01;03

Движение твердой нагретой сфероидальной частицы в вязкой жидкости с однородным внутренним тепловыделением

© Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов

Белгородский государственный университет, Белгород, Россия
e-mail: malay@bsu.edu.ru

(Поступило в Редакцию 22 ноября 2000 г.)

Получено выражение, позволяющее оценить силу сопротивления гидрозольной частицы сфероидальной формы при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда.

Постановка задачи

Пусть твердая частица сфероидальной формы, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности, находится в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Движение нагретых частиц в вязких жидких и газообразных средах сферической формы рассматривалось в ряде работ [1–5]. Под нагретой частицей понимают частицу, средняя температура поверхности которой по величине значительно превышает температуру окружающей среды. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы и т.д. Нагретая поверхность частицы оказывает значительное влияние на теплофизические характеристики окружающей среды и тем самым существенно может повлиять на распределение полей скорости и давления в ее окрестности.

Движение несферических частиц при малых относительных перепадах температуры в жидких и газообразных средах рассматривалось в работах [6–8].

В данной работе в приближении Стокса получено аналитическое выражение для гидродинамической силы, действующей на равномерно нагретую сфероидальную частицу, с учетом зависимости от температуры вязкости, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда при произвольных перепадах температур между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

В системе отсчета, связанной с центром масс частицы, задача сводится к обтеканию нагретого неподвижного сплюснутого (вытянутого) сфероида плоскопараллельным потоком жидкости со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ ($\mathbf{U}_\infty \parallel 0Z$). Предполагается, что плотности, теплопроводности, теплоемкости жидкости и частицы постоянны, коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффицента теплопроводности окружающей жидкости.

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент динамической вязкости сильно зависит от температуры [9]. Для учета зависимости вязкости от температуры воспользуемся выражением (1), которое позволяет описывать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [9])

$$\mu_{\text{liq}} = \mu_\infty \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{T_{\text{liq}}}{T_\infty} - 1\right)^n\right] \exp\left\{-A\left(\frac{T_{\text{liq}}}{T_\infty} - 1\right)\right\}. \tag{1}$$

Здесь A — const, $\mu_\infty = \mu_{\text{liq}}(T_\infty)$, T_∞ — температура жидкости вдали от частицы; индексы liq и p здесь и в дальнейшем относятся к внешней жидкости и частице соответственно. Известно, что вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [9]. Анализ измеющихся полуэмпирических формул показал, что выражение (1) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью.

Описание обтекания сфероида производится в сфероидальной системе координат $(\varepsilon, \eta, \varphi)$ с началом в центре гидрозольной частицы. Криволинейные координаты $\varepsilon, \eta, \varphi$ связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями [10]

$$x = c \operatorname{sh}\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c \operatorname{sh}\varepsilon \sin\eta \sin\varphi,$$
$$z = c \operatorname{ch}\varepsilon \cos\eta, \tag{2}$$
$$x = c \operatorname{ch}\varepsilon \sin\eta \cos\varphi, \quad y = c \operatorname{ch}\varepsilon \sin\eta \sin\varphi,$$
$$z = c \operatorname{sh}\varepsilon \cos\eta, \tag{3}$$

где $c = \sqrt{b_0^2 - a_0^2}$ в случае вытянутого сфероида ($a_0 < b_0$, формула (2)) и $c = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$ в случае сплюснутого сфероида ($a_0 > b_0$, формула (3)); a_0 и b_0 — полуоси сфероида; при этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, чтобы ось z совпадала с осью симметрии сфероида.

При малых числах Рейнольдса распределение скорости $\mathbf{U}_{\text{liq}}$, давления P_{liq} и температуры T_{liq} описывается следующей системой уравнений [11]:

$$\nabla P_{\text{liq}} = \mu_{\text{liq}} \Delta \mathbf{U}_{\text{liq}} + 2(\nabla\mu_{\text{liq}}\nabla)\mathbf{U}_{\text{liq}} + [\nabla\mu_{\text{liq}} \times \operatorname{rot}\mathbf{U}_{\text{liq}}],$$
$$\operatorname{div}\mathbf{U}_{\text{liq}} = 0, \tag{4}$$
$$\Delta T_{\text{liq}} = 0, \quad \Delta T_p = -q_p/\lambda_p. \tag{5}$$

