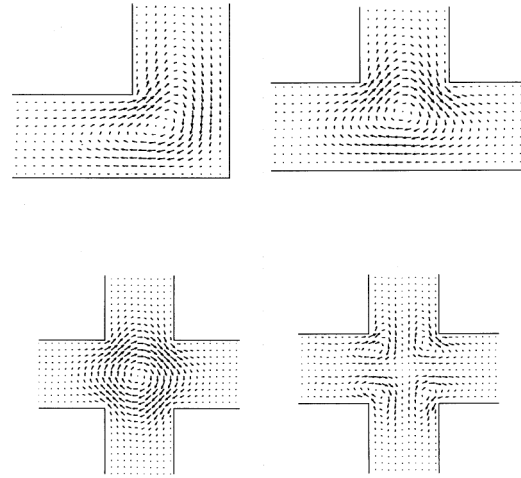


Рис. 3. Потоки мощности ЭМ поля в случае резонансного примешивания локализованных состояний. В нижнем правом углу показан случай примешивания второго связанного состояния в X -структуре, которое антисимметрично относительно $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$.

резонансное поведение коэффициента прохождения TE -моды ЭМ поля на частоте моды $\tilde{\omega} = 1.204$. Соответственно частота связанных ЭМ колебаний в Γ -структуре получается равной $\tilde{\omega}_b = \tilde{\omega} - \tilde{\Omega} = 0.804$. Подставляя параметры $\tilde{H}_0 = 1$, $m = 1$ и частоту связанных колебаний $\tilde{\omega}_b = 0.804$ в формулы (45), получаем $k_b^2 = 0.92$, что действительно близко к теоретическому значению $0.9291\pi^2$ в Γ -образном волноводе [4]. Частотная ширина резонансного провала в коэффициенте прохождения T_{12} пропорциональна квадрату амплитуды пробного поля излучения, что естественным образом следует из динамической теории возмущений. На рис. 4, b показана частотная зависимость поглощения мощности микроволнового поля излучения.

Как видно из рис. 4, b , мощность поглощения (48) проявляет резонансную особенность за счет динамического примешивания связанного состояния. Заметим, что мощность поглощения при некоторых частотах пробного поля излучения становится больше единицы, что означает, что микроволновое поле, проходящее через область рассеяния, приобретает небольшую часть мощности от пробного поля излучения. На рис. 4, c, d показан вариант Γ -структуры, в котором микроволновое поле проходит в сторону, противоположную той, которая рассматривалась на рис. 4, a, b . Поскольку вектор Умова–Пойнтинга неинвариантен относительно $y \rightarrow -y$, то, как видно из сравнения рис. 4, b и d , частотное поведение мощности поглощения зависит от того, в какую сторону направлен выходной присоединенный волновод Γ -структуры. Соответственно также неинвариантны коэффициенты прохождения, которые определяются как отношение мощности выходящего микроволнового поля на входную мощность. Однако различие в мощности поглощения небольшое, порядка 1%.

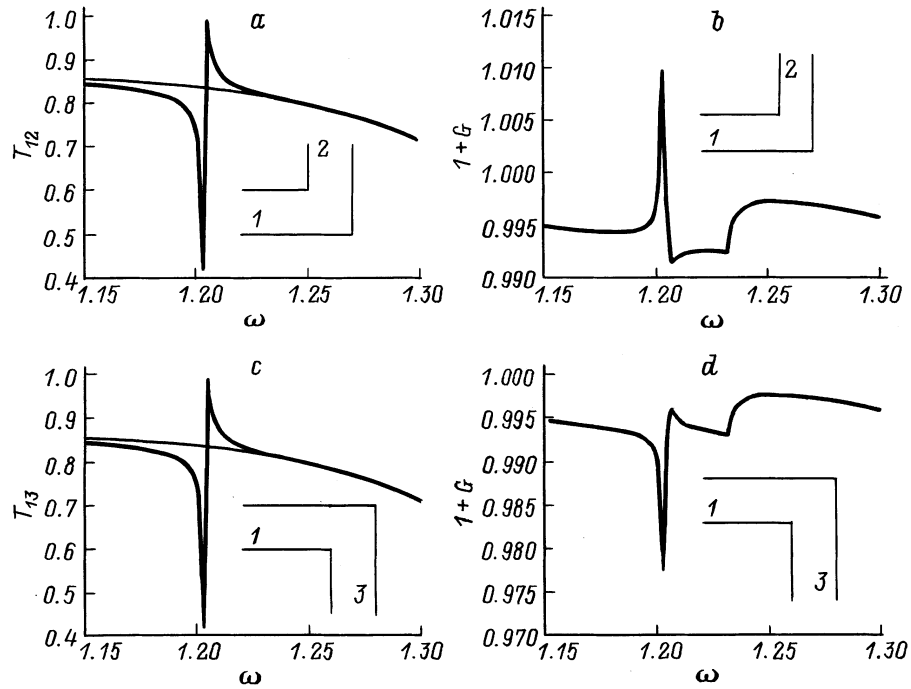


Рис. 4. Зависимость коэффициента прохождения TE -моды $n = 1$ и мощности его поглощения G через Γ -волновод от частоты моды. Жирная кривая — случай воздействия резонансного поля излучения. Безразмерные параметры (см. формулы (44)): $\tilde{H}_0 = 1$, $m = 1$, $\lambda = 0.1$.

