01

Аналитическое представление потенциала однородного эллиптического конуса

© В.А. Антонов, А.С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: baranov@gao.spb.ru

(Поступило в Редакцию 21 декабря 2000 г.)

В связи с тем что различные гравитирующие или заряженные тела могут иметь особые точки поверхности, встает проблема, как отражаются подобные сингулярности распределения масс на поведении потенциала. Конкретно дано аналитическое представление гравитационного или электростатического потенциала однородного эллиптического конуса через однократные интегралы. Эти интегралы в общем случае несколько сложнее эллиптических, хотя в случае кругового конуса сводятся к элементарным функциям. Произвол, связанный с различными способами усечения конуса, выражается в возможности добавления различных гармонических многочленов, однако сингулярность потенциала вблизи вершины конуса носит объективный и однозначный характер.

Введение

Известна большая практическая значимость вычисления гравитационного или электростатического потенциала различных конкретных тел. В некоторых случаях потенциалы, как известно, выражаются в элементарном виде или вообще через хорошо известные функции. Классическим примером могут служить фигуры равновесия небесных тел [1–3], неоднородности земной коры в гравиметрии и геодезии, астероиды неправильной формы, а в электростатике, например, различные заостренные контакты [4]. Другим примером выражения потенциала в элементарном виде является прямоугольная призма [5].

Мы рассмотрим несколько более сложный пример однородного эллиптического конуса. В сравнении с призмой усложнение состоит в принципиальной неопределенности потенциала при продолжении притягивающего, или заряженного, тела до бесконечности. Действительно, возникающую расходимость потенциала приходится компенсировать введением уже не постоянной по координатам добавки, как для призматических тел, а квадратичной функции декартовых координат. В выборе коэффициентов этой квадратичной функции и заключается упомянутая выше принципиальная неопределенность. Она, однако, не лишает смысла задачу определения потенциала хотя бы потому, что локальные условия вблизи вершины, связанные с уравнениями Лапласа и Пуассона, сохраняют объективный характер независимо от способа усечения тела на больших расстояниях.

В математической физике сравнительно мало внимания уделялось поведению поля вблизи особых точек поверхности тела. Одна из немногих работ [6] посвящена исследованию сингулярности поля вблизи вершины пирамиды (различные конусы можно считать предельными случаями пирамид). Однако в [6] ставится и решается задача Дирихле, т.е. в сущности берется поле проводника, а не равномерно заряженного диэлектрика, как у нас.

Основные формулы

Для конкретности считаем, что притягивающее или заряженное вещество заполняет область

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}<0, \quad z>0, \tag{1}$$

где x, y, z — декартовы координаты; a, b, c — некоторые положительные параметры (считаем для определенности $a \geq b$); плотность вещества и гравитационную константу везде далее полагаем равными единице.

Подберем функции, удовлетворяющие уравнениям Лапласа и Пуассона, пока только в верхнем полупространстве. Это делается по аналогии с известными формулами для потенциала однородного эллипсоида. Введем одну из так называемых сфероконических координат λ как корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2-\lambda}=0, \tag{2}$$

который заключен в интервале $(-b^2, c^2)$ [2]. Топологические соображения показывают, что такая величина λ определяется однозначно непрерывным образом во всем пространстве, причем только в двух случаях она принимает крайние значения вышеупомянутого интервала. Значение $\lambda=-b^2$ достигается в секторе

$$y=0, \quad \left(\frac{x}{z}\right)^2<\frac{a^2-b^2}{c^2+b^2}. \tag{3}$$

Максимальное же значение $\lambda=c^2$ достигается в плоскости $z=0$, причем асимптотически

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{c^2-\lambda}}{|z|}=\left(\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}\right)^{-1/2}. \tag{4}$$

