01;04

Сферический зонд с переменным потенциалом в неподвижной столкновительной плазме

© А.В. Кашеваров

Центральный аэрогидродинамический институт,
140180 Жуковский, Московская область, Россия
e-mail:sasha@kura.aerocentr.msk.su

(Поступило в Редакцию 31 марта 2000 г. В окончательной редакции 10 октября 2000 г.)

Аналитически исследована задача о помещенном в неподвижную столкновительную слабоионизованную плазму сферическом зонде, постоянный потенциал которого, совпадающий с потенциалом пространства, модулирован малым гармоническим возмущением. Решение получено в двух предельных случаях толстого и тонкого слоев объемного заряда.

Введение

При зондовой диагностике плазм возникает проблема интерпретации измерений, довольно сложная в случае столкновительной плазмы, когда характерная длина свободного побега мала по сравнению с характерным размером зонда $\lambda \ll R$ и справедливо приближение сплошной среды. В течение длительного времени усилия многочисленных исследователей были преимущественно сосредоточены на решении этой проблемы для стационарных условий работы электрического зонда как в неподвижной, так и движущейся плазме (см., например, [1–4]). Существенно меньшее внимание уделялось разработке еще более сложной нестационарной теории зонда.

Редкие работы, рассматривающие зонд в нестационарном режиме, можно разделить на две группы. К первой группе относятся исследования поведения зондового тока при переходе зонда из одного стационарного состояния в другое из-за резкого изменения приложенного потенциала. Примером может служить недавняя работа [5], где найдено аналитическое решение для эволюции тока на сферический зонд, помещенный в неподвижную слабо ионизованную плазму высокой плотности в условиях толстого слоя объемного заряда, при скачкообразном падении малой разности потенциалов между зондом и плазмой до нуля.

Работы второй группы [6–8] посвящены определению импеданса зондов с модулированным потенциалом. Малое синусоидальное возмущение постоянного потенциала зонда расширяет возможности диагностики. Модулируя потенциал, в принципе возможно оценить некоторые другие важные параметры плазмы, помимо концентрации и температуры электронов или потенциала пространства, традиционно определяемых по стационарной вольтамперной характеристике.

Так, в [6] по найденному импедансу сферического зонда в неподвижной плазме был сделан вывод о возможности измерения коэффициента диффузии ионов. Анализ [6] проводился для условия тонкого бесстолкновительного слоя объемного заряда вокруг зонда, когда дебаевский радиус экранирования $\lambda_D \ll \lambda \ll R$.

Целью настоящего аналитического исследования является определение импеданса сферического зонда для двух других характерных случаев его работы в сплошной среде: в режимах тонкого столкновительного $\lambda \ll \lambda_D \ll R$ и толстого $\lambda \ll R \ll \lambda_D$ слоев объемного заряда.

Постановка задачи

Используем наиболее простую постановку. Пусть сферический зонд помещен в неподвижную слабоионизованную плазму высокой плотности, которая состоит из нейтральных частиц, электронов и однозарядных положительных ионов. Химические реакции между компонентами заморожены. Плазма является термически равновесной и обладает постоянными переносными свойствами. В этих условиях основная система уравнений зонда [1] может быть распространена на нестационарный случай следующим образом:

$$\beta^{-1}\partial n_+/\partial t - \nabla(\nabla n_+ + n_+\nabla\psi) = 0, \qquad (1)$$

$$\partial n_-/\partial t - \nabla(\nabla n_- - n_-\nabla\psi) = 0, \qquad (2)$$

$$\alpha^2\Delta\psi = n_- - n_+. \qquad (3)$$

Уравнения (1)–(3) записаны в безразмерном виде и описывают нестационарную диффузию заряженных частиц в электрическом поле. Здесь $\beta = D_+/D_-$ — отношение коэффициентов диффузии ионов и электронов, причем $\beta \ll 1$; n_+ и n_- — числовые концентрации ионов и электронов, отнесенные к значению концентрации заряженных частиц на бесконечности N_∞; ψ — безразмерный электрический потенциал, связанный с размерным φ соотношением $\psi = e\varphi/kT_-$, где e — заряд электрона, k — постоянная Больцмана, T_- — температура электронов, φ отсчитывается от потенциала плазмы. Масштабом расстояния r является радиус зонда R, масштабом времени t — отношение R^2/D_-. Параметр $\alpha = \lambda_D/R$ характеризует толщину слоя объемного заряда, окружающего зонд.