При решении системы уравнений (4), (5) учитываются граничные условия

$$\mathbf{U}_{\text{liq}} = 0,\ T_{\text{liq}} = T_p,\ \lambda_{\text{liq}}\frac{\partial T_{\text{liq}}}{\partial\varepsilon} = \lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial\varepsilon}\ \text{ при } \varepsilon = \varepsilon_0, \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_{\text{liq}} \to U_\infty\cos\eta\mathbf{e}_\varepsilon - U_\infty\sin\eta\mathbf{e}_\eta,$$

$$T_{\text{liq}} \to T_\infty,\quad P_{\text{liq}} \to P_\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon\to\infty, \quad (7)$$

$$T_p \neq \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{e}_\varepsilon$ и $\mathbf{e}_\eta$ — единичные векторы сфероидальной системы координат, λ —коэффициент теплопроводности, $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$, q_p — постоянная мощность источников (стоков) тепла в единицу объема частицы. В граничных условиях (6) на поверхности частицы учтены условие прилипания для скорости, равенство температур и непрерывность потоков тепла на поверхности частицы. Поверхности частицы соответствует координатная поверхность со значением ε, равным ε_0. На большом расстоянии от частицы ($\varepsilon\to\infty$) справедливы граничные условия (7), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $\varepsilon\to 0$, учтена в (8).

Сила, действующая на частицу со стороны потока, определяется по формуле

$$F_z = \int\limits_S\left(-P_{\text{liq}}\cos\eta + \sigma_{\varepsilon\varepsilon}\cos\eta - \frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\operatorname{ch}\varepsilon}\sigma_{\varepsilon\eta}\sin\eta\right)dS, \quad (9)$$

где $dS = c^2\operatorname{ch}^2\varepsilon\sin\eta d\eta d\varphi$ — дифференциальный элемент поверхности, $\sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ и $\sigma_{\varepsilon\eta}$ — компоненты тензора напряжений в сфероидальной системе координат [11].

Поле скорости и распределение температуры. Определение силы сопротивления

Чтобы найти силу, действующую со стороны жидкости на твердую нагретую сфероидальную частицу, нужно знать поле температуры в ее окрестности. Интегрируя уравнения (5) с соответствующими граничными условиями, получаем

$$t_{\text{liq}} = 1 + \frac{\gamma}{c}a_0\operatorname{arcctg}\lambda, \quad (10)$$

$$t_p = B + \frac{\lambda_{\text{liq}}}{\lambda_p}\frac{\gamma a_0}{c}\operatorname{arcctg}\lambda + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{c}f d\lambda - \frac{\operatorname{arcctg}\lambda}{c}\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}f d\lambda. \quad (11)$$

Здесь $\lambda = \operatorname{sh}\varepsilon$; $t = T/T_\infty$; $\gamma = t_s - 1$ — безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности частицы; $t_s = T_s/T_\infty$, T_s — средняя температура поверхности нагретого сфероида, определяемая формулой

$$T_s = T_\infty + \frac{a_0 b_0}{3\lambda_{liq}}q_p; \quad (12)$$

$$B = 1 + \left(1 - \frac{\lambda_{\text{liq}}}{\lambda p}\right)\gamma\sqrt{1+\lambda^2}\operatorname{arcctg}\lambda_0; \quad \lambda_0 = \operatorname{sh}\varepsilon_0;$$

$$f = -\frac{c^2}{2\lambda_p T_\infty}\int\limits_{-1}^{+1}q_p\left(\lambda^2 + x^2\right)dx; \quad x = \cos\eta.$$

С учетом (10) выражение (1) принимает вид

$$\mu_e\mu_\infty\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}F_n\gamma_0^n(\operatorname{arcctg}\lambda)^n\right]\exp\{-\gamma_0\operatorname{arcctg}\lambda\}$$

$$\left(\gamma_0 = \frac{A\gamma}{c}a_0\right). \quad (13)$$

Учитывая, что вязкость зависит только от радиальной координаты λ, решение системы уравнений (4) находим методом разделения переменных, раскладывая поля скорости и давления по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [10]. В частности, для компонент массовой скорости $\mathbf{U}$ были получены следующие выражения, удовлетворяющие граничным условиям (7):

$$U_\varepsilon(\varepsilon,\eta) = \frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\cos\eta[c^2 + A_1G_1 + A_2G_2], \quad (14)$$

$$U_\eta(\varepsilon,\eta) = -\frac{U_\infty}{cH_\varepsilon}\sin\eta[c^2 + A_1G_3 + A_2G_4], \quad (15)$$

где

$$G_1 = -\frac{1}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Theta_n^{(1)}}{(n+3)\lambda^n},$$

$$G_2 = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Theta_n^{(2)}}{(n+1)\lambda^n} - \frac{\beta}{\lambda^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Theta_n^{(1)}}{(n+3)\lambda^n}\left[(n+3)\ln\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1\right],$$

$$G_3 = G_1 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}G_1^{\mathrm{I}}, \quad G_4 = G_2 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}G_2^{\mathrm{I}},$$

$$\Theta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+5)}\sum_{k=1}^{n}\Big[(n+4-k) \times\left\{(n+1-k)\alpha_l^{(1)} + \alpha_k^{(2)}\right\} + \alpha_k^{(3)}\Big]\Theta_{n-k}^{(1)} \quad (n \geqslant 1),$$