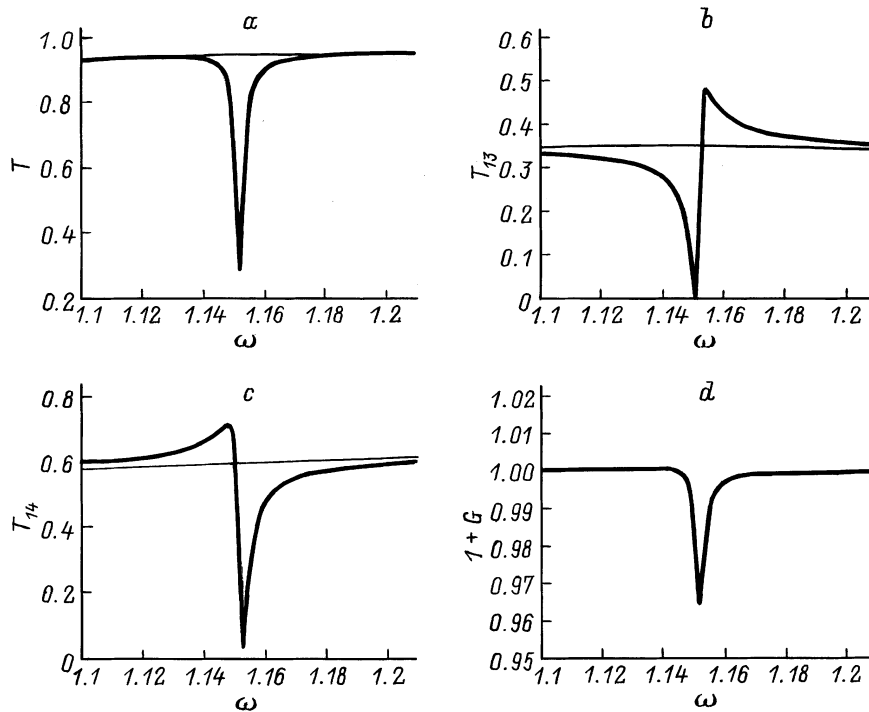


Рис. 5. То же, что на рис. 4, в случае T -волновода. Параметры задачи: $\tilde{H}_0 = 1$, $m = 1$, $\tilde{\Omega} = 0.4$, $\lambda = 0.2$. a — полный коэффициент прохождения, b и c — коэффициенты прохождения в волноводные тракты 3 и 4 соответственно, d — коэффициент поглощения пробного поля излучения. $\lambda = 0$ (тонкая кривая), 0.2 (жирная кривая).

На рис. 5–7 показаны аналогичные явления для T - и X -структур. Рис. 7 демонстрирует эффекты резонансного управления прохождением микроволнового излучения

через X -структуру за счет резонансного подмешивания второго связанного состояния с собственной частотой $\omega_b = 1.91$. В случае пустого X -образного волновода

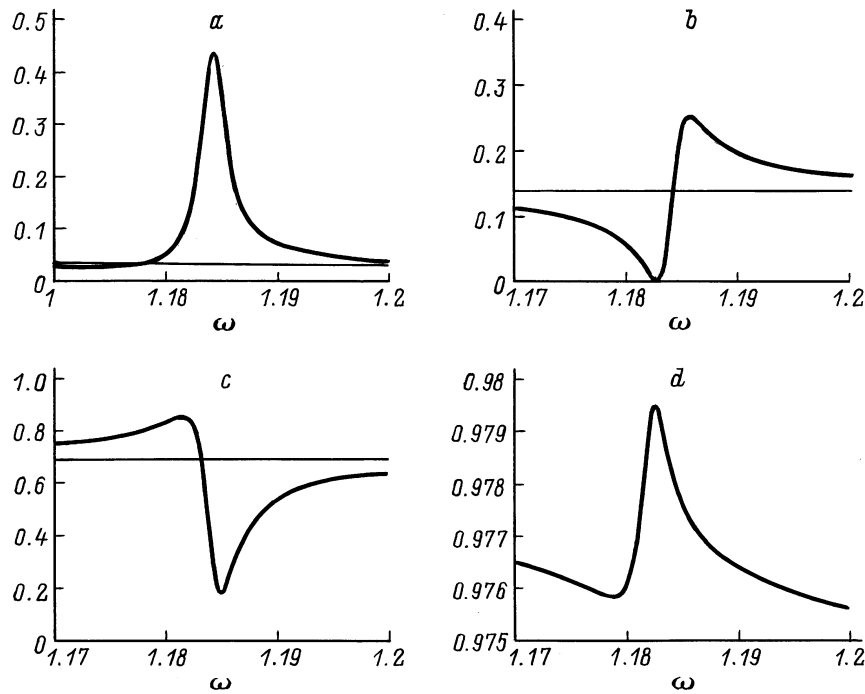


Рис. 6. То же, что на рис. 4, в случае *X*-волновода. Пробное поле излучения настраивается на возбуждение основного связанного состояния ЭМ поля в структуре. *a* — коэффициент отражения, *b* и *c* — коэффициенты прохождения в волноводные тракты 2 (3) и 4 соответственно, *d* — коэффициент поглощения пробного поля излучения. Параметры задачи: $\tilde{H}_0 = 1, m = 1, \tilde{\Omega} = 0.5, \lambda = 0.2$.