Граничными условиями для системы (1)–(3) являются вдали от зонда при $r \to \infty$

$$n_+(\infty) = n_-(\infty) = 1, \quad \psi(\infty) = 0. \tag{4}$$

На поверхности зонда при $r = 1$ имеет место полное поглощение заряженных частиц

$$n_+(1) = n_-(1) = 0. \tag{5}$$

Зададим потенциал на поверхности в виде

$$\psi(1) = \psi_p + a \sin \omega t, \tag{6}$$

где ψ_p и a — константы, причем $a \ll 1$.

Будем считать частоту колебаний ω достаточно низкой, чтобы были оправданы исходные допущения постановки задачи, в частности справедливость соотношения Эйнштейна между коэффициентом диффузии и подвижностью заряженных частиц, а также предположение термического равновесия плазмы, позволяющее не включать в математическое описание задачи уравнение энергии электронов.

Задача состоит в том, чтобы найти электронный I_- и ионный I_+ токи на зонд как функции частоты ω. Безразмерный ток $I_\mp$, масштабом которого является $4\pi e N_\infty R D_\mp$, определяется как

$$I_\mp = dn_\mp/dr \,\big|_{r=1} \,. \tag{7}$$

Полный безразмерный ток на зонд I_Σ с учетом противоположной направленности токов I_- и I_+ равен

$$I_\Sigma = I_- - \beta I_+.$$

Аналитическое решение нестационарной задачи (1)–(7) может быть получено, если $\psi_p = 0$, т. е. когда потенциал зонда колеблется с малой амплитудой относительно потенциала пространства. Стационарное решение ($\omega = 0$) при любом значении α имеет вид $\psi_0(r) = 0$,

$$n_{0\mp}(r) = 1 - r^{-1}. \tag{8}$$

В этих условиях разделение зарядов отсутствует, поэтому деление на случаи тонкого или толстого слоя объемного заряда в зависимости от величины α становится формальным, так как слой не образуется в стационарном режиме. При модуляции потенциала по-прежнему можно говорить о тонком или толстом, но нестационарном слое объемного заряда.

Решение при $\alpha \to \infty$

В пределе $\alpha \to \infty$ уравнение (3) вырождается в уравнение Лапласа $\Delta\psi = 0$. Его решение, удовлетворяющее (4) и (6), имеет вид $\psi = ar^{-1} \sin \omega t$ или в комплексной форме

$$\psi = ar^{-1} \exp(i\omega t). \tag{9}$$

Уравнения (1) и (2) становятся независимыми друг от друга, поэтому достаточно рассмотреть, например, только уравнение (2). Представим концентрацию $n_-(r,t)$ в виде

$$n_-(r,t) = n_0(r) + \tilde{n}_-(r,t) = n_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} n_m(r) \exp(im\omega t). \tag{10}$$

Подставляя (8)–(10) в (2) и выделяя члены одного порядка по ω, получим для $n_1(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$n_1'' + 2r^{-1}n_1' - i\omega n_1 = -ar^{-4}. \tag{11}$$

Исходя из (4), (5), граничными условиями для (11) являются $n_1(1) = n_1(\infty) = 0$. Используя [9], найдем решение

$$\begin{aligned} n_1(r) = {} & -2^{-1}ar^{-2} + 2^{-1}ar^{-1} \exp\big[-\sqrt{i\omega}(r-1)\big] \\ & \times \Big\{1 + 2^{-1}\sqrt{i\omega}\big[\exp(\sqrt{i\omega})\mathrm{E}_1(\sqrt{i\omega}) \\ & - \exp(-\sqrt{i\omega})\mathrm{E}_1(-\sqrt{i\omega})\big]\Big\} - 4^{-1}ar^{-1}\sqrt{i\omega} \\ & \times \big[\exp(r\sqrt{i\omega})\mathrm{E}_1(r\sqrt{i\omega}) - \exp(-r\sqrt{i\omega})\mathrm{E}_1(-r\sqrt{i\omega})\big]. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь

$$\mathrm{E}_1(z) = \int_\infty^z \frac{e^{-u}}{u} du$$

— интегральная показательная функция [10]. Дифференцируя (12) по r при $r = 1$, получим комплексную амплитуду тока электронов, обусловленного главным тоном колебаний их концентрации,

$$I_1 = 2^{-1}a - 2^{-1}ai\omega \exp(i\omega)\mathrm{E}_1(\sqrt{i\omega}). \tag{13}$$

Очевидно, что, например, амплитуда тока I_2, вызванного вторым тоном колебаний, будет у́же $\sim a^2$, поэтому им и всеми последующими можно пренебречь при $a \ll 1$.