Вообще λ является четной функцией по отношению к каждой из координат x, y, z. Введем теперь величины

$$J_a(\lambda) = \pi abc \int\limits_{-b^2}^{\lambda} \frac{ds}{(a^2+s)D(s)},$$

$$J_c(\lambda) = \pi abc \int\limits_{-b^2}^{\lambda} \frac{ds}{(s-c^2)D(s)},$$

$$J_b(\lambda) = -\frac{2\pi abc}{D(\lambda)} - J_a(\lambda) - J_c(\lambda), \qquad (5)$$

где $D_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2-s)}$, и построим функцию

$$U = \left[J_a(0)x^2 + J_b(0)y^2 + J_c(0)z^2\right] \qquad (6)$$

внутри конуса и

$$U = \left[J_a(\lambda)x^2 + J_b(\lambda)y^2 + J_c(\lambda)z^2\right] \qquad (7)$$

вне конуса.

Легко проверяется, что функция $U(x, y, z)$ непрерывна во всем внешнем полупространстве вместе со своими первыми производными. Применяя обычное правило дифференцирования неявной функции к $\lambda(x, y, z)$, убеждаемся также в справедливости уравнения Лапласа $\Delta U = 0$ и уравнения Пуассона $\Delta U = -4\pi$ внутри фигуры.

В нижнем полупространстве также очень легко построить гармоническую функцию

$$W = J_a(c^2)(x^2 - z^2) + J_b(c^2)(y^2 - z^2), \qquad (8)$$

так, что значения функций U и W при $z = 0$ совпадают. Однако остается единственная "неправильность" в виде различия нормальных производных. Действительно, с учетом (4) получаем при $z = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{4\pi abc}{AB}\sqrt{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}}, \qquad (9)$$

где $A = \sqrt{a^2+c^2}$, $B = \sqrt{b^2+c^2}$, в то время как в тех же точках, очевидно, $\partial W/\partial z = 0$.

Для исправления положения остается добавить к U и W такой потенциал, который соответствовал бы простому слою в плоскости $z = 0$ с поверхностной плотностью,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (10)$$

причем $\partial U/\partial z$ дается формулой (9).

Для облегчения расчетов найдем сначала потенциал слоя, распределенного в той же плоскости с плотностью,

$$\nu = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}\right)^{-1/2}, \qquad (11)$$

заданной внутри эллипса $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$.

Соответствующий потенциал имеет вид

$$\Phi = AB\int\limits_{l}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{A^2+s} + \frac{y^2}{B^2+s} + \frac{z^2}{s}\right) \times \frac{ds}{\sqrt{(A^2+s)(B^2+s)s}}, \qquad (12)$$

где l — положительный корень уравнения $x^2/(A^2+l) + y^2/(B^2+l) + z^2/l = 1$.

Он представляет собой комбинацию хорошо известных потенциалов однородного трехосного эллипсоида и эллипсоидального гомотетического слоя, но для случая предельной их сплюснутости.

Наряду с Φ рассмотрим еще потенциал $\Phi(q)$, отличающийся только заменой A и B на Aq и Bq, где q — произвольный коэффициент подобия. При одновременном итегрировании соответствующей плотности $\sigma(q)$ и потенциала по q получаем сначала

$$\int\limits_0^{\infty}\sigma(q)dq = \sqrt{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}}, \qquad (13)$$

что отличается от (10) только постоянным коэффициентом. Для потенциала же соответствующее интегрирование проведем от нуля до некоторого конечного Q, чтобы избежать формальной расходимости. Интеграл по q, а именно

$$\int\limits_0^{Q}\Phi(q)dq = AB\int q^2dq \times \int\limits_{l(q)}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{A^2q+s} + \frac{y^2}{B^2q+s} + \frac{z^2}{s}\right)\frac{ds}{\sqrt{(A^2q+s)(B^2q+s)s}}, \qquad (14)$$

преобразуем заменой $s = q^2$ и с соответствующей заменой нижнего предела интегрирования, которым теперь будет служить Λ, определяемое как корень уравнения, получим

$$\frac{x^2}{A^2+\Lambda} + \frac{y^2}{B^2+\Lambda} + \frac{z^2}{\Lambda} = q^2. \qquad (15)$$