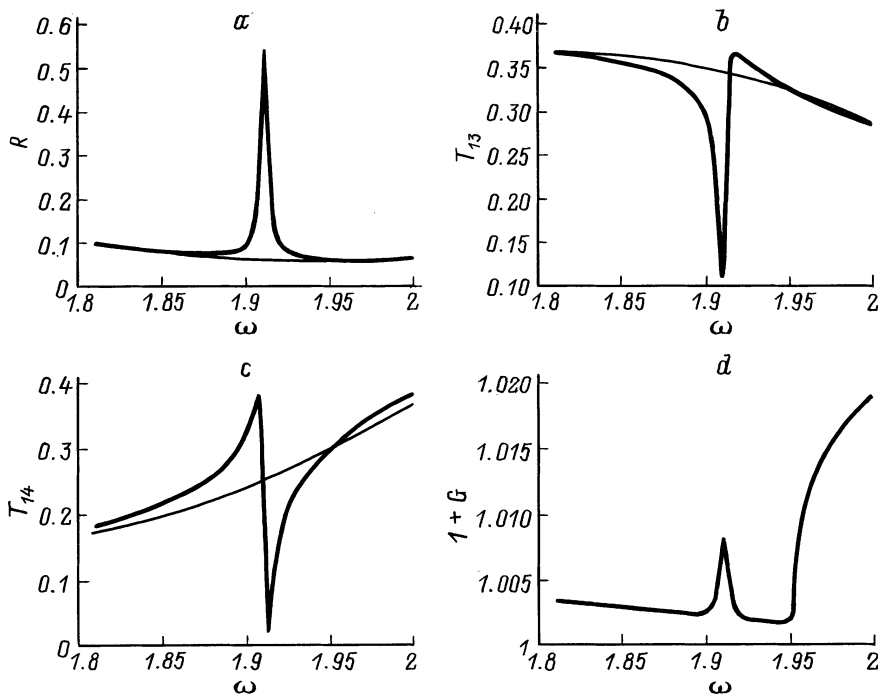


Рис. 7. То же самое, что и на рис. 5, но пробное поле излучения настраивается на возбуждение первого связанного состояния с частотой, выше пороговой частоты волноводных трактов. Параметры задачи: $\tilde{H}_0 = 1, m = 1, \tilde{\Omega} = 0.4, \lambda = 0.15$.

частота второго связанного состояния [6] $\omega_b = 6.06.91$. Особенность мощности поглощения микроволнового поля на частотах $\omega \geq 1.95$ связана с тем, что в этой частотной области начинается вторая полоса прохожде-

ния ЭМ волн. Напомним, что из-за магнитной проницаемости все частотные характеристики (как частоты связанных состояний, так и пороги частот прохождения) волноводов сильно смещены в область низких частот.

А.Ф. Садреев благодарен П. Экснеру (P. Exner) за разъяснения по связанным состояниям.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 97-02-16305).

Список литературы

- [1] *Луи де-Бройль*. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. М.: ИЛ, 1948. 107 с.
- [2] *Datta S.* Electronic Transport in Mesoscopic Systems. Cambridge University Press, 1995. 370 p.
- [3] *Goldstone J., Jaffe R.L.* // Phys. Rev. 1992. Vol. B45. P. 14 100–14 108.
- [4] *Exner P., Šeba P.* // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30. P. 2574–2581.
- [5] *Exner P., Šeba P., Štoviček P.* // Czech. J. Phys. 1989. Vol. B39. P. 1181–1199.
- [6] *Schult R.L., Ravenhall D.G., Wylid H.W.* // Phys. Rev. 1989. Vol. B39. P. 5476–5479.
- [7] *Peeters F.M.* // Superlatt. Microstruct. 1989. Vol. 6. P. 217–224.
- [8] *Carini J.P., Londergan J.T., Mullen K., Murdock D.P.* // Phys. Rev. 1992. Vol. B46. P. 15 538–15 549.
- [9] *Carini J.P., Londergan J.T., Mullen K., Murdock D.P.* // Phys. Rev. 1993. Vol. B48. P. 4503–4522.
- [10] *Mekis A., Fan S., Joannopolous J.D.* // Phys. Rev. 1998. Vol. B58. P. 4809–4817.
- [11] *Bulgakov E.N., Sadreev A.F.* // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 403–408.
- [12] *Bulgakov E.N., Sadreev A.F.* // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. С. 1954–1970.
- [13] *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 420 с.
- [14] *Гуревич А.Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591 с.
- [15] *Ando T.* // Phys. Rev. 1991. Vol. B44. P. 8017–8025.