Комплексную величину I_1 удобно представить в виде

$$I_1 = aM(\omega) \exp[i\Phi(\omega)]. \tag{14}$$

Модуль и сдвиг фаз переменного тока I_1 связан с импедансом зонда $Z(\omega)$ следующим образом:

$$Z = M^{-1} \exp(-i\Phi).$$

Окончательно для искомого тока электронов на зонд будем иметь

$$\begin{aligned} I_- &= I_0 + \mathrm{Im}\,[I_1 \exp(i\omega t)] \\ &= 1 + aM(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)]. \end{aligned} \tag{15}$$

Зависимости $M(\omega)$ и $\Phi(\omega)$, определенные на основании (13) с помощью таблиц [10], представлены на рис. 1, 2.

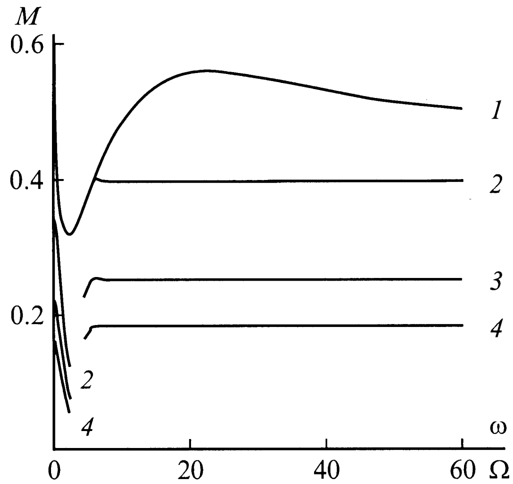

Рис. 1. Зависимости амплитуды колебаний электронного тока от частоты для α: *1* — $\to \infty$, *2* — 0.1, *3* — 0.01, *4* — 0.001; *1* — зависимость $M(\omega)$, *2–4* — $M(\Omega)$.

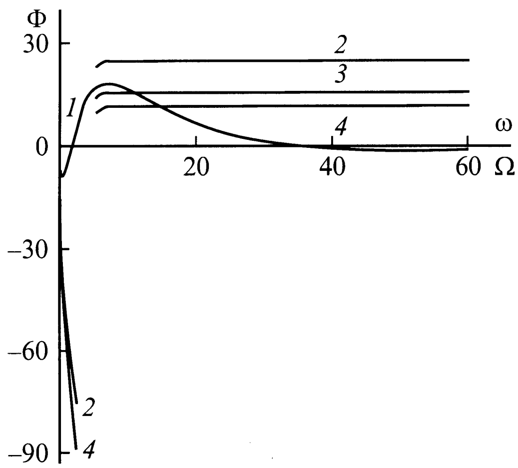

Рис. 2. Зависимости сдвига фазы колебаний электронного тока от частоты. *1–4* — то же, что и на рис. 1.

При $z \ll 1$ функция $\mathrm{E}_1(z) \cong -\gamma - \ln z$, где $\gamma = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера, при $z \to \infty$ имеет место асимптотика $\mathrm{E}_1(z) \sim z^{-1}\exp(-z)$ [10]. Учитывая, что $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$, на основании (13) можно получить явные выражения для $M(\omega)$ и $\Phi(\omega)$. При $\omega \ll 1$

$$M(\omega) = (1 - \omega\pi/4)/2, \quad \Phi(\omega) = \omega(\gamma + 2^{-1}\ln\omega).$$

При $\omega \to \infty$

$$M(\omega) = 2^{-1}\big[1 - \sqrt{\omega}\exp(-\sqrt{\omega/2})\sin(\sqrt{\omega/2} + \pi/4)\big],$$

$$\Phi(\omega) = \sqrt{\omega}\exp(-\sqrt{\omega/2})\sin(\sqrt{\omega/2} + \pi/4).$$

Легко видеть, что ионный ток I_+ будет описываться той же формулой (15), в которой необходимо заменить a на $-a$, а зависимости $M(\omega), \Phi(\omega)$ — на $M(\omega/\beta), \Phi(\omega/\beta)$. Так как безразмерные токи I_+ и I_- оказываются одного порядка, то суммарный ток $I_\Sigma \approx I_-$, если $\beta \ll 1$.