После интегрирования по q получается

$$\int\limits_0^{Q}\Phi(q)dq = AB \times \int\limits_{\nu}^{\infty}\frac{(Q^2 - q^2(u))/2 + (x^2/(A^2+u) + y^2/(B^2+u) + z^2/u)\ln Q/q(u)}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)u}}\,du, \qquad (16)$$

где $q(u) = \sqrt{x^2/(A^2+u) + y^2/(B^2+u) + z^2/u}$; ν — корень уравнения, получающегося из (15) заменой q на Q.

Для нас существенна асимптотика при больших Q, а именно,

$$v = z^2 Q^{-2} + z^2 \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}\right) Q^{-4} + \dots . \qquad (17)$$

Из (17), в частности, следует

$$\int\limits_v^\infty \frac{du}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)u}} = \int\limits_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)u}} - \frac{2z}{ABQ} + O(Q^{-3}) \qquad (18)$$

и

$$\int\limits_v^\infty \frac{q^2 du}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)u}} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{x^2 - z^2}{A^2+u} + \frac{y^2-z^2}{B^2+u}\right) \times \frac{du}{\sqrt{(A^2+u)(B^2+u)u}} + \frac{2zQ}{AB} + O(Q^{-1}). \qquad (19)$$

Несколько большее неудобство причиняет логарифмический множитель в сочетании с $u^{-3/2}$ (см. формулу (16)). От логарифма в данном случае можно избавиться интегрированием по частям

$$\int\limits_v^\infty \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{A^2+u} + \frac{1}{B^2+u}\right) \ln \frac{Q}{q(u)} \times \left((A^2+u)(B^2+u)u\right)^{-1/2} du$$

$$= \frac{2}{D(u)} - \int\limits_v^\infty \left[\frac{1}{A^2+u} + \frac{1}{B^2+u} + \frac{1}{q^2(u)} \times \left(\frac{A^2x^2}{u(A^2+u)^2} + \frac{B^2y^2}{u(B^2+u)^2}\right)\right] \frac{du}{D(u)}. \qquad (20)$$

Таким образом, получается асимптотическое представление

$$\frac{1}{AB}\int\limits_0^\infty \Phi(q)dq = -\int\limits_0^\infty \left[\frac{x^2+z^2}{(A^2+u)u} + \frac{y^2+z^2}{(B^2+u)u} + \frac{x^2+y^2}{(A^2+u)(B^2+u)u}\right] \frac{du}{q^2(u)D(u)} + \dots, \qquad (21)$$

где невыписанные члены, помимо поправок, исчезающих при $Q \to \infty$, представляют собой функции, гармонические во всем пространстве, которые, согласно нашей прежней договоренности, можно отбрасывать.

В целом искомый потенциал конуса оказывается равным

$$\begin{aligned} &U(x,y,z) - abcH(x,y,z) \quad (z \geq 0), \\ &W(x,y,z) - abcH(x,y,z) \quad (z \leq 0), \end{aligned} \qquad (22)$$

где H — правая часть (21).

Представление с помощью интеграла в комплексной плоскости

Полученные формулы приобретают более компактный вид, если воспользоваться интегрированием в комплексной плоскости по переменной s или u.

Отнесем все интегралы по u к петлеобразному пути L, охватывающему слева начало координат и простирающемуся обеими ветвями до ∞. При этом на нижней ветви знак $\sqrt{u}$ меняется на обратный. Тогда повторением вышеприведенного интегрирования по частям получаем

$$H = -\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{q^2(u)[\ln q(u) + \pi i]}{D_1(u)} du, \qquad (23)$$

где $D_1(u) = \sqrt{(A^2+u)(B^2+u)u}$.

