01;10

К вопросу о влиянии магнитного поля на прохождение быстрых заряженных частиц через вещество

© Н.Д. Наумов

(Поступило в Редакцию 14 июня 2000 г. В окончательной редакции 13 декабря 2000 г.)

Для задачи о прохождении криволинейного пучка быстрых заряженных частиц через вещество в неоднородном магнитном поле получено уравнение переноса в малоугловом приближении. Построены функции Грина этого уравнения для кольцевого пучка в слабофокусирующем поле и для спирального пучка в однородном магнитном поле.

Введение

Разработка теоретических моделей прохождения быстрых заряженных частиц через вещество в магнитном поле представляет интерес для задач физики высоких энергий, астрофизики и физики Земли. Возможность использования для этой цели аналитических методов обусловлена малостью угла однократного рассеяния, что приводит к существенному упрощению упругой части интеграла столкновений в уравнении переноса. Представление интеграла столкновений в дифференциальной форме позволило получить ряд решений уравнения переноса в малоугловом приближении [1–3].

Однако полученные результаты относятся к случаю движения потока заряженных частиц вдоль направления магнитного поля, т.е. для прямолинейного пучка. Для криволинейного пучка уравнение переноса в малоугловом приближении не получено; например, задача об инжекции пучка заряженных частиц под углом к направлению однородного магнитного поля изучалась в работах [4–6] с помощью кинетического уравнения. В данной работе для задачи о прохождении криволинейного пучка заряженных частиц через вещество в неоднородном магнитном поле получено уравнение переноса в малоугловом приближении, а также построены функции Грина этого уравнения для кольцевого и спиральных пучков.

Система криволинейных координат

Распространение пучка частиц удобно рассматривать относительно системы криволинейных координат s, η, ζ

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}(s) + \eta\mathbf{n} + \zeta\mathbf{b},$$

где $\mathbf{Y}(s)$ — траектория частиц на оси пучка; s — длина траектории от места инжекции пучка; $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — векторы трехгранника Френе, связанного с кривой $\mathbf{Y}(s)$.

Несмотря на то что векторы трехгранника Френе взаимно перпендикулярны, введенная система координат не является ортогональной, так как не все скалярные произведения базисных векторов

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial s} = \sigma\mathbf{t} + \kappa(\xi\mathbf{b} - \eta\mathbf{n}),$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\zeta} = \mathbf{b}$$

равны нулю. Здесь $\sigma = 1 - k\eta$; k, κ — кривизна и кручение кривой $\mathbf{Y}(s)$. Уравнение движения частицы во внешнем магнитном поле $B_0 = \mathbf{B}(\mathbf{Y}(s))$ с учетом влияния потерь энергии имеет вид

$$mv\mathbf{u}' = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0] - \varepsilon_0\mathbf{t}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u} = \gamma v\mathbf{t}$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(W)$, $W = mc\sqrt{u^2 + c^2} - mc^2$ — кинетическая энергия осевой частицы. Функция $\varepsilon(W)$ представляет собой тормозную способность вещества, которая для быстрых заряженных частиц определяется формулой Бете–Блоха [7]. В этом разделе штрихом обозначается дифференцирование по s.

Если использовать разложение вектора магнитного поля на оси пучка

$$\mathbf{B}_0 = B_{01}\mathbf{t} + B_{02}\mathbf{n} + B_{03}\mathbf{b},$$

то уравнение (1) запишется в следующем виде:

$$u'\mathbf{t} + ku\mathbf{n} = \frac{e}{mc}(B_{02}\mathbf{b} - B_{03}\mathbf{n}) - \frac{\varepsilon_0}{mv}\mathbf{t}. \tag{2}$$

Отсюда для кривизны траектории найдем: $k = -\rho B_{03}$. Здесь и в дальнейшем для краткости используется обозначение $\rho = e/mcu$. Кроме этого, $\mathbf{n}\mathbf{B}_0 = 0$, т.е. при движении заряженной частицы вектор магнитного поля находится в так называемой спрямляющей плоскости, связанной с траекторией частицы.