Решение при $\alpha \to 0$

В этому случае уравнения (1)–(3) необходимо решать совместно. Однако при $\beta \to 0$ уравнение (1) вырождается в $\partial n_+/\partial t = 0$, т.е. распределение ионов в пространстве не зависит от времени и может быть описано стационарной формулой (8). Поэтому достаточно рассмотреть уравнения (2), (3).

Представляя $n_-(r,t)$ по-прежнему в виде (10) и подставляя в (2), (3), убеждаемся, что потенциал ψ также необходимо представить в виде

$$\psi(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(r)\exp(im\omega t).$$

В результате приходим к уравнениям

$$\xi^4 n_1'' - \xi^4 E_1 + (1-\xi)\xi^4 E_1' = i\omega n_1, \tag{16}$$

$$\alpha^2\xi^4 E_1' = -n_1. \tag{17}$$

Здесь $\xi = 1/r$, $E_1 = -d\psi_1/dr$. Из (17) следует, что при $\alpha \to 0$ во всем пространстве, за исключением тонкого слоя вблизи поверхности зонда при $\xi \cong 1$, можно считать $n_1 \cong 0$. Для этой квазинейтральной области из (16) имеем уравнение

$$(1-\xi)E_1' - E_1 = 0.$$

Его решением является

$$E_1 = C/(1-\xi). \tag{18}$$

Здесь C — постоянная интегрирования. Для амплитуды главного тона потенциала ψ_1 из (18) с учетом граничного условия (4) найдем

$$\psi_1 = C\ln(1-\xi). \tag{19}$$

Отсюда видно, что $\psi_1 \to \infty$ при $\xi \to 1$, т.е. граничное условие (6) не может быть выполнено. Это означает, что вблизи поверхности произведение $\alpha^2 E_1'$ остается конечным при $\alpha \to 0$, так что $n_1 \neq 0$ в тонком слое объемного заряда, окружающего зонд. Анализ нестационарного слоя объемного заряда проведем аналогично тому, как это было сделано в классической работе [11] для стационарного слоя.

Подставив (17) в (16), сделаем в получившемся уравнении замену

$$\zeta = \alpha^{-2/3}(1-\xi), \quad E_1(\xi) = \alpha^{-2/3}F_1(\zeta). \tag{20}$$

Пренебрегая членами $O(\alpha^{2/3})$, при $\alpha \to 0$ получим

$$F_1''' = (\zeta + i\Omega)F_1' + F_1. \tag{21}$$

Здесь $\Omega = \alpha^{4/3}\omega$. Этот член сохранен в (21), так как предполагается, что при $\alpha \to 0$ $\Omega = O(1)$, если $\omega \to \infty$. При $\zeta \to \infty$ решение уравнения (21) должно стремиться к квазинейтральному решению (18), т.е. в переменных (20) имеем

$$F_1(\zeta) \to C/\zeta, \quad \zeta \to \infty. \tag{22}$$

Интегрируя (21), имеем [9]

$$F_1'' - (\zeta + i\Omega)F_1 = -C. \tag{23}$$

Решение (23), удовлетворяющее (22), имеет вид

$$F_1 = A\,\mathrm{Ai}(\zeta + i\Omega) + \pi C\,\mathrm{Gi}(\zeta + i\Omega). \tag{24}$$

Здесь A — постоянная интегрирования, Ai и Gi — функции Эйри [12], причем $\mathrm{Gi}(z)$ удовлетворяет уравнению $y'' - zy = -\pi^{-1}$. Постоянная A выражается через C с помощью условия (5), которое принимает вид $n_1|_{\xi=1} = 0$, или из (17) после применения преобразования (20) $F_1'(0) = 0$. Следовательно, из (24) имеем

$$A = -\pi C\,\mathrm{Gi}'(i\Omega)/\mathrm{Ai}'(i\Omega). \tag{25}$$

При $\Omega = 0$, т.е. для низкочастотных колебаний с $\omega \sim 1$, $\mathrm{Gi}'(0) = -3^{-1/2}\mathrm{Ai}'(0)$ и $A = 3^{-1/2}\pi C$.