Отметим, что добавка πi к логарифму в правой части (23) необходима для компенсации тех мнимых членов, которые иначе бы возникали за счет продолжения этого логарифма в нижнюю полуплоскость при обходе точки $u = 0$, особой для функции $q(u)$.

Более симметричный вид формулы приобретают, если в (23) сделать замену $u = s - c^2$ и в выражениях (6)–(8) также перейти к комплексному интегрированию. В результате из (22) получаем для внешней области полный потенциал конуса при $z > 0$

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{\pi abc}{2}\int\limits_{-b^2}^{\lambda} \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{s-c^2}\right)\frac{ds}{D(s)} \\ & + \frac{abc}{4}\int\limits_L \frac{S\ln S}{\sqrt{(a^2+c^2+u)(b^2+c^2+u)u}} du \\ = {} & \frac{\pi abc}{2}\int\limits_{T(\lambda)} \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{s-c^2}\right)\frac{ds}{D(s)} \\ & + \frac{\pi abc}{2}\int\limits_{T_1(\lambda)} \left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{s-c^2}\right) \\ & \times \ln\left(\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{s-c^2}\right)\frac{ds}{D(s)}. \end{aligned} \qquad (24)$$

Здесь $S = x^2/(a^2+c^2+u) + y^2/(b^2+c^2+u) + z^2/u$, где $T(\lambda)$ — путь интегрирования, охватывающий петлеобразно слева точку b^2 и простирающийся обоими концами до $s = \lambda$; $T_1(\lambda)$ аналогично охватывает слева точку c^2 и простирается обоими концами до $-\infty$.

Выражение (8) для W имеет достаточно простой вид, но мы его здесь не приводим.

Внутри конуса изменение в сравнении с (24) состоит только в замене λ на нуль.

Формула (24) имеет то удобство, что по ней легко проверяется справедливость уравнения Лапласа. Также не составляет особого труда проверка непрерывности $\partial V/\partial z$ при $z = 0$. При этом удобна подстановка $s = c^2 + z^2\xi^2$.

Подчеркнем, что из (24) вытекает также утверждение, аналогичное теореме Маклорена–Лапласа для эллипсоидов [7], поскольку во внешней области результат зависит, помимо постоянных множителей, только от комбинации A^2 и B^2. Заметим еще, что те же самые результаты можно получить методом разделения переменных в сфероконических координатах. За эти координаты можно принять $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и μ. Действительно, выражение (24) распадается на сумму конечного числа попарных функций от λ, не считая множителей r^2 и $r^2 \ln r$. Проверка легко осуществляется с помощью формул связи

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)r^2}{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)r^2}{(a^2-b^2)(b^2+c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)r^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$$

и

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{s-c^2} = \frac{(s-\lambda)(s-\mu)r^2}{(a^2+s)(b^2+s)(s-c^2)}.$$

Частный случай кругового конуса

Специальный интерес представляет случай, когда $b \to a$. Поскольку при нашей постановке задачи к потенциалу во всем пространстве можно прибавлять произвольный гармонический многочлен, то допустимо видоизменение выражений (7) в том смысле, что мы добавляем замкнутый путь интегрирования, охватывающий точки $s = -a^2$ и $s = -b^2$. Действительно, лапласиан получающегося дополнительного многочлена по x, y и z сводится к интегралу от полной производной однозначной функции по замкнутому пути и обращается в нуль. В результате такой модификации путь интегрирования сводится к прохождению несколько выше вещественной полуоси от $-\infty$ до λ и несколько ниже в обратную сторону, что дает просто удвоение интеграла. Для интеграла (23) также существует технический прием, несколько облегчающий вычисления при $a = b$. Именно мы делаем подстановку $s = c^2 - t^2$ и получаем путь интегрирования несколько выше всей вещественной оси. Его можно поднять так, чтобы интегрирование шло уже с обеих сторон мнимой оси t, насколько позволяют особые точки. Таковыми оказываются $i\sqrt{\lambda}$ и $i\sqrt{a^2+c^2}$. Выше второй из них вклады в интеграл по обе стороны мнимой оси взаимно уничтожаются, так что фактически получается замкнутый путь. На нем мы пользуемся известным правилом изменения значения логарифма при изменении особой точки и только верхнюю особую точку надо обойти по малой окружности радиуса ε, чтобы учесть сингулярность, обусловленную делителем $a^2+c^2+t^2$ (предварительно удобно интегрированием по частям понизить степень делителя в одном члене). После всех этих расчетов получаем внешний потенциал конуса