$$\Theta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n-2)(n+3)}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}\Big\{(n+2-k) \times\left[(n+1-k)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)}\right] + \alpha_k^{(3)}\Big\}\Theta_{n-k}^{(2)} + \beta\sum_{k=0}^{n}\left[(2n-2k-3)\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(1)}\right]\Theta_{n-k-2}^{(1)} - 6\alpha_n^{(4)}\Bigg]$$

$$(n \geqslant 3), \quad H_\varepsilon = c\sqrt{\operatorname{ch}^2\varepsilon - \sin^2\eta},$$

$$\Theta_1^{(2)} = -\frac{1}{4}\left[2\left(\alpha_0^{(1)} + \alpha_2^{(2)}\right) + \alpha_1^{(3)} + 6\alpha_1^{(4)}\right],$$

$$\Theta_2^{(2)} = 1, \qquad \Theta_0^{(1)} = -1, \qquad \Theta_0^{(2)} = -1,$$

$$\beta = -\frac{1}{5}\Big[\Big\{3\left(2\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}\right) + \alpha_1^{(3)}\Big\}\Theta_1^2 - 2\left(\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}\right) - \alpha_2^{(3)} - 6\alpha_2^{(4)}\Big],$$

$$\alpha_n^{(1)} = C_n + 12\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)},$$

$$\Delta_0 = 1,$$

$$\alpha_n^{(2)} = (n-2)C_n - \gamma_0 C_{n-1} + 12\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^k\frac{(4k+5)C_{n-2k-2}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} - 3\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}(-1)^k\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\Big[(n-2k-2)C_{n-2k-2} - \gamma_0 C_{n-2k-3} + (n+2k-4)C_{n-2k-4}\Big] \quad (n \geqslant 1),$$

$$\alpha_n^{(3)} = -2(n+2)C_n + 2\gamma_0 C_{n-1} - 2(n-2)C_{n-2} + 12\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{n}\right]}(-1)^k\frac{C_{n-2k-2}}{(2k+5)} + 6\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}(-1)^k\frac{(k+2)(4k+5)}{(2k+3)(2k+5)}\Big[(n-2k-2)C_{n-2k-2} - \gamma_0 C_{n-2k-3} + (n-2k-4)C_{n-2k-4}\Big] \quad (n \geqslant 1),$$

$$\alpha_n^{(4)} = \frac{1}{n!}\big[\gamma_0\Delta_{n-1} - (n-1)(n-2)\Delta_{n-2}\big] \quad (n \geqslant 1),$$

$$C_k = \sum_{l_1+3l_3+5l_5+\ldots+sl_s=k}\frac{l!}{l_1!l_3!l_5!\ldots l_s!}F_l\cdot f_1^{l_1}\cdot f_3^{l_3}\cdot f_5^{l_5}\ldots f_s^{l_s},$$

$$s = k - \frac{1+(-1)^k}{2},$$

$$l = l_1 + l_3 + l_5 + \ldots + l_s,$$

$$f_{2k-1} = (-1)^{k-1}\frac{\gamma a_0}{c(2k-1)} \quad (k \geqslant 1). \tag{16}$$

Через $[k/2]$ — обозначена целая часть числа $k/2$.

Сила, действующая на сфероид за счет вязких напряжений, определяется интегрированием выражения (9) по поверхности сфероида и с учетом (14), (15) равна

$$\mathbf{F}_z = -4\pi\frac{\mu_\infty U_\infty}{c}A_2\exp\left\{-\frac{A\gamma}{c}a_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0\right\}\mathbf{n}_z, \tag{17}$$

где $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор в направлении оси z.

Отметим, что сила (17) вычислена в предположении о равномерном движении частицы, которое возможно только в случае, если полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (17) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, то для реализации случая равномерного движения нагретого сплюснутого сфероида следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравновешивающей силу (17).

Постоянные интегрирования A_1, A_2, входящие в выражения для компонент массовой скорости, определяются из граничных условий на поверхности сфероида. После их вычисления выражение (17) можно представить в виде

$$\mathbf{F}_z = 6\pi a_0\mu_\infty K U_\infty \mathbf{n}_z, \tag{18}$$

где

$$K = \frac{2}{3}\frac{G_1^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1+\lambda_0^2}\,\left[G_2G_1^{\mathrm{I}} - G_1G_2^{\mathrm{I}}\right]}\exp\left\{-\frac{A\gamma}{c}a_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0\right\},$$

G_1^{I} и G_2^{I} — первые производные по λ от соответствующих функций, $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор в направлении оси z.

Чтобы получить выражение для гидродинамического сопротивления вытянутого сфероида, необходимо заменить в (18) λ на $i\lambda$ и c на $-ic$ (i — мнимая единица).