На поверхности зонда $\psi_1|_{\xi=1} = a$, с другой стороны, $\psi_1(1) = \int\limits_0^1 E_1(\xi)d\xi$. Применяя преобразование (20) к этому интегралу, можем записать

$$a = C\ln\alpha^{2/3} + C\ln\zeta_* + A\int\limits_{\zeta_*}^{0}\mathrm{Ai}(\zeta + i\Omega)d\zeta$$

$$+\pi C\int\limits_{\zeta_*}^{0}\mathrm{Gi}(\zeta + i\Omega)d\zeta. \tag{26}$$

Здесь ζ_* — координата условной границы слоя объемного заряда. Два первых члена выражения в правой части определяют потенциал на границе квазинейтральной области и получены в результате применения преобразования (20) к выражению (19). Два последних члена дают падение напряжения в призондовом слое.

При $\zeta_* \to \infty$ известна асимптотическая формула [13]

$$\int\limits_0^{\zeta_*}\mathrm{Gi}(\zeta)d\zeta \sim \frac{2\gamma + \ln 3}{3\pi} + \frac{1}{\pi}\ln\zeta_*. \tag{27}$$

При этом же условии [12]

$$\int\limits_0^{\zeta_*}\mathrm{Ai}(\zeta)d\zeta \to 1/3. \tag{28}$$

Можно показать [14], что эти формулы остаются верными и для интегралов в (26). Подставляя (25), (27), (28) в (26), найдем постоянную C

$$C = 3a/\big[2\ln\alpha + \pi\mathrm{Gi}'(i\Omega)/\mathrm{Ai}'(i\Omega) - 2\gamma - \ln 3\big].$$

Комплексная амплитуда тока электронов, обусловленного главным тоном колебаний их концентрации $I_1 = dn_1(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=0} = F_1''|_{\zeta=0}$, в результате равна

$$I_1(\Omega) = -C + i\Omega A\mathrm{Ai}(i\Omega) + i\Omega\pi C\mathrm{Gi}(i\Omega). \tag{29}$$

При $\Omega = 0$ имеем $I_1 = -C$, причем I_1 — вещественная величина

$$I_1(0) = 3a/(\ln\alpha^{-2} + 3^{-1/2}\pi + 2\gamma + \ln 3). \tag{30}$$

Заметим, что $I_1(0)/a$ дает также наклон стационарной зондовой характеристики при $\psi_p = 0$. Вопрос о наклоне характеристики при потенциале зонда, равном потенциалу пространства, изучался ранее в [15] в связи с возможностью определения температуры электронов. В частности, для изотермической плазмы в [15] было получено, что

$$dI_-(\psi)/d\psi|_{\psi=0} = (1.587 + 3^{-1}\ln\alpha^{-2})^{-1}. \tag{31}$$

На основании аналитического решения (30) первый член в скобках выражения (31) равен $(2\gamma + \ln 3 + 3^{-1/2}\pi)/3 \approx 1.356$.

При $\Omega \neq 0$ определение $I_1(\Omega)$ по формуле (29) требует вычислений, которые затруднены отсутствием подробных таблиц функций Эйри в комплексной области, либо алгоритмических программ для их расчета. При вычислениях использовались четырехзначные таблицы функций Эйри $\mathrm{Ai}(z)$ и $\mathrm{Bi}(z)$ и их производных $\mathrm{Ai}'(z), \mathrm{Bi}'(z)$ [16]. С их помощью вычислялись функции $\mathrm{Gi}(z), \mathrm{Gi}'(z)$ по формулам [12]

$$\mathrm{Gi}(z) = \frac{1}{3}\mathrm{Bi}(z) + \mathrm{Ai}(z)\int\limits_0^z\mathrm{Bi}(u)du - \mathrm{Bi}(z)\int\limits_0^z\mathrm{Ai}(u)du,$$

$$\mathrm{Gi}'(z) = \frac{1}{3}\mathrm{Bi}'(z) + \mathrm{Ai}'(z)\int\limits_0^z\mathrm{Bi}(u)du - \mathrm{Bi}'(z)\int\limits_0^z\mathrm{Ai}(u)du.$$