$$V_e = \frac{\pi r^2 \sin^2\theta_0 \cos\theta_0}{2} \times \Bigg[(3\cos^2\theta_0 - 1)\Big(\ln a - \ln\sin\theta_0 - \ln r - 2\ln\sin\frac{\theta}{2}\Big) - 3\cos^2\theta_0 - 3\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg] \tag{25}$$

и внутренний потенциал

$$V_i = \frac{\pi r^2 \sin^2\theta_0 \cos\theta_0}{2}\Bigg[(3\cos^2\theta_0 - 1)\Big(\ln a - \ln\sin\theta_0 - \ln r - 2\ln\cos\frac{\theta}{2}\Big) - 3\cos^2\theta_0 - 3\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg] - \pi r^2 3\cos^2\theta_0\Bigg[\sin^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\cos\theta_0 \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\Bigg] - \pi r^2\sin^2\theta, \tag{26}$$

где использованы полярные координаты r и θ, а постоянная θ_0 представляет собой угол раствора конуса.

Напомним еще, что члены, пропорциональные $r^2(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, в (25) и (26) можно добавлять или вычитать с произвольным постоянным коэффициентом. Впрочем, выражения в (25) и (26), по-видимому, проще получать непосредственно, используя теорию сферических функций [7]. Можно, например, просто проверить справедливость уравнений Лапласа и Пуассона в полярных координатах, равно как и условия сшивания на границе $\theta = \theta_0$.

Заключение

Естественно, потенциал реального конуса, усеченного на некотором конечном расстоянии, отличается от того, который приводится в наших формулах. Однако внутри сохраняемой части конуса разность обеих функций непрерывна вместе со своими первыми производными, удовлетворяет уравнению Лапласа и ограничена в вершине конуса. Этого достаточно, чтобы сказать, что она представляет собой гармоническую функцию и разлагается в обычный ряд по внутренним шаровым функциям. В частности, усечение можно представлять себе как автомодельный процесс увеличения сохраняемой части до бесконечных размеров. Такой процесс задания потенциала, как нетрудно убедиться из соображений размерности, дает однозначный результат с точностью до некоторого отбрасываемого гармонического многочлена второй степени, и получающаяся предельная функция растет на больших расстояниях не быстрее $r^2 \ln r$. Следовательно, она должна совпадать с нашими выражениями (25) и (26) с точностью до добавления гармонического многочлена второй степени.

Формулы настоящей работы по своей природе могут давать содержательный результат только при расчете в некотором объеме, но не на отдельных поверхностях. Определенным исключением является только характер сингулярности вблизи вершины конуса, а именно: если не считать произвольной линейной функции координат, то главная часть потенциала при малых r должна иметь вид $f(\theta, \varphi)$, где f — некоторая функция угловых координат θ и φ.

Построенное представление является достаточно компактным и может использоваться в различных задачах математической физики, в частности в теории фигур равновесия небесных тел.

Список литературы

[1] *Аппель П.* Фигуры равновесия и вращающейся однородной жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936.
[2] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
[3] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988.
[4] *Галанини М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Наука, 1995.
[5] *Бровар В.В., Магницкий В.А., Шимбирев Б.Л.* Теория фигуры Земли. М.: Геодезиздат, 1961.
[6] *Фикера Г.* // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30. № 3. С. 105–124.
[7] *Гобсон Е.И.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.