В качестве продольной переменной вместо s можно использовать собственное время движения осевой частицы

$$\tau = \int\limits_0^s \frac{dx}{u(x)},$$

т.е. перейти к параметрическому представлению ее траектории. Тогда уравнение (1) запишется в следующем виде (точкой обозначается дифференцирование по τ):

$$m\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \frac{e}{c}[\mathbf{u}\mathbf{B}_0] - \gamma\varepsilon_0\mathbf{t}. \tag{3}$$

Исходя из определения кривизны и кручения пространственной кривой $k^2 = [\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}]^2/u^6$, $k = \ddot{\mathbf{u}}[\mathbf{u}\dot{\mathbf{u}}]/k^2u^6$ [8], с помощью уравнения (3) найдем связь этих характеристик траектории с величиной внешнего поля и скоростью частицы

$$k = \frac{\rho}{u}\sqrt{u2B_0^2 - (\mathbf{u}\mathbf{B}_0)^2},$$

$$\kappa = -\frac{\rho}{u}\left(\mathbf{u}\mathbf{B}_0 + \frac{\rho}{uk^2}\mathbf{B}_0[\mathbf{u}\dot{\mathbf{B}}_0]\right).$$

В частности, для однородного магнитного уравнения поля $\kappa = -\rho\mathbf{u}\mathbf{B}_0/u$.

Уравнение переноса

При наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$ уравнение переноса в приближении непрерывного замедления имеет вид

$$\mathbf{\Omega}\frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{c}[\mathbf{\Omega}\mathbf{B}]\frac{\partial N}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \varepsilon N}{\partial T} + I_{el},$$

$$I_{el} = n_a\int d\mathbf{\Omega}'\frac{d\Sigma}{d\mathbf{\Omega}'}(T|\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega})[N(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}', T) - N(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, T)]. \quad (4)$$

Здесь $N(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, T)$ — плотность потока; e, m, T — соответственно заряд, масса и кинетическая энергия частицы; $\mathbf{p} = \mathbf{\Omega}\sqrt{T(T + 2mc^2)}/c$; $\varepsilon = \varepsilon(T)$; n_a — число атомов в единице объема среды; I_{el} — интеграл упругих столкновений, где $d\Sigma(T|\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega})/d\mathbf{\Omega}'$ — сечение упругого рассеяния из состояния $\mathbf{\Omega}'$ в состояние $\mathbf{\Omega}$.

Чтобы записать уравнение переноса в рассматриваемой системе координат, следует воспользоваться общим выражением для градиента функции в неортогональных криволинейных координатах [8]

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial N}{\partial s}\mathbf{e}^2 + \frac{\partial N}{\partial \eta}\mathbf{e}^2 + \frac{\partial N}{\partial \zeta}\mathbf{e}^3,$$

где $\mathbf{e}^i$ — векторы взаимного базиса, которые вычисляются с помощью векторов $\mathbf{e}_i$ и в данном случае имеют вид

$$\mathbf{e}^2 = \frac{1}{\sigma}\mathbf{t}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{n} + \zeta\frac{\kappa}{\sigma}\mathbf{t}, \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{b} - \eta\frac{\kappa}{\sigma}\mathbf{t}.$$

Используя разложение векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{B}$ по векторам трехгранника Френе

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{t} + p_2\mathbf{n} + p_3\mathbf{b}, \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{t} + B_2\mathbf{n} + B_3\mathbf{b},$$

из уравнения (4) для плотности потока получим следующее уравнение в криволинейных координатах:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial N}{\partial s} + \left[p_2\frac{k}{\sigma} + \frac{e}{cp}(p_2B_3 - p_3B_2)\right]\frac{\partial N}{\partial p_1}$$
$$+ \left[\frac{1}{\sigma}(\kappa p_3 - kp_1) + \frac{e}{cp}(p_3B_1 - p_1B_3)\right]\frac{\partial N}{\partial p_2}$$
$$+ \left[\frac{e}{cp}(p_1B_2 - p_2B_1) - p_2\frac{\kappa}{\sigma}\right]\frac{\partial N}{\partial p_3}$$
$$+ \left(\frac{p_2}{p} + \zeta\frac{\kappa}{\sigma}\right)\frac{\partial N}{\partial \eta} + \left(\frac{p_3}{p} - \eta\frac{\kappa}{\sigma}\right)\frac{\partial N}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varepsilon N}{\partial T} + I_{el}. \quad (5)$$

Малоугловое приближение

В малоугловом приближении $\mathbf{\Omega} = \mathbf{p}/p \approx \mathbf{t} + \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{b}$, что позволяет упростить интеграл упругих столкновений (при условии пренебрежения влиянием внешнего поля на процесс столкновений)

$$I_{el} = L(T)N, \quad L(T) = \frac{1}{4}\chi^2(T)(L_1 + L_2),$$

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

где $\chi^2(T)$ — средний квадрат угла рассеяния на единице пути.