К сожалению, таблицы [16] не дают значений функций $\mathrm{Ai}(i\Omega), \mathrm{Bi}(i\Omega)$ и их производных при $\Omega > 2.4$. Поэтому для определения зависимости $I_1(\Omega)$ при $\Omega \gg 1$ использовались асимптотические представления функций Эйри при больших значениях аргумента. Функция $\mathrm{Gi}(i\Omega) \sim \mathrm{Bi}(i\Omega)$ при $\Omega \gg 1$ [14]. Асимптотика функций $\mathrm{Ai}(i\Omega), \mathrm{Bi}(i\Omega)$ и их производных приведена в [12]. В результате при $\Omega \gg 1$ имеем

$$I_1(\Omega) = -C\big\{1 - 2\sqrt{\pi}\Omega^{3/4}$$

$$\times\exp[-\sqrt{2}\Omega^{3/2}(1 - i)/3 + 3\pi i/8]\big\},$$

$$C = 3a/\big\{2\ln\alpha - 2\gamma - \ln 3 + i\pi - 2\pi$$

$$\times\exp[-2^{3/2}\Omega^{3/2}(1 + i)/3]\big\}.$$

Комплексную величину $I_1(\Omega)$ представим в полярном виде (14). Зависимости $M(\Omega)$ и $\Phi(\Omega)$ при нескольких значениях $\alpha \ll 1$ приведены на рис. 1, 2.

Обсуждение

Как видно из рис. 1, кривая *1* ($\alpha \to \infty$) и *2–4* ($\alpha \ll 1$) весьма похожи. Если $\alpha \to 0$, то при $\omega \to \infty$

$$M(\omega) \to 3/\sqrt{(2\ln\alpha - 2\gamma - \ln 3)^2 + \pi^2},$$

а при $\alpha \to \infty$ и $\omega \to \infty$ имеем $M(\omega) \to 1/2$, т. е. при больших ω амплитуда тока увеличивается с увеличением α. В то же время заметно различие в поведении кривых $\Phi(\omega)$ при больших и малых α (рис. 2). Сначала кривые *1–4* похожи: ток отстает по фазе от напряжения и реактивная составляющая импеданса зонда является индуктивной. При больших же ω сдвиг фаз $\Phi(\omega) \to 0$, если $\alpha \to \infty$ (кривая *1*), т. е. реактивная составляющая импеданса отсутствует. Если $\alpha \to 0$, то при $\omega \to \infty$

$$\Phi(\omega) \to \mathrm{arctg}\,[\pi/(\ln\alpha^{-2} + 2\gamma + \ln 3)]$$

и реактивная составляющая импеданса является емкостной, причем ток все более опережает по фазе напряжение с увеличением α. Таким образом, зависимость сдвига фаз от отношения α немонотонна в области высоких частот.

Частный характер проведенного в настоящей работе аналитического исследования сильно затрудняет практическое использование полученных результатов. Между тем такое исследование вряд ли возможно в общем случае произвольной величины постоянной составляющей потенциала зонда. Здесь, видимо, придется применять численные методы. Представленные аналитические решения могут быть полезными при верификации численных результатов.

Список литературы

[1] *Чан П., Тэлбот Л., Турян К.* Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978. 202 с.
[2] *Бенилов М.С.* // ТВТ. 1988. Т. 26. № 5. С. 993–1004.
[3] *Benilov M.S., Rogov B.V.* // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70. N 11. P. 6726-6731.
[4] *Кашеваров А.В.* // ТВТ. 1998. Т. 36. № 5. С. 700–705.
[5] *Кашеваров А.В.* // ТВТ. 2000. Т. 38. № 1. С. 147–150.
[6] *Бакшт Ф.Г.* // ЖТФ. 1978. Т. 48. Вып. 10. С. 2019–2026.
[7] *Прозоров Е.Ф., Ульянов К.Н.* // ТВТ. 1983. Т. 21. № 3. С. 538–543.
[8] *Прозоров Е.Ф., Ульянов К.Н.* // ТВТ. 1983. Т. 21. № 6. С. 1179–1185.
[9] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
[10] Таблицы интегральной показательной функции в комплексной области / Библ. матем. табл. / Под ред. К.А. Карпова. Вып. 31. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 636 с.
[11] *Cohen I.M.* // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. N 10. P. 1492–1499.
[12] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И.М. Стеган. М.: Наука, 1979. 832 с.
[13] *Rothman M.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1954. Vol 7. N 3. P. 379–384.
[14] *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
[15] *Бенилов М.С., Тирский Г.А.* // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 6. С. 1324–1327.
[16] *Woodward P.M., Woodward A.M.* // Phil. Mag. 1946. Vol. 37. Ser. 7. N 267. P. 236–261.