Таким образом, формула (18) позволяет оценить гидродинамическую силу, действующую на частицу сфероидальной формы, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности, с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

В качестве примера в таблице приведены результаты расчетов зависимости K от средней температуры поверхности сфероида и отношения полуосей для частиц гранита с радиусом $R = 2\cdot 10^{-5}$ m, взвешенных в воде ($T_\infty = 293°$ K, $A = 6.095$, $F_n = 0$, $n \geqslant 1$).

Зависимость коэффициента K от средней температуры поверхности сфероида и отношения полуосей

	T_s (K)				
	293	313	331	353	a_0/b_0
K	2.066	2.023	1.818	1.704	1.2
K	0.978	0.649	0.367	0.173	1.4

В пределе при $\gamma \to 0$ (малые перепады температуры в окрестности сфероида) $a_0 = R$, $K = 1$ и формула (18) переходит в формулу Стокса [10].

Рассмотрим движение сфероидальной частицы в поле силы тяжести. Частица, падающая под действием силы тяжести в вязкой жидкости, в конце концов начинает двигаться с постоянной скоростью, при которой действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами.

Сила тяжести, действующая на частицу с учетом выталкивающей силы, равна

$$F_g = (\rho_p - \rho_{\text{liq}}) g \frac{4}{3} \pi a_0^2 b_0. \qquad (19)$$

Приравнивая (18) и (19), получаем скорость установившегося падения неравномерно нагретой частицы сфероидальной формы

$$U_\infty = (\rho_p - \rho_{\text{liq}}) g \sqrt{1+\lambda_0^2} \frac{a_0 b_0}{3\mu_\infty} \frac{G_1 G_2^{\mathrm{I}} - G_2 G_1^{\mathrm{I}}}{G_1^{\mathrm{I}}}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{A\gamma}{c} a_0 \operatorname{arcctg} \lambda_0 \right\}.$$

Укажем еще на некоторые задачи о движении равномерно нагретой частицы сфероидальной формы, решения которых могут быть установлены непосредственно из полученных выше результатов. Рассмотрим движение частицы, когда внутри ее действуют неравномерно распределенные источники (стоки) тепла с плотностью q_p. В этом случае средняя температура поверхности сфероида определяется следующим соотношением:

$$\frac{T_s}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi a_0 \lambda_{\text{liq}} T_\infty} \int_V q_p dV,$$

где интегрирование ведется по всему объему сфероидальной частицы.

Другой случай, — когда источники (стоки) тепла постоянной интенсивности I_0 распределены не в объеме, а на поверхности частицы. Нетрудно показать, что результаты, соответствующие данному случаю, получаются, если во всех соотношениях, относящихся к случаю однородного внутреннего тепловыделения, формально можно положить

$$q_p = \frac{3}{4b_0} I_0 \left[2 + \frac{b_0^2}{\varepsilon a_0^2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right].$$

Здесь ε — эксцентриситет. Можно также рассмотреть движение равномерно нагретой частицы, средняя температура поверхности которой равна T_s. В частности, если на сфероид падает поток электромагнитного излучения (длина волны λ_0) интенсивностью I_0, поглощаемая ею энергия равна $\pi R^2 I_0 K_n$, где R — наибольшая полуось сфероида, K_n — фактор поглощения [12]. Если предположить, что $\lambda_0 \gg R$, поглощенная энергия распределяется по поверхности частицы равномерно, т.е. ее можно считать равномерно нагретой. В этом случае необходимо положить $q_p = 0$ и в граничных условиях (6) читать $T = T_s$. Параметр γ принимает вид

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}} \frac{t_s - 1}{\operatorname{arcctg} \lambda_0} \quad (t_s = T_s/T_\infty).$$

Список литературы

[1] *Kassoy D.R., Adamson T.C., Messiter A.F.* // J. Phys. Fluids. 1966. Vol. 9. N 4. P. 671–681.
[2] *Найденов В.И.* // ПММ. 1971. Т. 38. Вып. 1. С. 162–166.
[3] *Щукин Е.Р., Малай Р.В.* // ИФЖ. 1988. Т. 54. № 4. С. 630–635.
[4] *Щукин Е.Р., Малай Н.В., Яламов Ю.И.* // ТВТ. 1988. Т. 25. № 5. С. 1020–1024.
[5] *Малай Н.В.* // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 4. С. 728–738.
[6] *Яламов Ю.И., Афанасьев А.М.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 9. С. 1998–2000.
[7] *Яламов Ю.И., Афанасьев А.М.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 9. С. 2001–2002.
[8] *Яламов Ю.И., Редчиц В.М., Гайдуков М.Н.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 7. С. 1534–1540.
[9] *Брейтшгайдер Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М., 1966.
[10] *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамики при малых числах Рейнольдса. М., 1976.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М., 1958.
[12] *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., 1986.