Для узкого пучка, когда отношение поперечных размеров пучка как к радиусу его кривизны, так и к радиусу кручения является малой величиной, значения $k\eta$, $\kappa\eta$, $\kappa\zeta$ будут малыми. Кроме того, малой величиной предполагается и степень немонэнергетичности пучка $\tau = T/W - 1$. Поэтому ввиду малости угла рассеяния можно положить $\chi^2(T) \approx \chi^2(W)$, а для составляющих вектора импульса найдем, пренебрегая членами второго порядка малости,

$$p_1 = mu(1 + \Gamma\tau), \quad p_2 = mu\alpha, \quad p_3 = mu\beta,$$

где $\Gamma = (W + mc^2)/(W + 2mc^2)$.

Для дальнейших преобразований следует перейти от p_2, p_3 к переменным α, β, а также использовать разложение внешнего поля вблизи оси пучка

$$B_1 = B_{01} + H_1, \quad B_2 = H_2, \quad B_3 = B_{03} + H_3,$$

где H_i — величины первого порядка.

В результате уравнение (5) с точностью до членов первого порядка запишется в виде

$$\frac{\partial N}{\partial s} + (\alpha + \kappa\zeta)\frac{\partial N}{\partial \eta} + \Big[\lambda\beta - k^2\eta - \rho H_3$$
$$- \left(k\tau\Gamma + \alpha\frac{u'}{u}\right)\Big]\frac{\partial N}{\partial \alpha} + (\beta - \kappa\eta)\frac{\partial N}{\partial \zeta}$$
$$+ \left(\rho H_2 - \lambda\alpha - \beta\frac{u'}{u}\right)\frac{\partial N}{\partial \beta} = \sigma\frac{\partial \varepsilon N}{\partial T} + \Lambda N, \quad (6)$$

где используются обозначения: $\lambda = \kappa + \rho H_1$, $\Lambda = L(W)$.

Заключительный этап преобразований уравнения переноса (6) заключается в переходе от T к переменной τ. Здесь нужно также учесть, что поскольку $u = \sqrt{W(W+2mc^2)}/mc$, то $u' = u\Gamma W'/W$. С другой стороны, из уравнения (2) следует, что $u' = -\varepsilon_0/mv$. Используя выражение для скорости частицы $v = W/mu\Gamma$, приходим к естественному результату: изменение кинетической энергии осевых частиц при прохождении через вещество определяется тормозной способностью вещества $W' = -\varepsilon_0$.

В итоге для функции $F = \varepsilon N$ окончательно получим следующее уравнение, пренебрегая членами второго порядка малости:

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \left[\frac{\varepsilon_0}{W}(\tau + k\eta) - \tau\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial W}\right]\frac{\partial F}{\partial \tau} + (\alpha + \kappa\zeta)\frac{\partial F}{\partial \eta}$$
$$+ \left[\lambda\beta - k^2\eta - \rho H_3 - \Gamma(k\tau - \alpha\frac{\varepsilon_0}{W})\right]\frac{\partial F}{\partial \alpha}$$
$$+ (\beta - \kappa\eta)\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \left(\rho H_2 - \lambda\alpha + \beta\Gamma\frac{\varepsilon_0}{W}\right)\frac{\partial F}{\partial \beta} = \Lambda F. \tag{7}$$

Уравнение (7) описывает прохождение узкого пучка быстрых заряженных частиц через вещество в неоднородном магнитном поле с учетом влияния потерь энергии и многократного упругого рассеяния. Получение аналитических решений этого уравнения представляет собой достаточно сложную задачу. Более простым является уравнение переноса в малоугловом приближении при учете влияния только многократного упругого рассеяния

$$\frac{\partial N}{\partial s} + (\alpha + \kappa\zeta)\frac{\partial N}{\partial \eta} + (\lambda\beta - k^2\eta - \rho H_3 - k\tau\Gamma)\frac{\partial N}{\partial \alpha}$$
$$+ (\beta - \kappa\eta)\frac{\partial N}{\partial \zeta} + (\rho H_2 - \lambda\alpha)\frac{\partial N}{\partial \beta} = \Lambda N. \tag{8}$$

Кольцевой пучок

Уравнение (8) упрощается при $\kappa = 0$, т.е. когда ось пучка является плоской кривой. В качестве конкретного примера рассмотрим распространение кольцевого пучка в слабофокусирующем поле с показателем спада q

$$\mathbf{B} = B_0[qk\zeta\mathbf{n} + (1 + qk\eta)\mathbf{b}].$$

В этом случае уравнение (8) записывается следующим образом:

$$MN = 0, \quad M = \frac{\partial}{\partial s} + M_1 + M_2, \tag{9}$$

где введены обозначения $k_1 = k\sqrt{1-q}$, $k_2 = k\sqrt{q}$,

$$M_1 = \alpha\frac{\partial}{\partial \eta} - (k_1^2\eta + k\tau\Gamma)\frac{\partial}{\partial \alpha} - \Lambda_1,$$

$$M_2 = \beta\frac{\partial}{\partial \zeta} - k_2^2\zeta\frac{\partial}{\partial \beta} - \Lambda_2.$$

Решение уравнения (9) можно получить с помощью метода функции Грина

$$\vartheta(s)N(s, X, T) = \int G(X, X_0, s)N(0, X_0, T)dX_0,$$

$$MG(X, X_0, s) = \delta(s)\delta(X - X_0).$$

Здесь $\vartheta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, а для совокупностей переменных используются обозначения $X = \{x_1, x_2\}$, $x_1 = \{\eta, \alpha\}$, $x_2 = \{\zeta, \beta\}$. Как нетрудно видеть, функция Грина имеет следующую структуру:

$$G(X, X_0, s) = \vartheta(s)F_1(x_1, x_{10}, s)F_2(x_2, x_{20}, s),$$

где функции F_i удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + M_i\right)F_i = 0 \tag{10}$$

с начальным условием $F_i(x_i, x_{i0}, 0) = \delta(x_i - x_{i0})$.

Для определения функций F_i вначале следует перейти от x_i к новым переменным ξ_i, γ_i

$$\xi_1 = f_1 - k_1\eta_0, \quad \xi_2 = f_2 - k_2\zeta_0,$$

$$\gamma_1 = g_1 - \alpha_0, \quad \gamma_2 = g_2 - \beta_0,$$

где функции f_i, g_i имеют вид ($\psi_i = k_i s$)

$$f_1\left(k_1\eta + \frac{k}{k_1}\tau\Gamma\right)\cos\psi_1 - \alpha\sin\psi_1 - \frac{k}{k_1}\tau\Gamma,$$

$$f_2 = k_2\zeta\cos\psi_2 - \beta\sin\psi_2,$$

$$g_1 = \alpha\cos\psi_1 + \left(k_1\eta + \frac{k}{k_1}\tau\Gamma\right)\sin\psi_1,$$

$$g_2 = \beta\cos\psi_2 + k_2\zeta\sin\psi_1.$$

Эти функции являются интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\eta' = \alpha, \quad \alpha' = -k_1^2\eta - k\tau\Gamma,$$

$$\zeta' = \beta, \quad \beta' = -k_2^2\zeta.$$

Указанная замена переменных приводит к исключению в уравнении (10) членов с производными первого порядка (для краткости опущен индекс i)

$$\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\chi^2}{4}\left(\sin^2\psi\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\right.$$
$$\left. - \sin 2\psi\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\partial \gamma} + \cos^2\psi\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2}\right) = 0. \tag{11}$$

Для решения уравнения (10) можно воспользоваться двойным преобразованием Фурье по переменным ξ, γ, после чего для фурье-образа получается обыкновенное дифференциальное уравнение. Это уравнение несложно проинтегрировать и в итоге получается следующий результат:

$$F_i = \frac{k_i}{\pi D_i} \exp\left[-\frac{1}{D_i^2}\left(A_i\xi_i^2 - 2B_i\xi_i\gamma_i + C_i\gamma_i^2\right)\right],$$

$$A_i = \frac{\chi^2}{2k_i}\left(\psi_i + \frac{1}{2}\sin 2\psi_i\right), \quad B_i = -\frac{\chi^2}{2k_i}\sin^2\psi_i,$$

$$C_i = \frac{\chi^2}{2k_i}\left(\psi_i - \frac{1}{2}\sin 2\psi_i\right), \quad D_i^2 = C_iA_i - B_i^2.$$

Для плотности частиц в случае дельта-образного источника найдем

$$n = \frac{k_1k_2n_0}{\pi\sqrt{C_1C_2}} \exp\left(-\frac{k_1^2\eta^2}{C_1} - \frac{k_2^2\zeta^2}{C_2}\right).$$

Таким образом, коэффициенты C_1, C_2 характеризуют увеличение поперечных размеров пучка вследствие многократного упругого рассеяния.

Спиральный пучок

Аналогичным образом можно найти функцию Грина для пучка в однородном магнитном поле, когда ось пучка представляет собой винтовую линию. В этом случае кривизна и кручение оси пучка не зависят от s: $k = |\nu|\sin\theta$, $\kappa = \nu\cos\theta$, где $\nu = -\rho B_0$, θ — угол между вектором магнитного поля и направлением инжекции пучка. Для спирального пучка уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial s} + (\alpha + \kappa\zeta)\frac{\partial N}{\partial \eta} + (\beta - \kappa\eta)\frac{\partial N}{\partial \zeta} - k(k\eta + \tau\Gamma)\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \Lambda N. \tag{12}$$

В данном случае для исключения членов с первыми производными следует воспользоваться следующей заменой переменных:

$$\xi_1 = (\nu\eta - Q)\cos\psi - (\alpha + \kappa\zeta)\sin\psi + Q - \nu\eta_0.$$

$$\xi_2 = \frac{\zeta}{\nu}\left(k^2 + \kappa^2\cos\psi\right) + \kappa\left(\eta - \frac{Q}{\nu}\right)\sin\psi + \alpha\frac{\kappa}{\nu}(\cos\psi - 1) - \nu sR - \nu\zeta_0,$$

$$\xi_3 = \mu\alpha + \frac{k^2}{\nu^2}[(\nu\eta - Q)\sin\psi + \kappa\zeta(\cos\psi - 1)] + \kappa sR - \alpha_0,$$

где используются обозначения

$$\psi = \nu s, \quad \mu = (\kappa^2 + k^2\cos\psi)/\nu^2,$$

$$Q = (\kappa\beta - k\tau\Gamma)/\nu, \quad R = k(k\beta + \kappa\tau\Gamma)/\nu^2.$$

В результате уравнение (12) приводится к аналогичному (11) виду

$$\frac{\partial N}{\partial s} - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial^2 N}{\partial\xi_i\partial\xi_j} = 0.$$

Здесь для краткости введена симметричная матрица коэффициентов $a_{ij}(s)$

$$a_{11} = \chi^2\left[\sin^2\psi + \frac{\kappa^2}{\nu^2}(\cos\psi - 1)^2\right],$$

$$a_{22} = \frac{\chi^2}{\nu^4}\left[\kappa^2\nu^2(\sin\psi - 1) + (\kappa^2\sin\psi + \nu sk^2)^2\right],$$

$$a_{33} = \chi^2\left[\mu^2 + \frac{\kappa^2}{\nu^6}k^4(\sin\psi - \nu s)^2\right],$$

$$a_{12} = \kappa\chi^2\frac{k^2}{\nu^3}(\cos\psi - 1)(\nu s - \sin\psi),$$

$$a_{13} = -\frac{\kappa}{\nu}a_{12} - \mu\chi^2\sin\psi,$$

$$a_{23} = \kappa\frac{\chi^2}{\nu^5}\left[\mu\nu^4(\cos\psi - 1) + k^2(\sin\psi - \nu s)(\kappa^2\sin\psi + \nu sk^2)\right].$$

Применение метода преобразования Фурье позволяет получить функцию Грина

$$G = \frac{\vartheta(s)\nu^2}{2\pi\sqrt{\pi}D}\exp\bigg(\frac{1}{D_2}\big[(A_{22}A_{33} - A_{23}^2)\xi_1^2 + (A_{11}A_{33} - A_{13}^2)\xi_2^2 + (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\xi_3^2 + 2(A_{13}A_{23} + A_{33}A_{12})\xi_1\xi_2 + 2(A_{12}A_{23} + A_{22}A_{13})\xi_1\xi_3 + 2(A_{12}A_{13} + A_{11}A_{23})\xi_2\xi_3\big]\bigg).$$

Фигурирующие здесь коэффициенты имеют вид

$$A_{ij} = \int_0^s a_{ij}(x)dx,$$

$$D^2 = A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2.$$

Практическая значимость полученных результатов заключается в возможности оценки параметров пучка быстрых заряженных частиц при прохождении через вещество во внешнем магнитном поле. Эти оценки будут применимы в той области, где еще не происходит заметного утолщения пучка вследствие влияния таких факторов, как разброс скоростей частиц и многократное упругое рассеяние.

Список литературы

[1] *Кимель Л.Р., Салимов О.Н.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 5. С. 1154–1180.
[2] *Наумов Н.Д.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 2. С. 178–180.
[3] *Ковалев С.Д., Кузовлев А.И., Рогозкин Д.Б.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 6. С. 37–46.
[4] *Артамонов А.С., Горбунов В.А.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 8. С. 1605–1608.

[5] *Ремизович В.С., Тараскин С.Н.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 7. С. 1356–1363.
[6] *Андреев С.П., Кошелкин А.В.* // ДАН. 1986. Т. 289. № 3. С. 593–596.
[7] *Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И.* Флуктуации пробегов заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988.
[8] *Ильин В.А., Позднян Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1973. Ч. 2.